

Capacitância

ideia : introduzir o conceito de capacitância e discutir dispositivo que armazena energia (potencial) eletrostática

(i) Considerar : 2 condutores inicialmente neutros e separados distância d (Fig. A)



(ii) Considerar que $+Q > 0$ cargas elétricas são transferidas do condutor 2 p/ 1 (Fig. B)

\hookrightarrow potencial condutor 1 = V_1
 " " " 2 = V_2

notas : campo elétrico \vec{E} região entre condutores

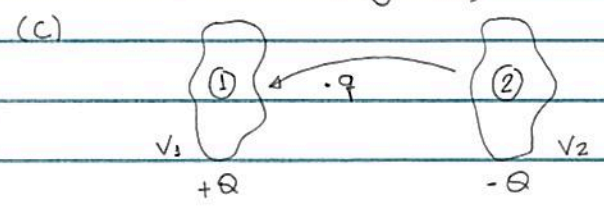
$$E \propto Q \rightarrow V = V_1 - V_2 \propto Q \text{ ou } Q \propto V$$

$\hookrightarrow Q = C V$ (48.1)
 \hookrightarrow capacitância do sistema

unidade :

$$[C] = \frac{1 \text{ C}}{V} \equiv 1 \text{ F (farad)}$$

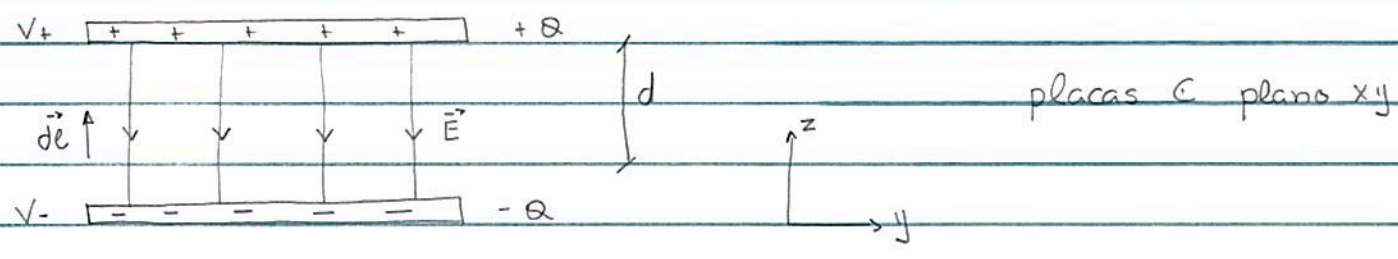
(iii) considerar carga $q > 0$ transferida condutor 2 p/ 1 (Fig. C)



nesse caso: trabalho deve ser realizado p/ transferência carga q
↳ energia (potencial) e eletrostática é adicionada ao sistema

↳ sistema 2 condutores: - armazena carga elétrica Q
(Fig. A) " energia potencial eletrostática
≡ capacitor

Ex. 1: capacitor placas paralelas planas, área placa A



hipótese: $\sqrt{A} \gg d \rightarrow$ campo elétrico $\vec{E} \approx$ uniforme.

vimos que:

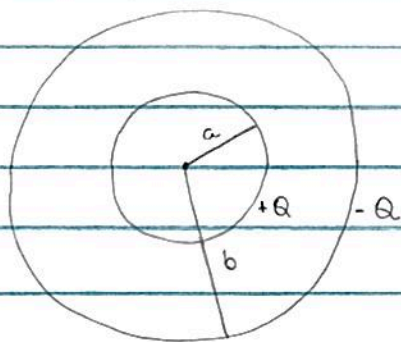
$$V \equiv V_+ - V_- = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{e} = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} ; \sigma = \frac{Q}{A}$$

$$\rightarrow Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d} : \text{capacitância (v\u00e1cuo)} \quad (49.1)$$

notas: região entre condutores = v\u00e1cuo

$C \propto$ de universal (ϵ_0) * geometria sistema (A/d)

Ex. 2: capacitor = 2 camadas esféricas concêntricas, raios a e b;
determinar capacitância



hipótese: região entre esferas = vácuo

Vimos que (pg. 40) potencial esfera condutora raio a, carga Q

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad r > a \quad = \text{potencial casca esférica}$$

$$\hookrightarrow V \equiv V(a) - V(b) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) Q$$

$$\text{Como } Q = CV \rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{ab}{b-a} \quad (50.1)$$

considerar limites:

(i) $a, b \rightarrow \infty$ e $b-a = d \sim$ capacitor placas // e planas

$$(50.1) : C = \frac{4\pi\epsilon_0 a^2}{d} = \epsilon_0 \frac{(4\pi a^2)}{d} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

(ii) $b \rightarrow \infty$:

$C = 4\pi\epsilon_0 a$: capacitância esfera/casca esférica condutora
raio a

$$\left(\text{ideia: } V = V_{\text{condutor}} - \underbrace{V(r \rightarrow \infty)}_0 \right) \quad (50.2)$$

• notas Eqs. (49.1), (50.1), (50.2):

$$C \propto \epsilon_0 \cdot \text{comprimento}^{\perp}$$

$$\hookrightarrow [C] = [\epsilon_0] [\text{comprimento}] \rightarrow [\epsilon_0] = \frac{C^2}{N \cdot m^2} = \frac{F}{m}$$

• Considerem capacitor Ex.1, $C = 1F$, $d = 1mm$

$$\hookrightarrow A \approx 10^8 m^2$$

$\hookrightarrow 1F$: quantidade "muito grande" \rightarrow valores usuais:

$$1\mu F = 10^{-6} F \text{ (microfarad)}$$

$$1pF = 10^{-12} F \text{ (picofarad)}$$

• notas Eq. (48.1):

p/ V fixo $\rightarrow Q \propto C \rightarrow C$: medida da capacidade do sistema de armazenar carga/energia!

energia potencial eletrostática armazenada em capacitor,

considerar processo de carga capacitor, capacitância C

se $Q =$ carga armazenada $\rightarrow Q = CV$

considerar $Q \rightarrow Q+dQ \rightarrow dW = VdQ$: trabalho realizado
força externa

Como $Q = CV$

$$\hookrightarrow W = \frac{1}{C} \int_0^Q Q'dQ' = \frac{1}{2C} Q^2$$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad \text{: energia potencial armazenada capacitor} \quad (52.1)$$

considerar caso particular:

capacitor placas paralelas e planas,

$$(49.1) \oplus (52.1) : U = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \frac{A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \underbrace{(Ad)}_{\text{volume região entre condutores}}$$

$$\hookrightarrow u \equiv \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (52.1)$$

Interpretação (52.1) : densidade energia (potencial) eletrostática armazenada no campo elétrico \vec{E} entre placas condutoras.

pt/ uma certa distribuição de cargas, vimos que

$$\text{Eq. (47.1)} : U = \frac{1}{2} \int d\tau \rho(\vec{r}) V(\vec{r})$$

Verifica-se que:

$$U = \frac{1}{2} \int d\tau \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int d\tau \epsilon_0 E^2 \quad (53.1)$$

Energia armazenada
nas cargas

Energia armazenada
no campo elétrico : 2 descrições
equivalentes

Exercício: verificar (53.1) pt/ esfera condutora raio R, carga Q

Obs.: energia armazenada no campo: conceito útil pt/ descrições
ondas eletromagnéticas.

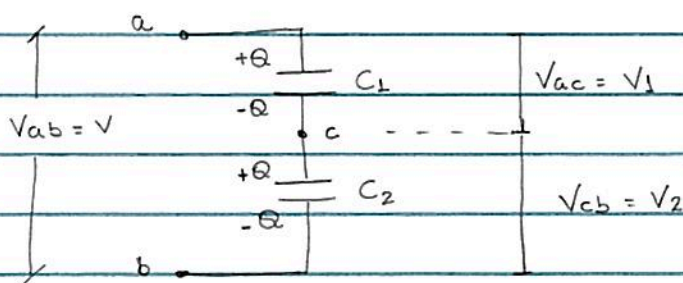
• representação capacitor em um circuito elétrico:



• combinação de capacitores:

(i) série:

Considerar 2 capacitores C_1 e C_2 em série:



notar que carga armazenada nos 2 capacitores = Q

como : $Q = C_1 V_1$

$Q = C_2 V_2$

e $V_{ab} = V = V_1 + V_2$

$\rightarrow V = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q$
 $\equiv 1/C_{eq}$

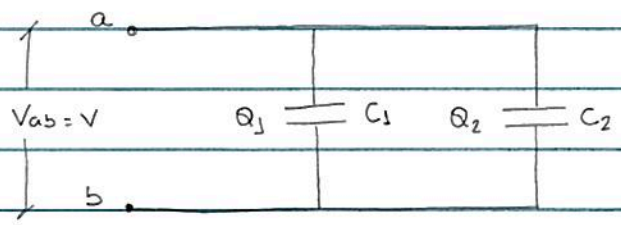
L> associaçao 2 capacitores em serie = 1 capacitor, capacitancia C_{eq}

