

## Campos magnéticos produzidos por correntes elétricas

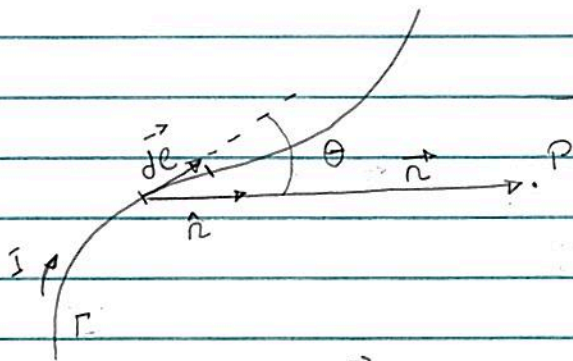
Lembrar ideia magnetismo (pg. 81)

Carga  $q$  em movimento ou corrente elétrica  $I$   $\rightarrow$  campo magnético  $\vec{B}$   $\rightarrow$  força  $F_B$  sob carga  $q$  em movimento / corrente  $I'$

Parte II Parte I

Parte II :

considerar circuito  $\Gamma$  percorrido por corrente estacionária  $I$ ; verifique-se que (experimento) campo magnético  $\vec{B}$  no pto  $P$  devido a  $I$  :



$$d\vec{B} = \kappa \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{n}}{r^2} \quad : \text{contribuição} \quad (91.1)$$

$\sim d\vec{\ell}$

$$\hookrightarrow \vec{B} = \kappa \int_{\Gamma} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{n}}{r^2} \quad (91.2)$$

$\kappa > 0$  : cte.

valor numérico depende do sistema de unidades

SI :

permeabilidade magnética do vácuo

$$k \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} = 10^{-7} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2}$$

veja pg. 82

Eq. (91.2) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} I d\vec{e} \times \frac{\hat{n}}{r^2} \quad : \text{Lei de Biot-Savart} \quad (92.1)$$

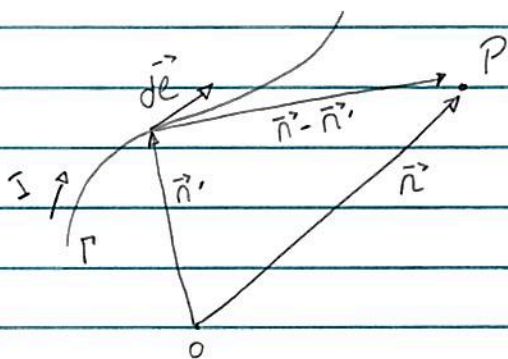
notas (1) definições dos vetores  $d\vec{e}$  e  $\hat{n}$  !

$$(2) \text{ como } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \quad (\text{pg. 6})$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad : \text{velocidade da luz} \quad (92.2)$$

Exercício : verificar unidades (92.2)

Obs. : Eq. (92.1) em detalhes, incluindo origem sistema referência



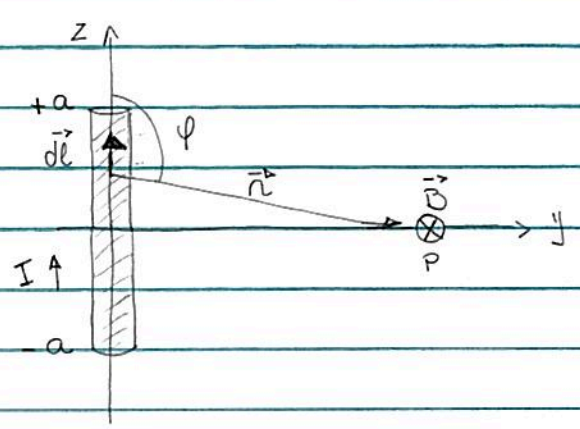
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} I d\vec{e} \times \frac{\hat{u}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (92.3)$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Resumo: Eletrostática : cargas elétricas em repouso  $\rightarrow \vec{E}(\vec{r})$

Magnetostática : correntes elétricas estacionárias  $\xrightarrow{\text{FONTES}} \vec{B}(\vec{r})$

Ex. 1 : Considerar fio retilíneo  $\oplus$  corrente  $I$  ;  
determinar campo magnético  $\vec{B}$ .



comprimento fio  $2a$

caso particular :  $\vec{B} = \vec{B}(0, y, 0)$

Eq (93.1) : como  $d\vec{l} = dz \hat{z}$  e  $\vec{r}$  C plano  $y-z \rightarrow d\vec{l} \times \hat{r} \propto -\hat{x}$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \phi}{4\pi r^2}$$

como  $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}$

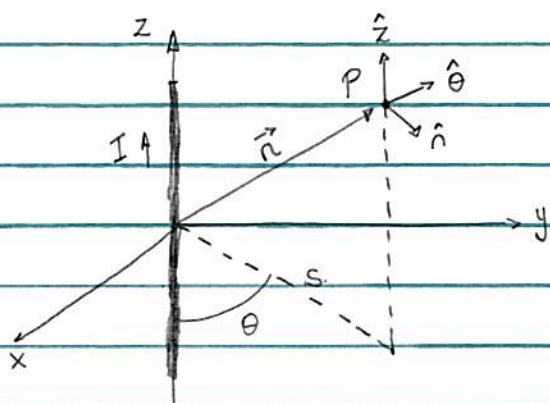
$$\hookrightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{y dz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\hookrightarrow B = \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{dz}{(y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{y \sqrt{y^2 + a^2}} \quad (93.1)$$

em particular, p/ fio  $\infty$ :

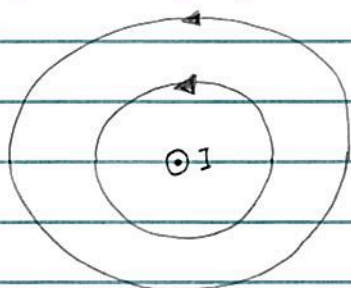
$$(93.1) \quad \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \quad (94.1)$$

nesse caso, devido à simetria do sistema, é útil utilizar coordenadas cilíndricas:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\theta} \quad (94.2)$$