$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

p/ N capacitores : $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$

(ii) paralelo :

considerar 2 capacitores C_1 e C_2 em paralelo :



notar que os dois capacitores estao sob mesma V

como : $Q_1 = C_1 V$

$Q_2 = C_2 V$

$Q = Q_1 + Q_2$

$\rightarrow Q = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_{eq}} V$

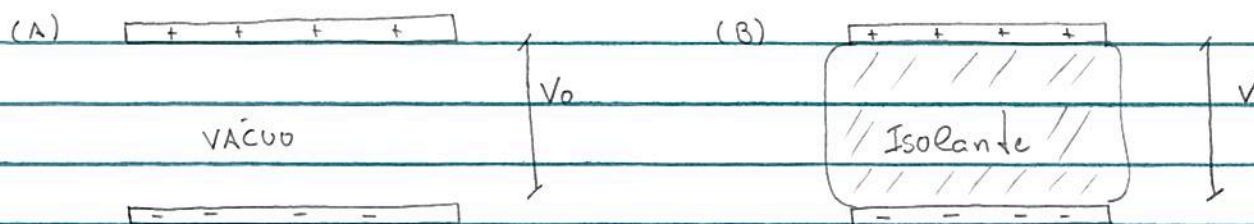
L> associaçao 2 capacitores em serie = 1 capacitor, carga armazenada = $Q = Q_1 + Q_2$, capacitancia C_{eq} , $C_{eq} = C_1 + C_2$

p/ N capacitores : $C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i$

• Dielétricos,

Até o momento consideramos: região entre condutores
capacitor = vácuo

considerar, por exemplo, capacitor placas // e planas



(A) : carga armazenada Q , V_0 e C_0 : capacitância (vácuo)

(B) : " " Q , V e C : capacitância na presença isolante

hipótese : carga armazenada Q em (A) e (B)
verifica-se que $V > V_0$, isto é, $V = \frac{V_0}{k}$, $k > 1$

$$\text{como } Q = C_0 V_0$$

$$Q = C V \quad \rightarrow \quad C = k C_0$$

↳ introdução material isolante (dielétrico) entre as placas do capacitor aumenta a capacitância do sistema w.r.t. capacitor na ausência dielétrico

k : cte dielétrica do material

$$k > 1$$

k caracteriza o material (descrição macroscópica)

Ex.:	Vácuo:	$\kappa = 1$	
	ar (1 atm)	1,0006	nota: κ é adimensional!
	Ge	16	
	Vidro	5 - 10	

• introdução do dielétrico no capacitor

- ↳ (i) aumento capacitância w.r.t. capacitor s/ dielétrico
- (ii) estabelece E_{MAX} entre as placas capacitor

↳ rigidez dielétrica

Se $E > E_{MAX}$ → ruptura do dielétrico = dielétrico → condutor

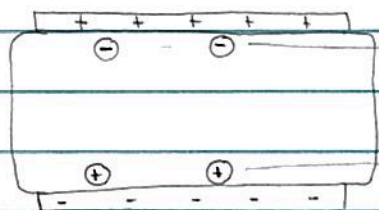
Ex.:	ar seco	$\kappa \approx 1$	$E_{MAX} \sim 10^6$ V/m
	vidro (pyrex)	4,7	10^7 V/m

• ⊕ dielétrico

↳ $V_0 \rightarrow \frac{1}{\kappa} V_0 \xrightarrow{E \propto V} E_0 \rightarrow E = \frac{1}{\kappa} E_0$

como carga Q e placas capacitor etc

↳ hipótese p/ redução campo elétrico: + cargas na superfície do dielétrico



→ cargas induzidas na superfície do dielétrico

(cargas de polarização)

lembrar que (pg. 49) : $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$: campo elétrico entre placas capacitor

capacitor ⊕ vácuo : $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

capacitor ⊕ dielétrico : $E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma - \sigma_i)$
↳ densidade de cargas induzida na sup. dielétrico

↳ $\sigma_i = \sigma \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$:

• definições : $\epsilon = \epsilon_0 \kappa$: permissividade do dielétrico

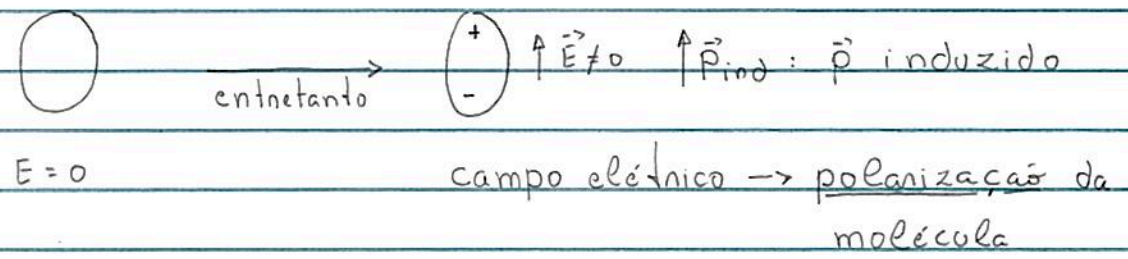
↳ $C = \kappa C_0 = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d}$: capacitância capacitor placas // ⊕ dielétrico

• dielétrico : (primeiro) tratamento microscópico,

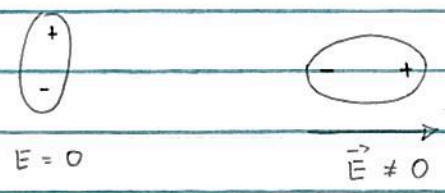
p/ dielétrico, movimento carga interior do material é restrito → Q. : Qual a origem da carga induzida na superfície ?

dielétrico pode ser constituído por

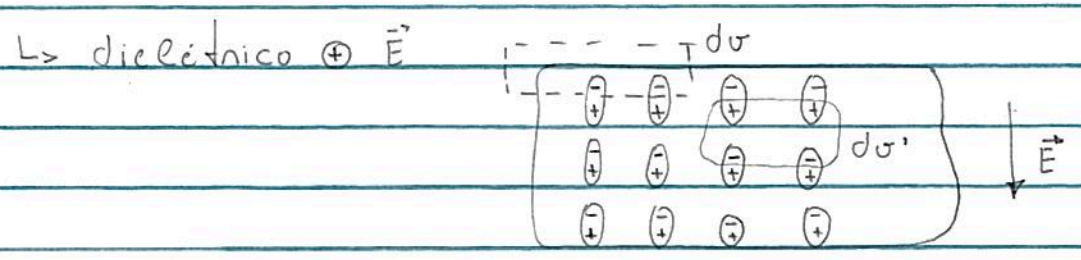
(a) moléculas apolares = momento de dipolo da molécula $\vec{p} = 0$



(b) moléculas polares = momento de dipolo molécula $\vec{p} \neq 0$.



notas (a) e (b) : $\oplus \vec{E} \rightarrow$ redistribuição (polarização) das cargas na molécula



notas : p/ volume dv' : $Q_{interior} = 0$

" " dv : $Q_{interior} \neq 0 ! \sim$ cargas induzidas

• Lei de Gauss \oplus dielétrico :

Verifica-se que

Eq. (25.2) $\rightarrow \oint_S \kappa \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{FREE}$

\hookrightarrow apenas cargas livres

Obs. : cargas c dielétrico : cargas ligadas.

Corrente elétrica

Até o momento: cargas elétricas em repouso (eletrostática)

ideia próxima etapa: considerar cargas elétricas em movimento.

ideia: corrente elétrica

vamos considerar correntes elétricas em materiais condutores

• lembrar eletrostática: $\vec{E}_{int} = 0$: campo elétrico interior condutor
 \exists elétrons livres: movimento aleatório
 \sim colisões ions

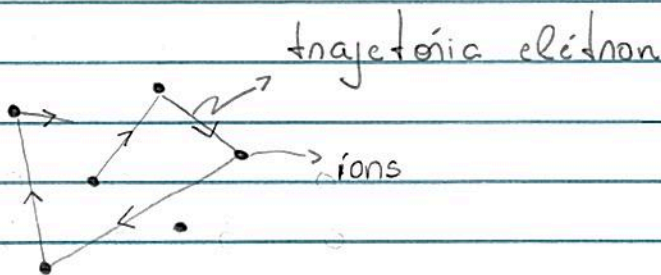
• $\oplus \vec{E} \neq 0$ interior condutor, estacionário
 $(\vec{E} \neq \vec{E}(t), \text{ i.e., cte no tempo})$

$\hookrightarrow \vec{F} = q\vec{E}$, e.g., sob elétrons:

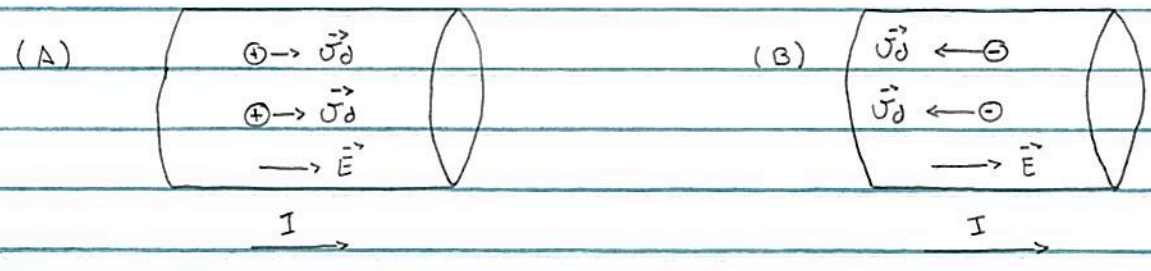
- vácuo: $V(b) \rightarrow +\infty$

- interior

condutor: $\vec{F} \oplus$ colisões ions = movimento elétrons lento (deriva) no sentido do campo \vec{E}
 $\hookrightarrow \exists$ corrente elétrica!



• corrente elétrica ~ movimento cargas positivas e/ou negativas



\vec{v}_d : velocidade de deriva cargas elétricas livres

notas (A) e (B) : movimento cargas positivas esquerda p/ direita

↳ definições :

(i) corrente elétrica I : mov. cargas positivas (convenção)

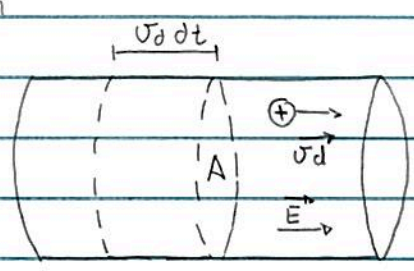
(ii) intensidade I : carga elétrica (positiva) líquida que atravessa seção transversal área A / tempo, i.e.,

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{60.1}$$

unidade :

$$[I] = 1C/s = 1A \text{ (ampere)}$$

notas



$$(60.2)$$

dQ através A em $dt = dQ$ c cilindro base A
altura $\vec{v} dt$

$$\hookrightarrow dQ = n(A\vec{v} dt)q \rightarrow I = \frac{dQ}{dt} = nq\vec{v}A \quad (61.1)$$

concentração de portadores = n
carga partícula = q
= # cargas livres/volume

$$(61.1) \rightarrow \vec{J} = \frac{I}{A} = nq\vec{v} \quad (61.1.a)$$

\hookrightarrow definição: (vetor) densidade de corrente:

$$\vec{J} = nq\vec{v} \quad (61.2)$$

notas: I : intensidade corrente elétrica: escalar
 \vec{J} : densidade " " : vetor

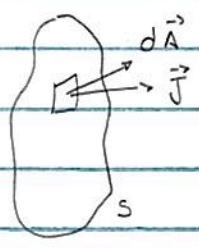
• Eq. (61.2): apenas 1 tipo portador

se \exists vários tipos de portadores $\sim \neq q_i, n_i$ e/ou $\vec{v}_{d,i}$

$$(61.2) \rightarrow \vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_{d,i} \quad (61.3)$$

• (60.2) - (61.1.a): caso particular $\vec{J} \parallel$ elemento área $d\vec{A}$

caso geral: \vec{J} not \parallel $d\vec{A}$



(61.1.a) $\rightarrow I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$ (62.1)

Interpretação (62.1): intensidade corrente elétrica $I =$
 $=$ fluxo \vec{J} através superfície S .

Eq. (62.1): permite expressar princípio conservação carga elétrica (veja pg. 3).

considerar superfície S fechada e volume V definido por S

$\hookrightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv$: equação de continuidade (62.2)

em particular, p/ corrente estacionária $\vec{J} \neq \vec{J}(t)$

$\hookrightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ (62.3)

Condutividade e resistividade

verifica-se que p/ certos materiais, em um certo intervalo de campos elétricos

$$\vec{J} \propto \vec{E}$$

ou

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (63.1)$$

• σ : condutividade do material, (propriedade do material)

σ depende : material,
temperatura,
but not \vec{E} !

interpretação (63.1) : a resposta do material (movimento de cargas $\sim \vec{J}$) é linearmente proporcional à perturbação externa (campo elétrico \vec{E})

Obs. (63.1) : σ = escalar, ou p/ materiais isotrópicos
 $\sigma = \text{cte}$, " " " homogêneos

p/ condutores $\sigma \gg 1$

p/ isolantes $\sigma \ll 1$

• é interessante definir também a resistividade do material :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (63.2)$$

Eq. (63.1) $\rightarrow \vec{E} = \rho \vec{J} \quad (63.3)$

Unidades :

$$[\rho] = \frac{[E]}{[J]} = \frac{V}{m} \cdot \frac{m^2}{A} = \frac{V}{A} \cdot m \equiv \Omega \cdot m$$

Ω : ohm

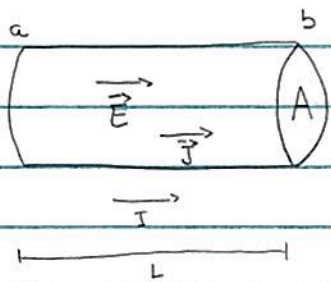
$$\hookrightarrow [\sigma] = (\Omega \cdot m)^{-1}$$

• Eqs. (63.1) and (63.3) : Lei de Ohm

• condutor ôhmico : condutor que obedece a lei de Ohm !

• ideia : expressar Eqs. (63.1) e/ou (63.3) em termos V e I
(quantidades obtidas LAB.)

Considere condutor, área seção transversal $A = cte$,
 $\rho = cte$



$$V \equiv V_a - V_b > 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Como } I = JA \\ V = EL \end{array} \xrightarrow{(63.3)} \begin{array}{l} E = \rho J \\ \frac{V}{L} = \frac{\rho I}{A} \end{array}$$

$$\hookrightarrow V = \underbrace{\left(\frac{\rho L}{A} \right)}_{\equiv R} I = RI \tag{64.1}$$

R : resistência do material

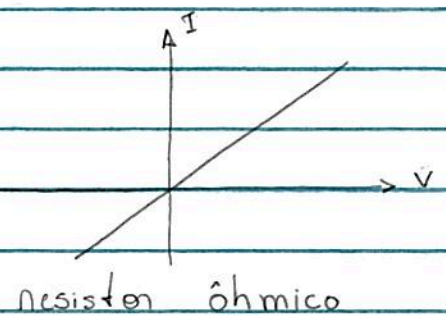
unidade [R] : Ohm

Eq. (64.1) : $R = \frac{\rho l}{A}$: relação resistência e resistividade

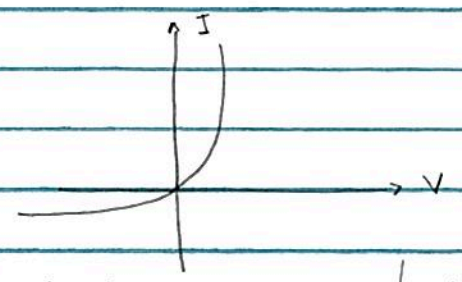
$R = \frac{V}{I}$: definição geral
resistência (inclui materiais não ôhmicos)

Definição resistor : dispositivo c/ valor resistência definido

Ex. :



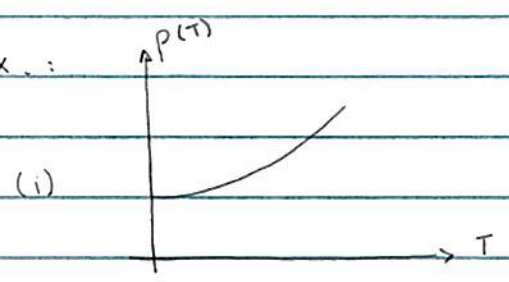
resistor ôhmico



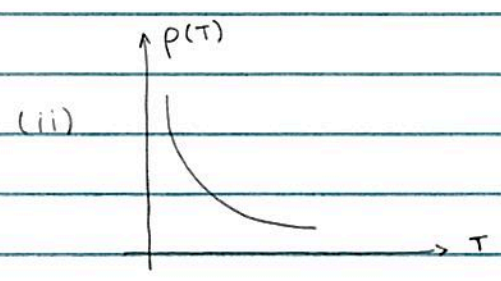
diodo (semicondutor)
dispositivo não ôhmico