Linhas de campo = círculos centro = fio



notas: simetria linhas de campo

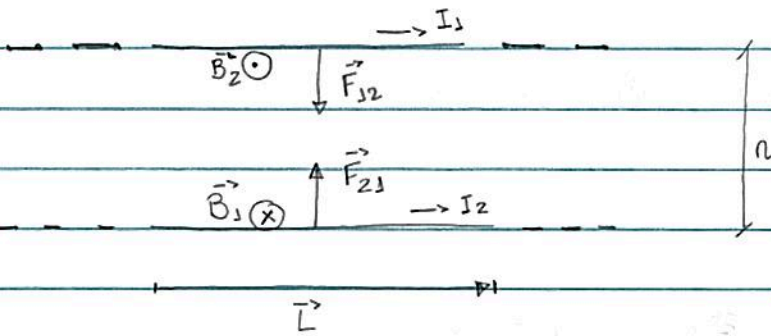
" " " fechadas  $\sim \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

(veja pg. 85)

• Eqs. (88.2)  $\oplus$  (94.2)  $\rightarrow$  determinar interações entre fios percorridos por correntes!

considerar comprimento  $L$  2 fios  $\oplus$  correntes  $I_1$  e  $I_2$ ;

hipótese:  $I_1$  e  $I_2$  sentidos =;  $I_1 \parallel I_2$



$$\text{Eq. (88.2)} : \vec{F}_{21} = I_2 \int_L d\vec{\ell} \times \vec{B}_1 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1$$

$$\text{Eq. (94.2)} \oplus \vec{L} \parallel \vec{B}_1$$

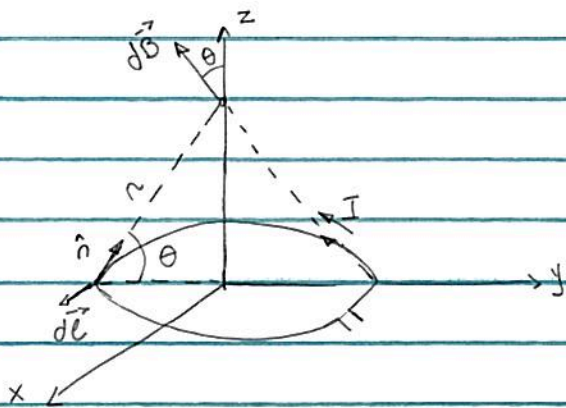
$$\hookrightarrow F_{21} = I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a}$$

$$\text{De modo análogo: } F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a}$$

notas Fig.:

$I_1$  e  $I_2$  sentidos =  $\rightarrow$  interação atrativa  
 " " " " opostos " " repulsiva

Ex. 2: considerar anel circular, raio  $a$   $\oplus$  corrente  $I$ ;  
determinar campo magnético  $\vec{B}$  devido anel.



anel  $\subset$  plano  $xy$

caso particular  $\vec{B} = \vec{B}(0,0,z)$

notas:  $p \perp d\vec{e}$ ,  $d\vec{e} \perp \hat{n}$

por simetria, apenas componente  $\hat{z}$  é não nula

Eq. (95.1):

$$dB_z = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} dl$$

como  $r = \sqrt{a^2 + z^2}$  e  $dl = a d\phi$

$$\hookrightarrow B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \int \frac{d\phi}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2\mu_0}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} (I\pi a^2)$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{2\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} (I\pi a^2 \hat{z}) \quad (96.1)$$

$= \vec{\mu}$  : momento dipolo  
magnético : Eq. (90.1)

hipótese  $z \gg a$ ,

como  $(a^2 + z^2)^{-3/2} = z^{-3} \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-3/2} \approx z^{-3} \left(1 - \frac{3a^2}{2z^2}\right)$

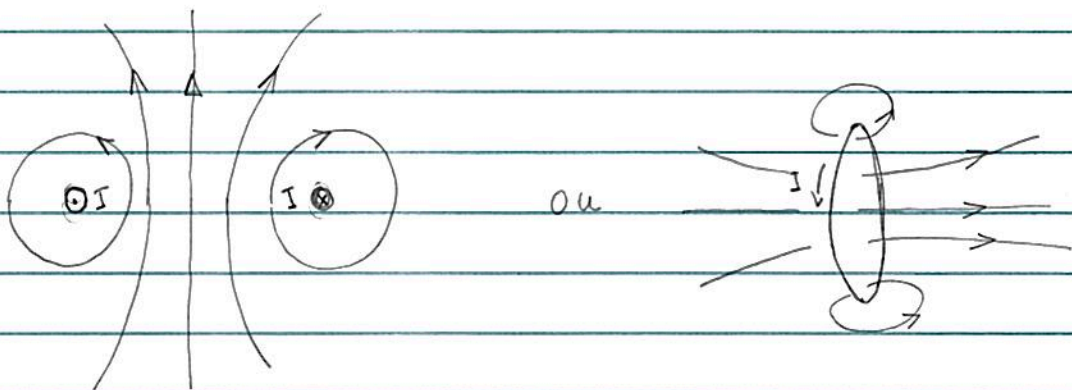
$\hookrightarrow \vec{B}(0,0,z) \approx \frac{\mu_0 \vec{j}}{2\pi z^3}$  (97.1)

Lembran (pg. 13) :  $\vec{E}(0,0,z) \approx \frac{\vec{p}}{2\pi \epsilon_0 z^3}$  ;  $z \gg d$  : Eq. (13.1)

campo elétrico devido dipolo elétrico

notan (13.1)  $\rightarrow$  (97.1) se  $\frac{\vec{p}}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 \vec{j}$

Linhas de campo : verifica-se que

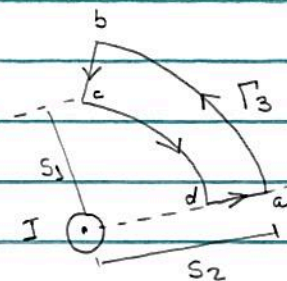
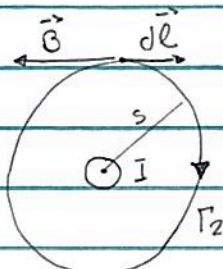
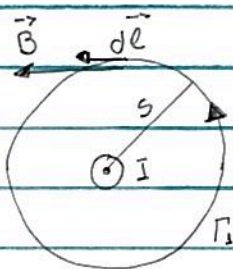


### Lei de Ampère

consideramos fio retilíneo ao percorrido corrente  $I$ ;

Vimos que  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\theta}$  : Eq. (94.2)

consideramos a integral de linha do campo magnético  $\vec{B}$  ao longo de caminhos fechados  $\Gamma_i$ :



$\Gamma_1 : d\vec{l} = s d\theta \hat{\theta}$

$\hookrightarrow \oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \cdot s d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I$

$\Gamma_2 : d\vec{l} = -s d\theta \hat{\theta}$

$\hookrightarrow \oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\Gamma_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \cdot s d\theta = -\mu_0 I$

$\Gamma_3 : ab : d\vec{l} = +s_2 d\theta \hat{\theta} ; bc : d\vec{l} = -ds \hat{s}$   
 $cd : d\vec{l} = -s_1 d\theta \hat{\theta} ; da : d\vec{l} = +ds \hat{s}$



$$\begin{aligned} \hookrightarrow \oint_{\Gamma_3} \vec{B} \cdot d\vec{e} &= \int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{e} + \int_{cd} \vec{B} \cdot d\vec{e} \\ &= \int_{ab} \frac{\mu_0 I}{2\pi S_2} \cdot S_2 d\theta - \int_{cd} \frac{\mu_0 I}{2\pi S_1} \cdot S_1 d\theta = 0 \end{aligned}$$

notas: (1)  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} \neq 0$  se  $\Gamma$  envolve corrente  $I$  (fio)

(2) sinal integral depende sentido da corrente  $I$  w.r.t. orientação  $\Gamma$ .

\* Afirmação:

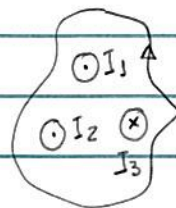
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I \quad : \text{Lei de Ampère} \quad (99.1)$$

independente forma  $\Gamma$

$I =$  corrente total envolvida pela curva  $\Gamma$

convenção sinal corrente  $I$ :

$I_1$  e  $I_2$  : positiva  
 $I_3$  : negativa



$$\hookrightarrow I = I_1 + I_2 - I_3$$

notas convenção sinal corrente ~ "mão direita"

Obs. Eq. (99.1) :

(1) válida p/ corrente  $I$  estacionária;

(2) pode ser facilmente verificada p/ fio  $\infty \oplus \Gamma$  arbitrária  
(veja abaixo);

(3) pode ser obtida a partir Eq. (92.1) (caso geral)

Sobre Obs. (2) :

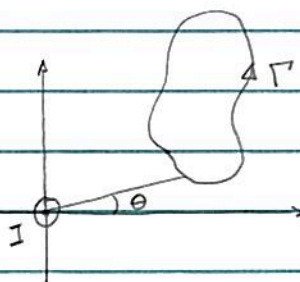
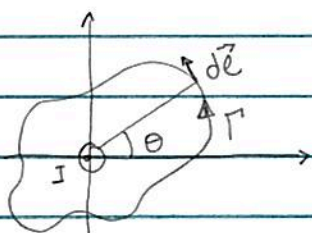
Considerar fio  $\infty \oplus$  corrente estacionária  $I$  e curva  $\Gamma$  arbitrária,

$$\text{Eq. (99.2)} : \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\theta}$$

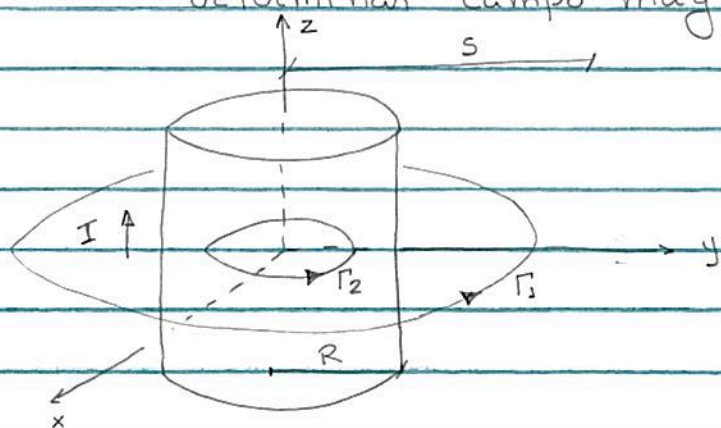
$$\text{p/ } \Gamma : d\vec{\ell} = ds \hat{s} + s d\theta \hat{\theta} + dz \hat{z}$$

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\theta} \cdot (ds \hat{s} + s d\theta \hat{\theta} + dz \hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

$$= \begin{cases} \mu_0 I & , \text{ p/ } \Gamma \text{ envolvendo fio : } \theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi \\ 0 & , \text{ " " não " " : } \theta_1 = \theta_2 \end{cases}$$



Ex 1: consideran fio (cilindro) raio  $R$   $\oplus$  corrente  $I$  ;  
determinan campo magnético  $\vec{B}$  devido cilindro.



hipótese: fio  $\infty$

por simetria:  $\vec{B} = B(s) \hat{\theta}$  (coordenadas cilíndricas, veja pg. 94)

dois casos:

(i)  $s > R$

Nesse caso, consideran  $\Gamma_1 =$  círculo raio  $s > R$

$$\text{Eq. (99.1)} : \oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_0^{2\pi} B \cdot s d\theta = 2\pi s B = \mu_0 I$$

$$d\vec{e} = s d\theta \hat{\theta}$$

$$\hookrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\theta}, \quad s > R$$