• resistividade ρ (ou resistência R) de um material pode variar c/ a temperatura

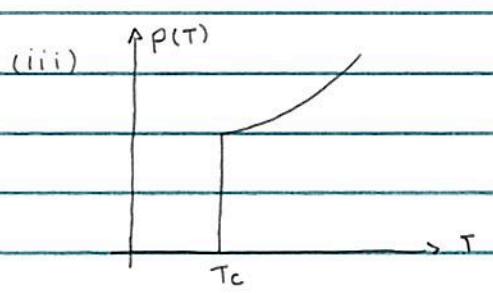
Ex. :



metal : $\rho \propto T$



semicondutor : $\rho \propto 1/T$

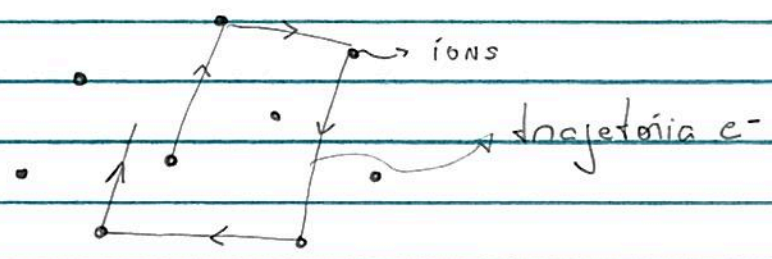


supercondutor : $\rho = 0, T < T_c$

T_c : temperatura crítica.

• sobre a condutividade em metais,
 primeiro modelo microscópico (clássico) : modelo de ^{Druede}
 elétrons livres : gás de elétrons ~ teoria cinética
 dos gases
 processos de espalhamento ~ colisões elétrons - íons

$\vec{E} = 0$: movimento aleatório elétrons ~ colisões íons



$\vec{E} \neq 0$: movimento aleatório \oplus $\vec{F} = q\vec{E}$

definição τ : intervalo de tempo médio entre colisões

$\hookrightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\tau = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m}\tau$: velocidade $e^- \Delta t = \tau$

\vec{v}_0 : velocidade inicial
 m : massa elétron

\hookrightarrow velocidade média \vec{v}_{AV} elétrons:

$$\vec{v}_{AV} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\underbrace{\vec{v}_0}_0 + \frac{q\vec{E}}{m}\tau) = \frac{q\vec{E}}{m}\tau = \vec{v}_d$$

= 0 ~ movimento aleatório

Eqs. (61.2) e (63.3):

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d = nq\left(\frac{q\tau}{m}\vec{E}\right) = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

como $q = -e$

↳ $\rho = \frac{m}{ne^2\tau}$: resistividade metal em termos (67.1)
quantidades microscópicas: m, e, τ !

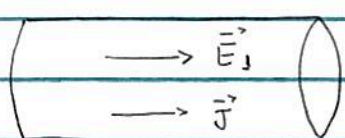
Força eletromotriz (emf)

• Vimos que \exists campo elétrico $\vec{E}_{int} \neq 0$ interior condutor \rightarrow corrente elétrica

\hookrightarrow Q: Como estabelecem \vec{E}_{int} ?

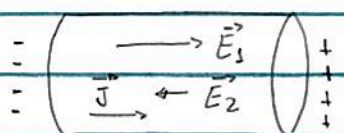
A: Adiciona condutor a um circuito elétrico !

• consideramos condutor \notin circuito elétrico.



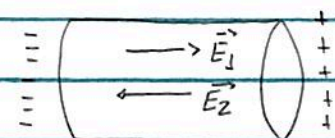
$t = 0$

$\vec{E}_1 \neq 0$ e $\vec{J} \neq 0$



$t_1 > 0$

$\vec{E}_2 \neq 0 \sim \exists \vec{J}$
 $\hookrightarrow \vec{E}_{TOTAL} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$



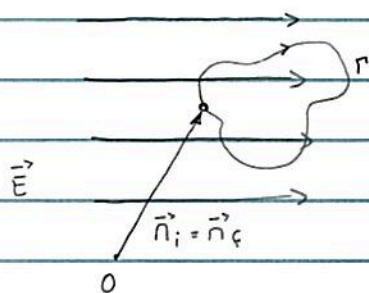
$0 < t_1 < t_2$

$\vec{J} = 0$ pois
 $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$

notas $\vec{J} \neq 0 \rightarrow \vec{E}_2 \neq 0 \rightarrow \vec{J} = 0$ p/ $t > t_2$

\sim cargas nas extremidades condutor

• consideramos carga elétrica q , sob campo elétrico $\vec{E} \neq \vec{E}(t)$; movimento caminho fechado Γ :



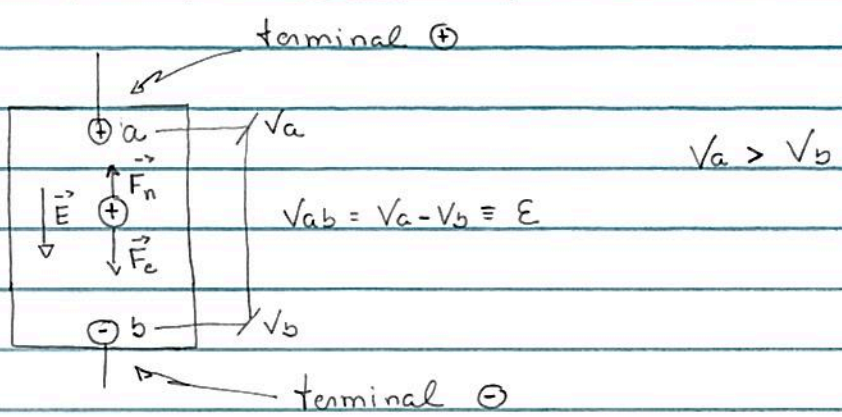
$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0$

notas: Como $\vec{n}_{inicial} = \vec{n}_{final} \rightarrow v_{inicial} = v_{final}$

• entrando em um condutor (e.g., metal, resistência R) à medida que a carga q se movimenta, V diminui

↳ circuito elétrico deve possuir elemento (dispositivo) que aumente V : fonte força eletromotriz (emf)
Ex.: bateria

• representação fonte ideal emf :



notas :

(i) campo \vec{E} → força eletrostática $\vec{F}_e = q\vec{E}$ → carga V_a p/ V_b elétrico \vec{E}

(ii) força \vec{F}_n (origem não eletrostática) → mov. carga V_b → V_a

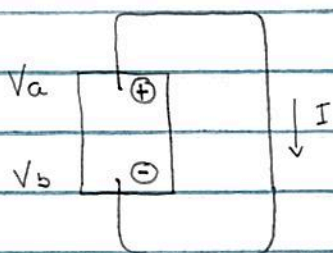
p/ fonte ideal : $\vec{F}_e = -\vec{F}_n$

↳ velocidade carga cte = $\Delta E_{cinética} = W_{TOTAL} = 0$!

entrando $\Delta U > 0 \sim \vec{F}_n$:

$$W_n = q \vec{F}_n = q V_{cb} \equiv q E \quad \rightarrow \quad E = V_{ab} \quad (69.1)$$

Considerar fonte emf \oplus condutor resistência R



notas : sentido corrente I
através fonte emf

p/ emf : $E = V_{ab}$

p/ condutor : $V_{ab} = RI \rightarrow E = V_{ab} = RI$: fonte ideal (70.1)

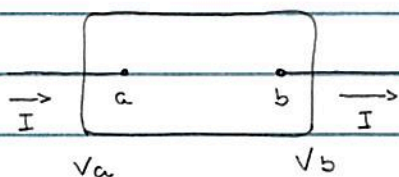
notas Eq. (69.1) : $E = \frac{W}{q}$: fonte emf = fonte de energia/carga p/ circuito

• fonte real emf : elementos internos efeitos
dispositivo \sim dissipativos

hipótese : elementos internos : ôhmicos
 \hookrightarrow efeitos dissipação \sim resistência interna r

\hookrightarrow Eq. (69.1) : $V_{ab} = E - rI$ (70.2)

• considerar o dispositivo



$(\Delta U)_{\text{carga}} = qV_{ba} = q(V_b - V_a)$: variação energia potencial carga q que atravessa dispositivo

$\hookrightarrow \Delta U = q V_{ab} = q (V_a - V_b)$: energia transferida/netinada para/do dispositivo

como $q > 0$, se $V_{ab} > 0 \rightarrow \Delta U > 0$: energia transferida p/ dispositivo

$V_{ab} < 0 \rightarrow \Delta U < 0$: energia netinada do dispositivo

p/ intervalo de tempo dt :

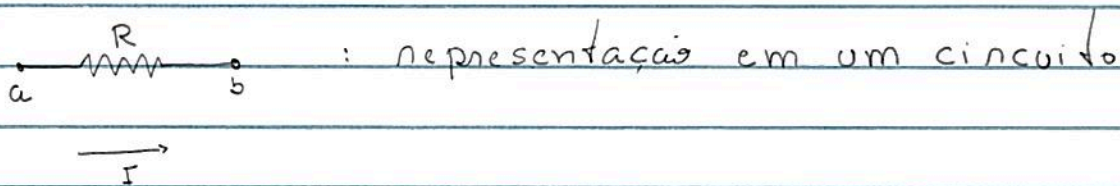
$$\begin{aligned} dq &= I dt & \rightarrow & P = \frac{dW}{dt} = V_{ab} I : \text{potência adicionada/} & (71.1) \\ dW &= V_{ab} dq & & \text{netinada dispositivo} \end{aligned}$$

notas :

$$[P] = [V][I] = \frac{J}{C} \cdot \frac{C}{s} = \frac{J}{s} = W \text{ (Watt)}$$

Ex.:

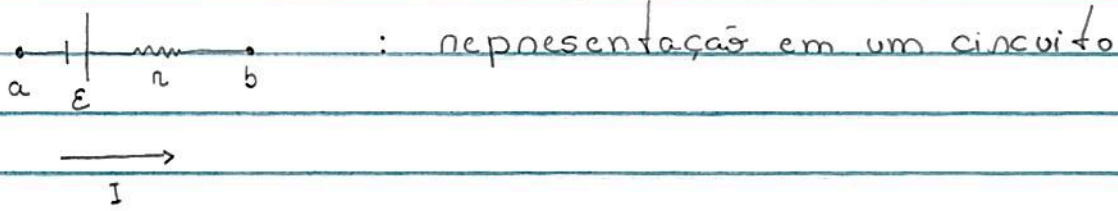
(1) resistor



$$\text{como } V_{ab} = RI \xrightarrow{(71.1)} P = RI^2 = \frac{V_{ab}^2}{R} \quad (71.3)$$

Como $V_{ab} > 0 \rightarrow (71.3)$: potência transferida p/ resistor que é dissipada na forma de calor (efeito Joule)

(ii) fonte (necl) cmf :



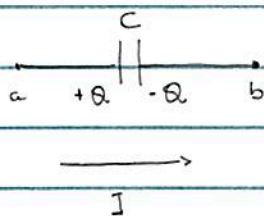
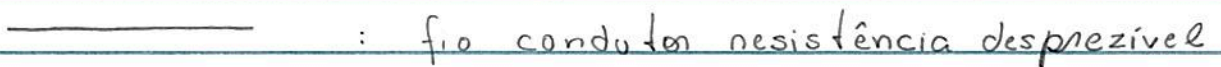
Como $V_{ab} = \epsilon - rI$ $\xrightarrow{(71.1)}$ $P = \epsilon I - r^2 I$ (72.1)

Como $V_{ab} < 0 \xrightarrow{(72.1)}$: potência transferida da fonte p/ o circuito

• Ideia circuito elétrico : conjunto elementos (dispositivos) conectados por elementos de resistência nula.

além de resistores e fontes, podemos ter os dispositivos

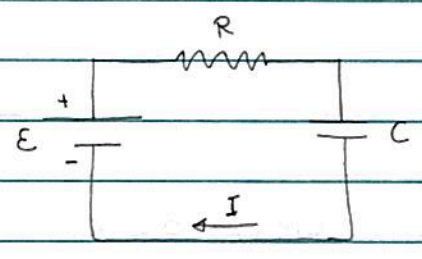
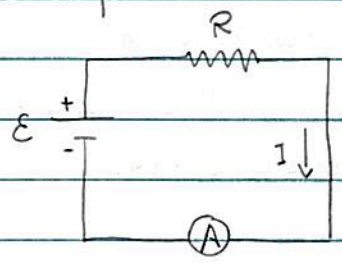
representação :



: capacitor capacitância C

↳ Lembre-se : dispositivo que armazena carga/energia eletrostática

Exemplos :



Obs. : medidas :

—(A)— : amperímetro : intensidade I

—(V)— : voltímetro : diferença potencial entre 2 plos.

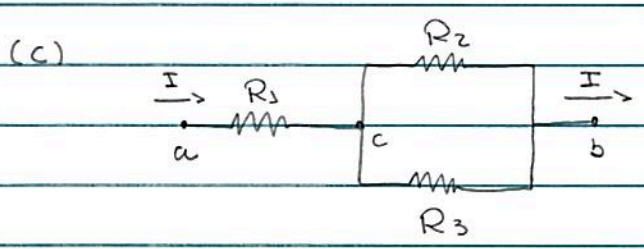
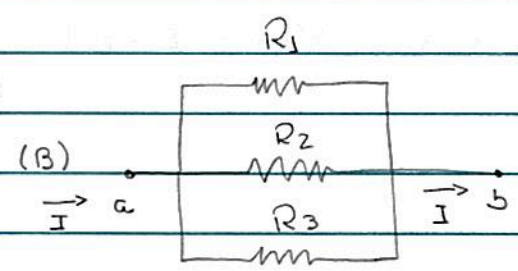
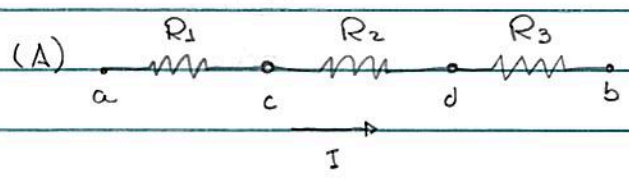
• foco : circuitos de corrente direta (dc) = circuitos cuja direção da corrente não se altera no tempo

• métodos de análise circuito :

- (i) determinação resistência equivalente R_{eq}
- (ii) regras de Kirchhoff

(i) sobre R_{eq} ,

considerar os circuitos



ideia: substituir R_1, R_2 e R_3 por único R_{eq} !

notar: (A) : associação em série de resistores

(B) : " " " paralelo " "

(C) : combinação associações série e paralelo

• considerar (A),

notar: mesma I através $R_{1,2,3}$

$$L > V_{ac} = R_1 I \quad V_{cd} = R_2 I \quad V_{db} = R_3 I$$

$$\text{como } V_{ab} = V_{ac} + V_{cd} + V_{db} = \underbrace{(R_1 + R_2 + R_3)}_{\equiv R_{eq}} I$$

caso geral, N resistores

$$\text{em série : } R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

• considerar (B),

notar: $R_{1,2,3}$ sob mesma V_{ab}

$$L > V_{ab} = R_1 I_1 \quad V_{ab} = R_2 I_2 \quad V_{ab} = R_3 I_3$$

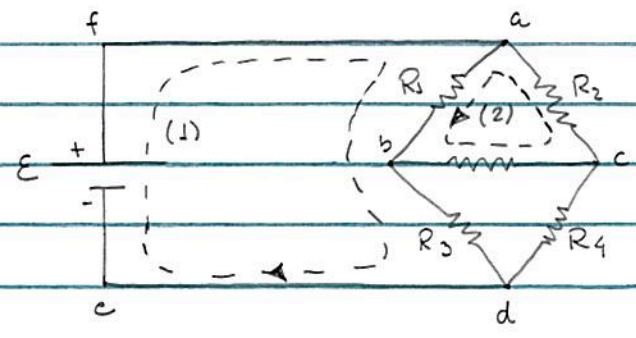
como $I = I_1 + I_2 + I_3$ (conservação carga e elétrica)

$$L > I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) V_{ab} \equiv \frac{V_{ab}}{R_{eq}}$$

$$\text{caso geral, } N \text{ resistores} \\ \text{em paralelo : } \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

(ii) sobre regras Kirchhoff

considerar o circuito:



Definição: nós (junctions): nós a, b, c, d

malhas (closed loops): caminhos (1) e (2)

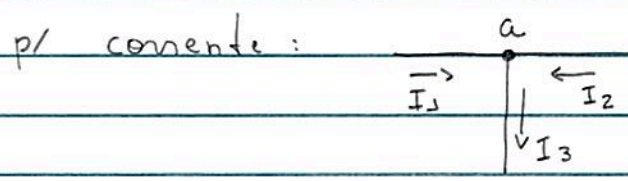
Obs.: nós e e f não são nós!