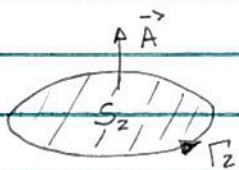
(ii)  $s < R$

hipótese: corrente  $I$  uniforme através volume cilindro

nesse caso, consideran  $\Gamma_2 =$  círculo raio  $s < R$

Eq. (99.1) :  $\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{A}$

L> área círculo definido por  $\Gamma_2$



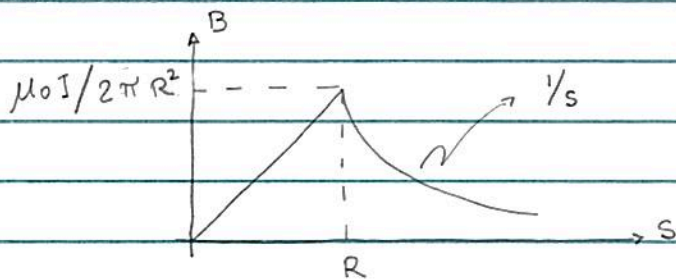
como  $d\vec{e} = s d\theta \hat{\theta}$

$\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{z}$

$d\vec{A} = dA \hat{z}$

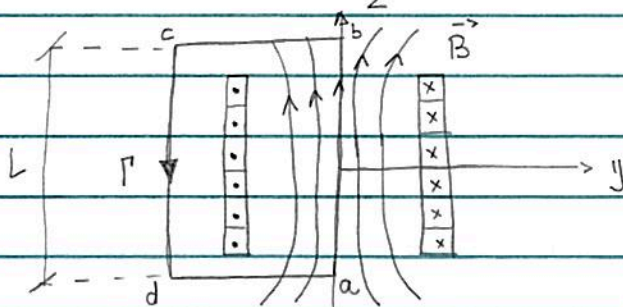
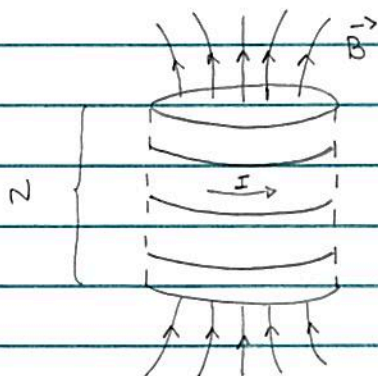
L>  $\int_0^{2\pi} B s d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \int_{S_2} dA = \frac{\mu_0 I s^2}{R^2}$

L>  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi R^2} \hat{\theta}$



Ex. 2 : considera solenóide, comprimento L, raio a ⊕ corrente I; determina campo magnético  $\vec{B}$  no interior do solenóide.

solenóide = N anéis raio a (veja pg. 96) ⊕ corrente I



hipótese :  $L \gg a \rightarrow$  campo  $\vec{B}$  próximo eixo  $\hat{z} \approx$  uniforme  
" " extensão solenóide  $\approx 0$

considerar curva  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_{ab} (B\hat{z}) \cdot (dz\hat{z}) = BL$$

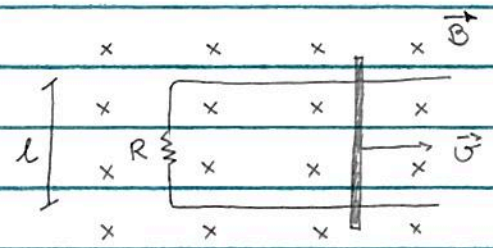
Eq. (99.1) :  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = BL = \mu_0 I \cdot N$   
 $\hookrightarrow$  notas fator  $N$ .

$\hookrightarrow \vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$  , p/ pontos interior  $\hat{z} \approx$  eixo  $\hat{z}$  (102.1)  
 $\hookrightarrow$  # anéis (espiras) / comprimento

# Indução eletromagnética

considerar o sistema : condutor forma "U" ⊕ lâmpada (resistor R)  
 ⊕ barra metálica móvel

sob campo magnético  $\vec{B}$  uniforme

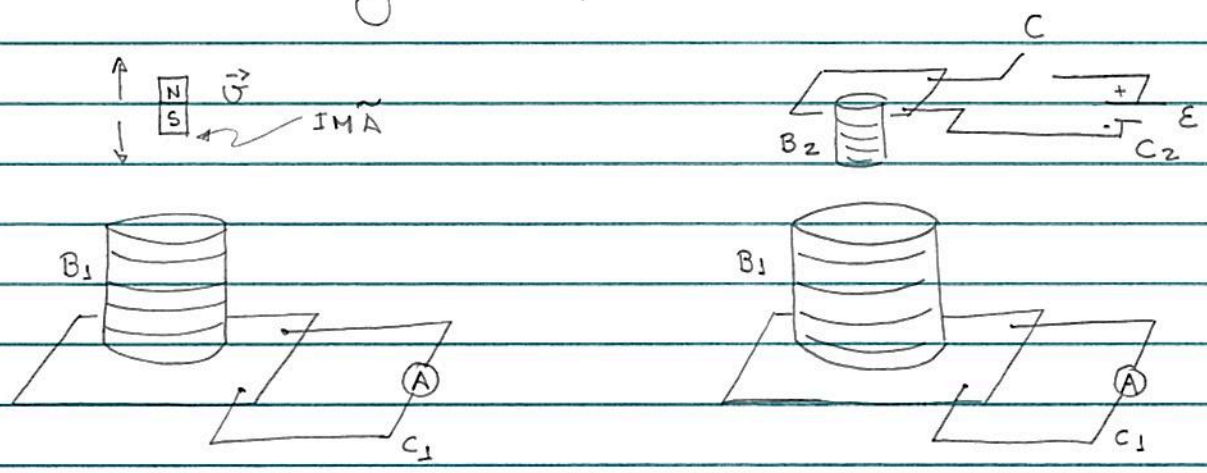


$\vec{v}$  : velocidade barra metálica

Observações : se  $\vec{v} = 0 \rightarrow$  lâmpada apagada  
 "  $\vec{v} \neq 0$  " " " acesa =  $\exists$  corrente I no circuito

notas : ~~A~~ bateria no circuito  $\rightarrow$  Q.: Qual a origem da corrente I?

considerar os seguintes experimentos:



(A)

(B)

$C_i$  : circuitos  $i=1,2$

$B_i$  : bobinas (solenoides)  $i=1,2$

$c$  : chave

• Observações :

exp. (A) : (1) se  $\vec{v} = 0 \rightarrow$  amperímetro :  $I = 0$

(2) se  $\vec{v} \neq 0 \rightarrow$  " :  $I \neq 0$

exp. (B) : (3) chave  $\underline{c}$  fechada  $\rightarrow \exists$  corrente  $\underline{e}$  amperímetro :  $I = c$   
em  $C_2$

(4) intervalo de tempo  $\rightarrow$  amperímetro :  $I \neq 0$   
chave  $\underline{c}$  fechando  
ou abrindo

• notas : (1) - (4) : campo magnético  $\vec{B} \neq 0$  através bobina  $B_1$

(1) e (3) :  $\vec{B}$  é cte no tempo :  $\vec{B} = \vec{B}(t)$

mas em (2) e (4) :  $\vec{B}$  varia no tempo :  $\vec{B} = \vec{B}(t)$

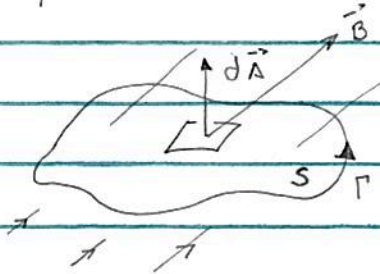
$\hookrightarrow$  De fato : fluxo campo magnético  $\vec{B}$   
através da bobina  $B_1$   
varia no tempo

$\hookrightarrow$  Lei de Faraday :

variação temporal do fluxo  
do campo magnético através  
bobina  $B_1 \rightarrow \exists$  força eletromotriz/  
corrente induzida no  
circuito  $C_1$ .

em detalhes:

Consideramos circuito orientado  $\Gamma$  e superfície  $S$  cujo contorno é definido por  $\Gamma$ , sob campo magnético  $\vec{B}$



notas: relação entre orientação  $\Gamma$   
e sentido  $d\vec{A}$  = "regra mão direita"

Eq. (85.1):

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad : \quad \text{fluxo campo } \vec{B} \text{ através superfície } S$$

se  $\mathcal{E}$ : força eletromotriz (emf) induzida no circuito

$$\hookrightarrow \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad : \quad \text{Lei de Faraday} \quad (105.1)$$

notas: variação temporal  $\Phi_B$  pode ocorrer devido

$$(1) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \quad \text{e circuito } \Gamma \text{ fixo}$$

$$(2) \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}) \quad \text{e velocidade de } \Gamma \quad \vec{v} \neq 0$$

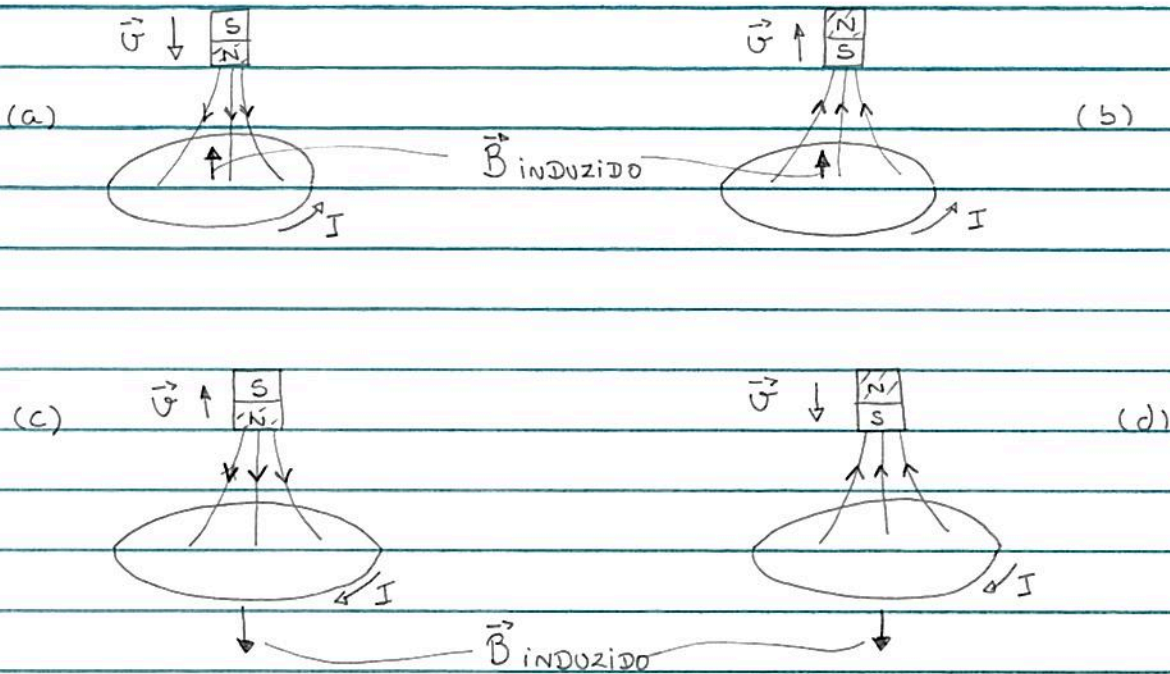
Obs Eq. (105.1): trabalhos de Faraday (1831) e Henry (1832)



• sobre o sinal "-" Eq. (105.1) : Lei de Lenz

Lei de Lenz: o sentido da força eletromotriz induzida  $\mathcal{E}$  é tal que a corrente induzida  $I$  gere um campo magnético  $\vec{B}_{\text{IND}}$  que se opõe à mudança do fluxo magnético (106.1)