↳ regras de Kirchhoff:

(A) $\sum_{\text{nó}} I = 0$ ~ conservação carga
 ↳ soma algébrica

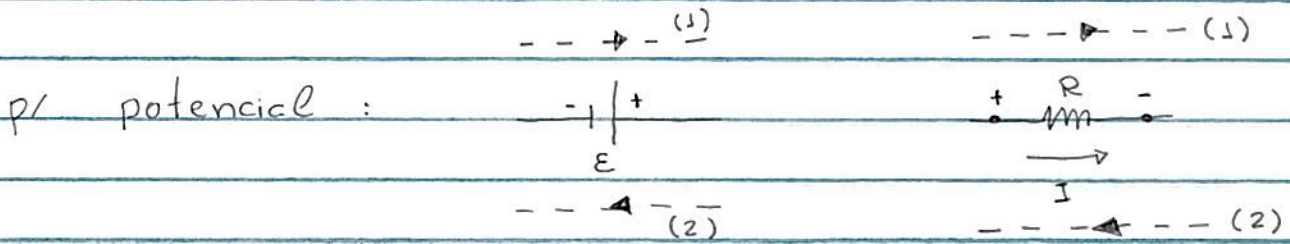
(B) $\sum_{\text{malha}} V = 0$ ~ conservação energia eletrostática

• soma algébrica → necessário introduzir convenções
 Sinais I e V

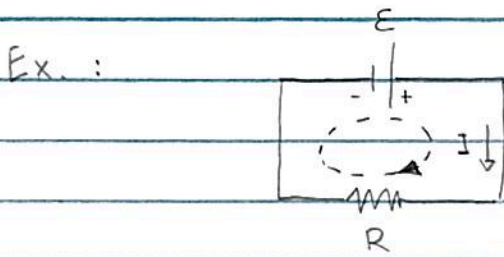


convenção: $I_1, I_2 > 0$
 $I_3 < 0$

$\hookrightarrow \sum I = I_1 + I_2 - I_3 = 0$
 nóa



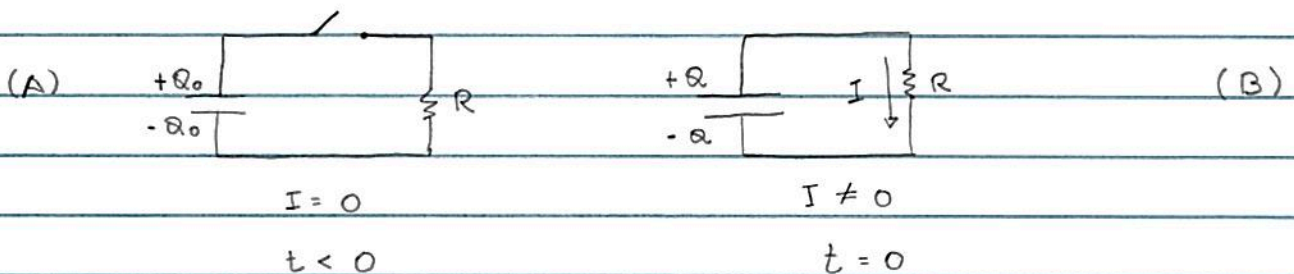
malha (1) :	+ E	- RI
" (2) :	- E	+ RI



$\sum V = +E - RI = 0 \rightarrow E = RI !$

Ex. 1 : circuito RC

considera capacitor capacitância C, carga Q_0 ;
 determina $Q = Q(t)$ e $I = I(t)$



pr/ capacitor : $Q = CV$

$\sum V = 0 \rightarrow \frac{Q}{C} - RI = 0$
 malha

Como: $I = - \frac{dQ}{dt}$ (77.1)

cuidado sinal ~ processo descarga capacitor

$L \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = 0$: eq. diferencial 1ª ordem

Solução: $\int_{Q_0}^Q \frac{dQ'}{Q'} = - \frac{1}{RC} \int_0^t dt'$

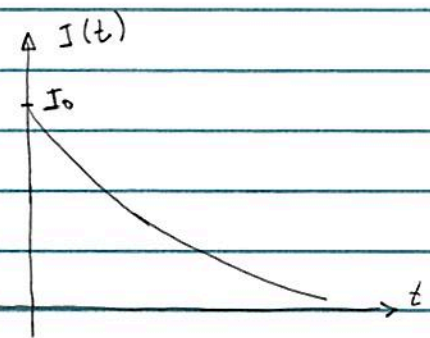
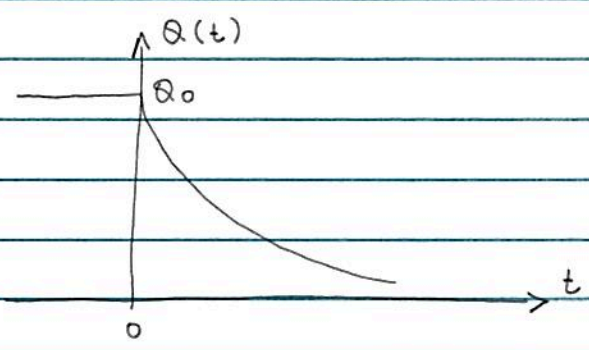
$L \ln \frac{Q}{Q_0} = - \frac{t}{RC} \rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ (77.2)

$\tau \equiv RC$: tempo de relaxação circuito RC (escala de tempo característica do sistema)

Como $I = - \frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau} \equiv I_0 e^{-t/\tau}$, $t > 0$ (77.3)

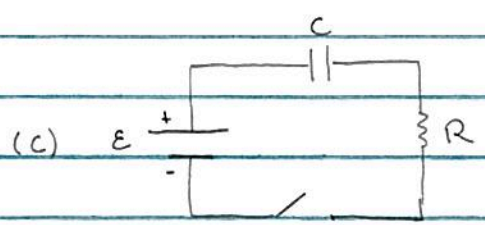
notas:

$[Z] = [R][C] = \frac{[V]}{[I]} \cdot \frac{[Q]}{[V]} = \frac{[Q]}{[I]} = s$, OK!

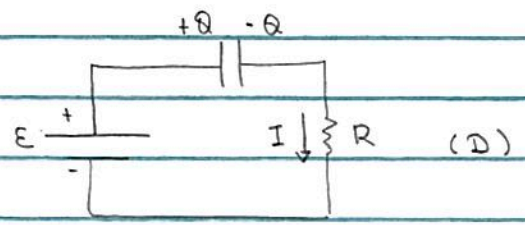


Ex. 2 : circuito RC ⊕ fonte

Considerar capacitor capacitância C, carga Q = 0 ;
determinar Q = Q(t) e I = I(t)



t < 0
Q = 0



$\sum_{\text{malha}} v = 0 \rightarrow E - \frac{Q}{C} - RI = 0$

Como $I = + \frac{dQ}{dt}$ cuidado sinal ~ processo carga capacitor (78.1)
(comparar sentido I através C nas Figs. (B) e (D))

$\hookrightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC} Q = \frac{E}{R}$: eq. diferencial 1ª ordem

Solução : $\frac{dQ}{dt} = - \frac{1}{RC} (Q - CE) \rightarrow \int_0^Q \frac{dQ'}{Q' - CE} = \int_0^t - \frac{dt'}{\tau}$

$\hookrightarrow \ln \left(\frac{CE - Q}{CE} \right) = - \frac{t}{\tau} \rightarrow Q(t) = CE (1 - e^{-t/\tau})$ (78.2)
 $\equiv Q_{\text{final}} (1 - e^{-t/\tau})$

Como $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CE}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \equiv I_0 e^{-t/\tau}$ (78.3)

notas:

- Ex. 1 e 2 : sentido da corrente não se altera para $t > 0$:
circuito de
intensidade $I = I(t)$:

- Eq. (77.3) : $I(t=0) = I_0 = \frac{1}{R} Q_0 = \frac{V_0}{R}$ diferença de potencial inicial capacitor

- Eq. (78.2) : $Q(t \rightarrow +\infty) = CE = Q_{\text{final}}$, OK pois
 $t \rightarrow +\infty \rightarrow I = 0 \rightarrow V_{\text{capacitor}} = E$

- Eq. (78.3) : $I(t=0) = I_0 = \frac{E}{R}$, OK pois

$$t=0 \rightarrow Q_{\text{capacitor}} = 0 \rightarrow V_{\text{RESISTOR}} = E !$$

Exercício : considerar Ex. 3 e calcular;

$U_c = U_c(t)$: energia armazenada capacitor,

$U_r = U_r(t)$: " dissipada resistor.

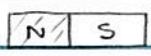
Magnetismo

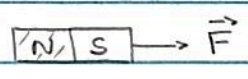
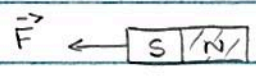
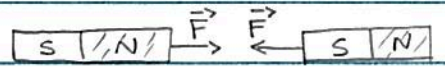
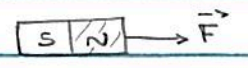
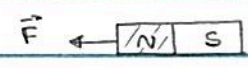
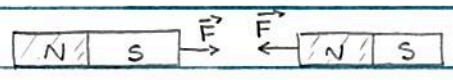
• 1ª observações (Grécia antiga):

• ∃ magnetos permanentes (ímãs)

• atração / repulsão entre magnetos permanentes

↳ ∃ polos magnéticos: polo norte (N)
polo sul (S)

↳ representação barra magneto: 



polos iguais: repulsão
" ≠ : atração

~ eletrostática

* entretanto: ≠ eletrostática, ∃ monopolo magnético não é observado!