considerar espina (nao  $a$ )  $\oplus$  imã em movimento

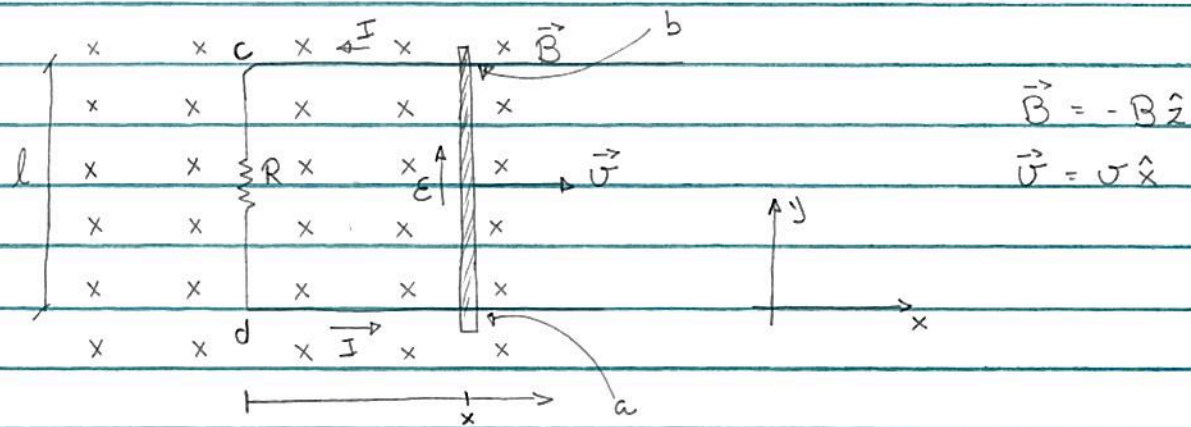


notas: (1) a variação temporal de  $\Phi_B$  devido ao imã através da espina

(2) sentido corrente ( $\vec{B}_{\text{IND}}$ ) de acordo c/ (106.1)

Obs.: Lei de Lenz relacionada ao princípio de conservação da energia.

Ex. 1: considerar sistema pg. 103;  
determinar emf induzida; verificar conservação energia;



fluxo  $\Phi_B$  através  $\square$  abcd:

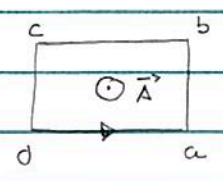
como  $\vec{B} = -B\hat{z}$   
 $d\vec{A} = dA\hat{z} \rightarrow \Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = -B \int_S dA = -Blx$

$\hookrightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$

Eq. (105.1):  $E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = Blv$  (107.1)

Eq. (106.1):  $\vec{B}$  fixo  $\oplus$  área aumentando  $\rightarrow$  aumento  $\Phi_B$   
 (sentido  $-\hat{z}$ )  $\rightarrow \vec{B}_{ind} \propto \hat{z} \rightarrow I$  sentido anti-horário

notas: se  $\square$  abcd orientado tal que orientação  $\square$  e sentido  $d\vec{A}$  = regra mão direita



$\hookrightarrow E > 0 \rightarrow$  sentido  $I$  = orientação  $\square$ .

Exercício: Determinar emf considerando  $d\vec{A} = -dA\hat{z}$ .

corrente induzida  $I$ :

$$\text{como } \mathcal{E} = IR \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

$$\hookrightarrow P = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{1}{R} (Blv)^2 \quad (108.1)$$

notas: força  $\vec{F}_B$  sob barra móvel devido  $\vec{B}$ ,

$$\text{Eq. (88.2): } \vec{F} = I \int_{ab} d\vec{e} \times \vec{B}$$

$$\text{como } d\vec{e} = dy \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{B} = -B\hat{z}$$

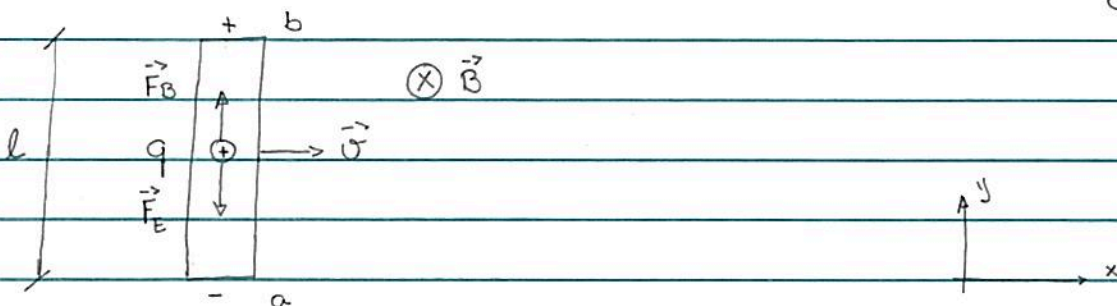
$$\hookrightarrow \vec{F} = I \int_0^l B (\hat{y} \times \hat{z}) (-1) dy = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{x}$$

como  $\vec{v} = \text{cte} \rightarrow \vec{F} = \frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{x}$  : Força externa aplicada sob barra

$$\hookrightarrow P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} = (108.1) !$$

• Vamos determinar emf por esse sistema de uma forma alternativa:

considerar apenas a barra móvel sob campo magnético  $\vec{B}$ :



força sob cargas positivas.

$$\text{Eq. (82.1)} : \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

campo elétrico

campo magnético  
externo

~ cargas acumuladas  
extremidades a e b

pr a situação de equilíbrio

$$\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = \vec{B} \times \vec{v} = (-B\hat{z}) \times (v\hat{x}) = -Bv\hat{y}$$

como

$$V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{e} = -\int_0^l (-Bv\hat{y})(dy\hat{y}) = Bv l$$

↳ pr o sistema barra móvel ⊕ condutor forma "U":

$$\mathcal{E} = V_{ab} = Bv l = \text{Eq. (107.1)} : \text{emf produzida pelo movimento}$$