↓ → quebra barra



• Oersted (1820):

Observação: deflexão agulha bússola por fio c/ corrente I

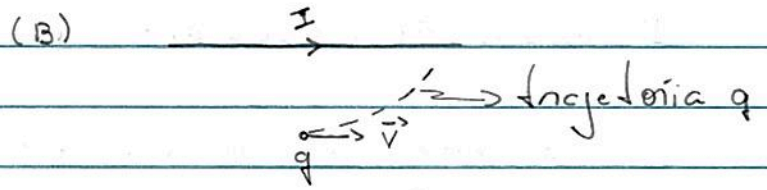
↳ relação entre cargas em movimento e magnetismo

considerar fio \oplus corrente elétrica I e carga $q > 0$,
verifica-se que:

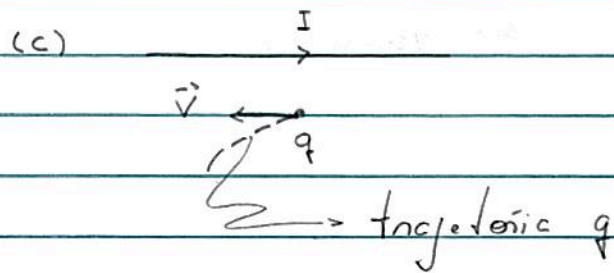


carga q em repouso

\neq interações



\vec{v} : velocidade q



notas:

(A): ok c/ eletrostática

(B) e (C): not ok " " \rightarrow \exists outro tipo campo:
campo magnético

• Lembrar eletrostática:

carga Q em repouso \rightarrow campo elétrico \vec{E} \rightarrow força $\vec{F}_E = q\vec{E}$
ou distribuições de cargas (repouso) sob carga q

• veremos que, magnetismo:

carga Q em movimento \rightarrow campo magnético \vec{B} \rightarrow força \vec{F}_B sob
ou corrente elétrica I carga q em movimento /
corrente I'

* notas: relação campo magnético, força magnética \Leftrightarrow cargas em movimento

• estudo magnetismo, 2 partes I e II

• definição campo magnético \vec{B} ,

lembra eletrostática: campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ pode ser determinado através da força \vec{F}_E que atua sob carga q , pois $\vec{F}_E = q\vec{E}$.

Campo magnético \vec{B} : procedimento similar

considerar carga q , velocidade \vec{v} , sob campo magnético \vec{B} ; verifica-se que

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad : \quad \text{força magnética sob carga } q \text{ em movimento} \quad (82.1)$$

ou
campo magnético $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ é tal que força sob carga q , posição \vec{r} , velocidade \vec{v} é dada por (82.1).

unidade B (SI):

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = \frac{N}{A \cdot m} = 1T \text{ (tesla)}$$

Ex.: campo magnético Terra $\sim 10^{-4} T \equiv 1 G$ (gauss)

" " máximo LAB $\sim 45 T$

• caso geral, partícula carga q , velocidade \vec{v} , sob campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} :

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$: Lei de Lorentz (83.1)

notas:

$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + \underbrace{q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$

↳ campo \vec{B} não realiza W sob $q \sim \vec{F}_B \perp \vec{v}$

Obs.:

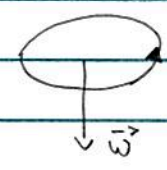
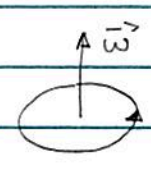
(i) campo magnético \vec{B} : campo vetorial $\sim \vec{E}$

(ii) entretanto : \vec{E} : vetor polares (como $\vec{r}, \vec{v}, \vec{F}$)

\vec{B} : vetor axial (como vel. angular $\vec{\omega}$)

vetor axial : sentido determinado por uma convenção

Ex.: velocidade angular $\vec{\omega}$




: possíveis escolhas!

Ref.: vol. 1, Nussenzveig.

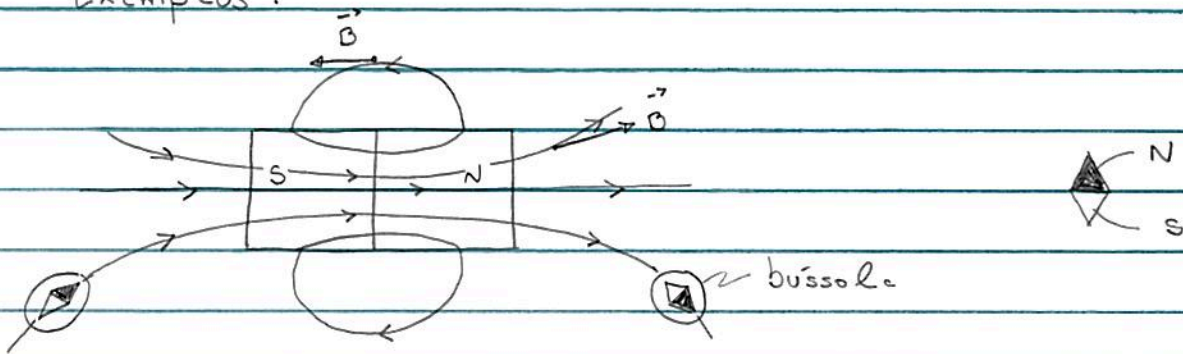
• Linhas de campo

~ eletrostática (veja pg. 15)

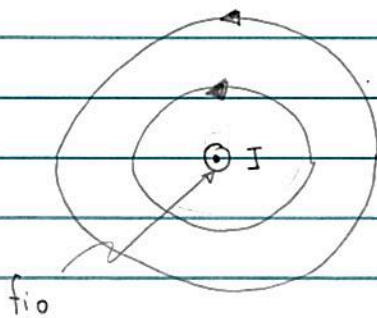
ideia : 

lembrar : densidade linhas de campo \propto intensidade \vec{B}

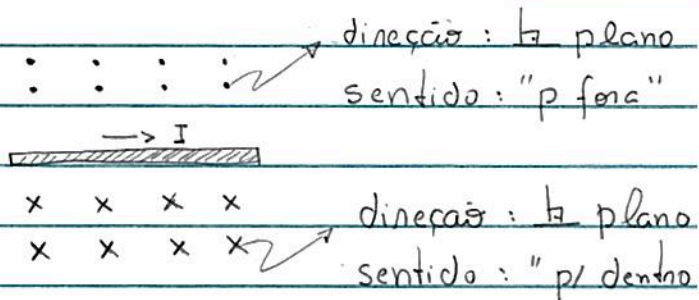
Exemplos :



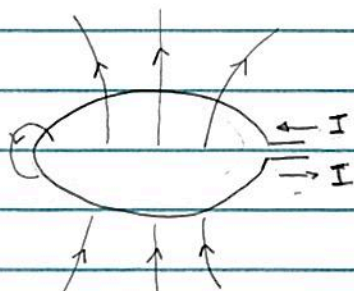
fio \oplus corrente I



ou



espina (anel)

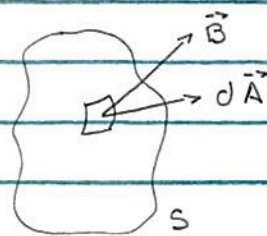
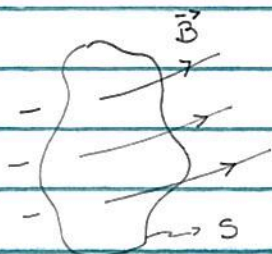


notas : linhas campo \vec{B} são fechadas \neq campo \vec{E}

~ ∇ monopolo magnético

• Fluxo campo magnético,

consideramos $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ e superfície S ,



de modo análogo ao campo elétrico, Eq. (23.1), temos

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad ; \quad \text{fluxo campo } \vec{B} \quad (85.1)$$

através superfície S

Unidade Φ_B (SI) :

$$[\Phi_B] = [B] \cdot [A_{\text{area}}] = T \cdot m^2 = \frac{N \cdot m}{A} = \text{Wb (weber)}$$

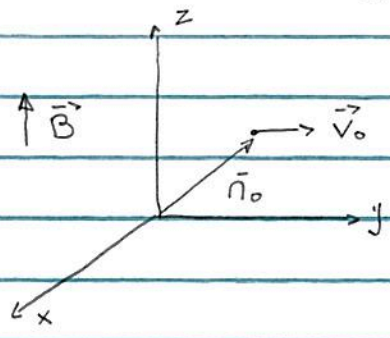
em particular, p/ superfície fechada S ,

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (85.2)$$

Eq. (85.2) \sim monopolo magnético não é observado!

Obs. : Eqs. (25.2) e (85.2) : 2 das Eqs. de Maxwell!

Ex.1: considerar carga q sob campo magnético uniforme $\vec{B} = B \hat{z}$; determinar trajetória carga q.



Condições iniciais: $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$
 $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$

2ª Lei Newton ⊕ Eq. (83.1):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B} = q (v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \times B \hat{z}$$
$$= qB (v_y \hat{x} - v_x \hat{y})$$

$$\hookrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = qB (v_y \hat{x} - v_x \hat{y})$$

em termos

Componentes:

$\hat{x} : m \dot{v}_x = qB v_y$	} sistema eqs. (86.1) diferenciais p/ $v_\alpha = v_\alpha(t); \alpha = x, y, z$
$\hat{y} : m \dot{v}_y = -qB v_x$	
$\hat{z} : m \dot{v}_z = 0$	

definição: $\dot{v}_\alpha = \frac{dv_\alpha}{dt}$

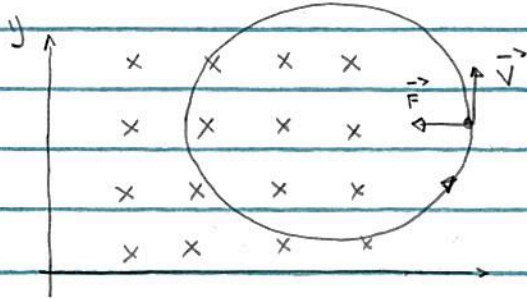
notar direção \hat{z} : $\dot{v}_z = 0 \rightarrow v_z = cte = v_{0,z}$: mov. uniforme

Obs.: solução (86.1) não será discutida em detalhes!

sol. (86.1) $\rightarrow \vec{r} = \vec{r}(t)$: trajetória carga q.

hipótese: $\vec{v}_0 = v_{0,x} \hat{x} + v_{0,y} \hat{y}$; $q > 0$

$$L \rightarrow \vec{v} \perp \vec{B} \rightarrow F_B = qvB$$



como $\vec{v} \perp \vec{F}_B \rightarrow \vec{F}_0$: força centrípeta
trajetória partícula = círculo raio R

$$\text{como } \frac{mv^2}{R} = qvB \rightarrow R = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_0}{qB} \quad (87.1)$$

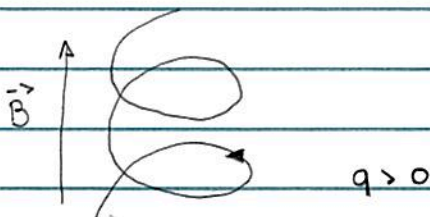
notas (87.1): relação entre o raio orbital e os parâmetros do sistema: m, q, v_0 e B

como $\vec{v} \perp \vec{F}_B \rightarrow |\vec{v}| = v_0 = \text{cte}$

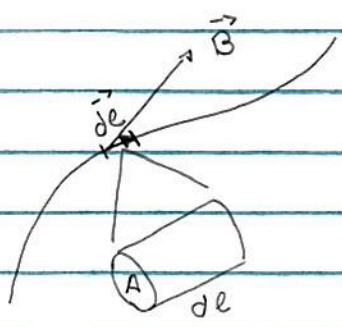
como $T = \frac{2\pi R}{v}$: período mov. circular

$$L \rightarrow \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \omega = \frac{v}{R} = \frac{v}{mv} qB = \frac{qB}{m} : \text{frequência ciclotrônica}$$

Obs.: se $v_{0,z} \neq 0 \rightarrow$ trajetória carga = hélice



Ex. 2 : Considera fio ⊕ corrente elétrica I sob \vec{B} ;
determina \vec{F}_B fio.



considera : comprimento infinitesimal dl , área seção transversal A

Eq. (83.1) : $d\vec{F}_B = dq \vec{v}_d \times \vec{B}$
↳ velocidade deriva , hipótese $dq > 0$!

como $dq = nq A dl$ densidade de carga = # cargas livres / volume
e $\vec{v}_d = v_d \hat{v}_d$

↳ $d\vec{F}_B = \underbrace{(nqv_d)}_J A \underbrace{(dl \hat{v}_d)}_{\equiv d\vec{l}} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ (88.1)

veja pg. 61

Eq. (88.1) : força devido \vec{B} sob segmento de fio

notas direção e sentido $d\vec{l} =$ direção e sentido \hat{v}_d !

notas : p/ circuito fechado Γ (corrente estacionária) :

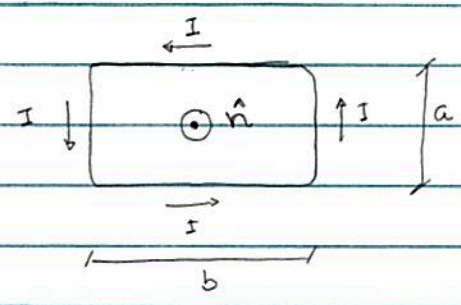
$$\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

hipótese : \vec{B} uniforme

$$\hookrightarrow \vec{F} = I \left(\oint_C d\vec{e} \right) \times \vec{B} = 0 : \vec{F}_B \text{ sob circuito fechado é nula}$$

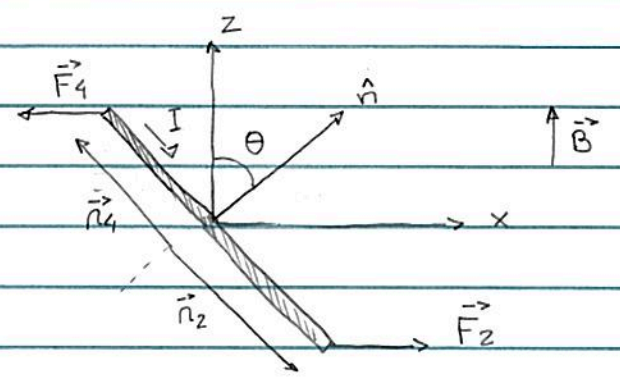
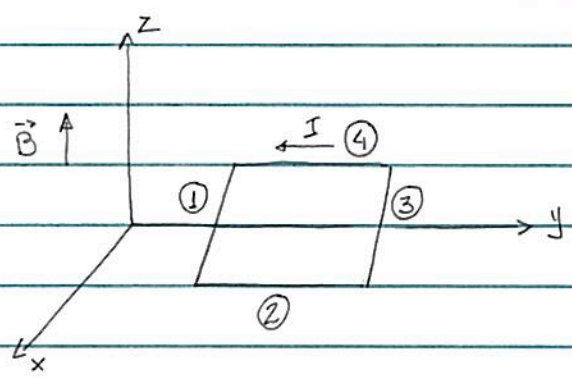
entretanto, torque sob circuito fechado devido \vec{B} é $\neq 0$!

Ex. 3 : consideramos circuito retangular \oplus corrente I sob \vec{B} uniforme; determinamos torque $\vec{\tau}$ sob circuito devido \vec{B}



notas : sentido corrente e sentido \hat{n} .

hipótese : $\vec{B} = B \hat{z}$



(VISTA LATERAL)

\vec{F}_i : força sob segmento $i = 1, 2, 3, 4$.

Eq. (88.1) $\rightarrow \vec{F}_1$ e $\vec{F}_3 \parallel \hat{j} \rightarrow \vec{\tau} = 0$ w.r.t. eixo \hat{j}
 \vec{F}_2 e $\vec{F}_4 \parallel \hat{x} \rightarrow \neq 0$ " " "

$$\text{Eq. (88.1)} : \vec{F}_2 = I \int_{\text{②}} d\vec{e} \times \vec{B} = I \int_{\text{②}} dl \hat{y} \times B \hat{z} = IBb \hat{x}$$

$$\vec{F}_4 = I \int_{\text{④}} d\vec{e} \times \vec{B} = I \int_{\text{④}} (-dl \hat{y}) \times B \hat{z} = -IBb \hat{x}$$

$$\text{como } \vec{n}_2 = \frac{1}{2} a (\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{z})$$

$$\vec{n}_4 = \frac{1}{2} a (-\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{z})$$

$$\hookrightarrow \vec{\tau} = \vec{n}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{n}_4 \times \vec{F}_4$$

$$= \frac{1}{2} IBab \left((\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{z}) \times \hat{x} - (-\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{z}) \times \hat{x} \right)$$

$$= IBab \sin \theta \hat{y}$$

Definição: $\vec{\mu} = I \vec{A}$: momento de dipolo magnético (90.1)

$$\text{onde } \vec{A} = A \hat{n} = (ab) \hat{n}$$

$$\hookrightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} : \text{torque sob circuito devido } \vec{B} \quad (90.2)$$

Lembrar: momento dipolo elétrico \vec{p} sob campo elétrico
uniforme \vec{E} (veja pg. 19):

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \text{e} \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Devido às analogias $\rightarrow U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$: energia potencial (90.3)
 $\vec{\mu}$ sob \vec{B}