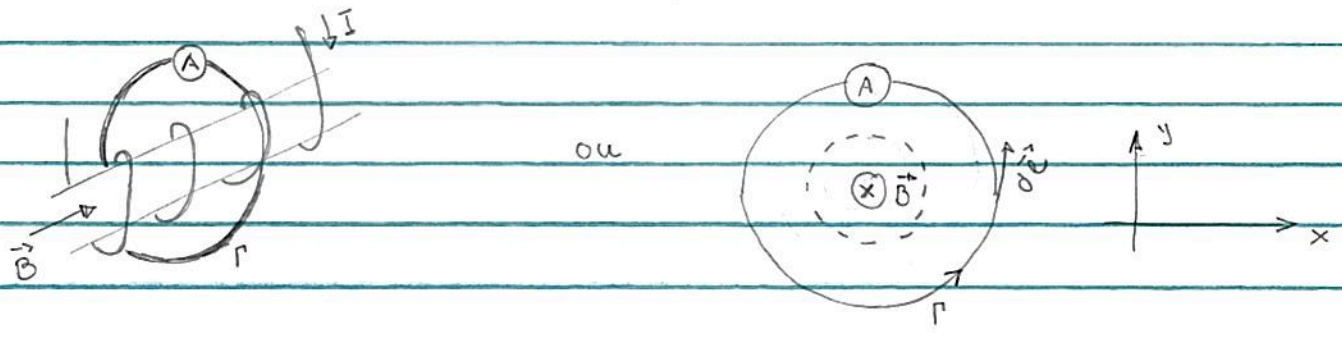
caso geral: (circuito) condutor, forma arbitrária, em movimento velocidade  $\vec{v}$ , pode-se mostrar que (veja H. Nussenzweig)

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{e} \quad (109.1)$$

Obs.: (1) Eq. (109.1) é equivalente a (107.1).

(2) corresponde caso (1), pg. 105.

Ex. 2 : consideramos solenoide  $\oplus$  corrente  $I$  e circuito  $\Gamma$   $\oplus$  amperímetro  $A$ ; determinamos leitura amperímetro



Eq. (102.1) :  $\vec{B} = -\mu_0 n I \hat{z}$  : campo interior solenoide

$\Phi_B$  através área circular  $S$  cujo contorno = circuito  $\Gamma$  :

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{S'} (-\mu_0 n I \hat{z}) \cdot (dA \hat{z}) = -\mu_0 n I A$$

$\downarrow$   
 área seção transversal solenoide

notas : orientações  $\Gamma$  e  $d\vec{A}$  ~ regra mão direita

se  $I = cte \rightarrow$  corrente circuito  $\Gamma$   $I' = 0$

se  $\frac{dI}{dt} \neq 0 \rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0$

$\hookrightarrow$  Eq. (105.1) :  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 n A \frac{dI}{dt}$

se resistência circuito  $\Gamma = R \rightarrow I' = \frac{\mu_0 n A}{R} \frac{dI}{dt}$

notas:

$$(1) \text{ se } \frac{dI}{dt} > 0 \rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} < 0 = \text{aumento } \Phi_B \text{ (sentido } -\hat{z})$$

$$\text{L} \xrightarrow{(106.1)} \vec{B} \text{ induzido } \propto \hat{z} \rightarrow I' \text{ sentido anti-horário}$$

$$(2) \text{ se } \frac{dI}{dt} < 0 \rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} > 0 = \text{aumento } \Phi_B \text{ (sentido } +\hat{z})$$

$$\text{L} \xrightarrow{(106.1)} \vec{B} \text{ induzido } \propto -\hat{z} \rightarrow I' \text{ sentido horário}$$

(111.1)

• Vamos determinar (111.1) (sentido  $I'$ ) de forma alternativa

Lembrar definições emf, Eq. (69.1):

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q}$$

como circuito  $\Gamma$  em repouso ( $\neq$  exemplo 1)  $\rightarrow W$  relacionado  $\vec{F}_E = q\vec{E}$

$$\hookrightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_{\Gamma} (q\vec{E}) \cdot d\vec{e} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

$$\text{Eq. (105.1)} : \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (111.2)$$

$$\text{ou } \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

\* Aqui: contorno superfície  $S =$  curva  $\Gamma$ ;  
orientação  $\Gamma$  e direção  $d\vec{A} \sim$  regra mão direita

notas:

$$(1) \text{ se } \frac{dI}{dt} > 0 \rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} < 0 \rightarrow \mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} > 0$$

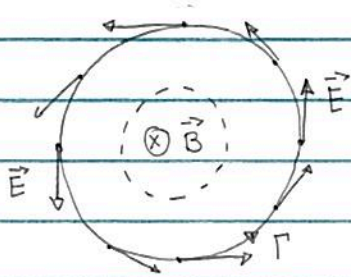
$$\hookrightarrow \vec{E} \text{ sentido} = d\vec{e} \rightarrow I' \text{ sentido anti-horário}$$

$$\uparrow$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$(2) \text{ se } \frac{dI}{dt} < 0 \rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} > 0 \rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} < 0 \rightarrow I \text{ sentido horário}$$

hipótese:  $\frac{dI}{dt} > 0$



Interpretação (111.2):  $\vec{E}$  = campo elétrico induzido no circuito  $\Gamma$  devido à variação do fluxo  $\Phi_B$  do campo magnético através de  $\Gamma$ .

hipótese: área definida pela curva  $\Gamma$  é fixa

podemos escrever (111.2) como:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (112.1)$$

interpretação (112.1): campo magnético  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{n}, t)$  que varia no tempo gera um campo elétrico  $\vec{E}$ !

como  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} \neq 0 \rightarrow$  campo elétrico induzido  $\vec{E}$   
não é conservativo  $\neq$  eletrostática

\*\* Eq. (III.2) é válida pr qualquer curva  $\Gamma$ , mesmo na  
ausência de um circuito condutor!

Exercício: pr o caso  $\frac{dI}{dt} > 0$ , determinar  $\vec{E}$ .

$\Gamma =$  círculo raio  $s$  e  $d\vec{e} = dl \hat{\phi} = r d\phi \hat{\phi}$  (coordenadas  
 cilíndricas)

se  $\vec{E} = E(s) \hat{\phi}$

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_0^{2\pi} (E(s) \hat{\phi}) \cdot (s d\phi \hat{\phi}) = E(s) s \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi s E(s)$$

como  $\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n A \frac{dI}{dt}$

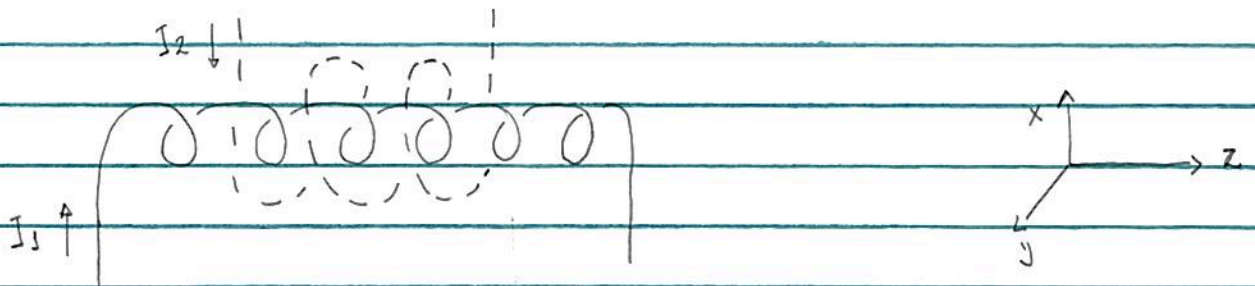
$$\text{Eq. (III.2)} : E(s) = \frac{\mu_0 n A}{2\pi s} \frac{dI}{dt} \rightarrow \vec{E} = \frac{\mu_0 n A}{2\pi s} \frac{dI}{dt} \hat{\phi}$$



# Indutância

ideia: introduzindo os conceitos de indutância-mútua e auto-indutância e discutindo dispositivo que armazena energia magnética.

consideramos 2 solenoides como mostrado abaixo:



— Solenoide 1,  $n_1 = \frac{N_1}{L}$  : # espiras/comprimento, corrente  $I_1$

- - - " 2,  $n_2 = \frac{N_2}{L}$  : " " " "  $I_2$

hipótese: correntes  $I_i$  estacionárias

(i) se  $I_1 \neq 0$  e  $I_2 = 0$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Eq. (102.1)}} \quad B_1 \propto I_1 &\longrightarrow \Phi_2 \propto I_1 \longrightarrow \Phi_2 = M_{21} I_1 \\ &\quad \uparrow \\ &\text{fluxo campo magnético} \\ &\text{através solenoide 2} \\ &\text{devido } B_1 \end{aligned}$$

De modo análogo

(ii) se  $I_1 = 0$  e  $I_2 \neq 0$

$$L \xrightarrow{\text{Eq. (102.1)}} B_2 \propto I_2 \longrightarrow \Phi_1 \propto I_2 \longrightarrow \Phi_1 = M_{12} I_2$$

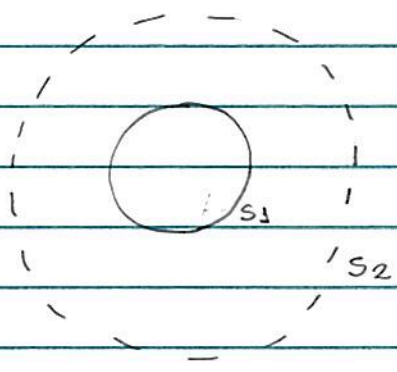
↓  
fluxo campo magnético  
através solenoide 1  
devido  $B_2$

•  $M_{12}$  e  $M_{21}$  : indutância - mútua

verifica-se que :  $M_{12} = M_{21} = M : \text{cte}$  (necessário potencial vetor!)  
 $M \propto$  geometria sistema  
 $M \npropto$  correntes  $I_i$

Ex. 1 : considera sistema 2 solenóides, pg. 140 ;  
determinar  $M_{12}$  e  $M_{21}$

solenóide 1 : área (circular) seção transversal :  $A_1$   
 " 2 : " " " " :  $A_2$



$A_1 < A_2$

(i)  $I_1 \neq 0$  e  $I_2 = 0$

$$\Phi_2 = N_2 \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A} = N_2 \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A} = N_2 \int_{S_1} (\mu_0 n_1 I_1 \hat{z}) \cdot dA \hat{z}$$

$\Phi$  através  $\perp$  espina

pois  $A_1 < A_2$

$$L \rightarrow \Phi_2 = \underbrace{\mu_0 \frac{N_1 N_2 A_1}{L}}_{M_{21}} I_1$$

(ii) se  $I_1 = 0$  e  $I_2 \neq 0$

$$\Phi_1 = N_1 \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A} = N_1 \int_{S_1} (\mu_0 n_2 I_2 \hat{z}) \cdot d\vec{A} = \underbrace{\mu_0 \frac{N_1 N_2 A_1}{L}}_{M_{12}} I_2$$

notas:  $M_{12} = M_{21} = M$   $\propto$  geometria sistema

$M_{12} \rightarrow M_{21}$  por substituição  $1 \leftrightarrow 2$  !

• notas:  $I_1 \rightarrow \Phi_1$  através do próprio solenoide 1

$$\text{como } B_1 \propto I_1 \rightarrow \Phi_1 \propto I_1 : \Phi_1 = M_{11} I_1$$

De modo análogo:

$I_2 \rightarrow \Phi_2$  através do próprio solenoide 2

$$\text{como } B_2 \propto I_2 \rightarrow \Phi_2 \propto I_2 : \Phi_2 = M_{22} I_2$$

$M_{ii} \equiv L_i$  : auto indutância

• unidade (SI):

$$[L], [M] = \frac{[\Phi_B]}{[I]} = \frac{Wb}{A} = 1 \text{ H (henry)}$$

como  $1 \text{ Wb} = \frac{1 \text{ N} \cdot \text{m}}{\text{A}} = \left( \frac{\text{C} \cdot \text{V}}{\text{m}} \right) \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} = \text{V} \cdot \text{s}$

$L \rightarrow 1 \text{ H} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \Omega \cdot \text{s}$

Ex. 1 : novamente ; determinar auto-indutâncias  $L_1$  e  $L_2$

(i)  $I_1 \neq 0$  e  $I_2 = 0$ ,

$$\Phi_1 = N_1 \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A} = \underbrace{\mu_0 \frac{N_1^2}{L} A_1}_{L_1} I_1$$

Notar áreas !

(ii)  $I_1 = 0$  e  $I_2 \neq 0$ ,

$$\Phi_2 = N_2 \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A} = \underbrace{\mu_0 \frac{N_2^2}{L} A_2}_{L_2} I_2$$

• se  $I_1$  e  $I_2 \neq 0$ , pelo princípio de superposição :

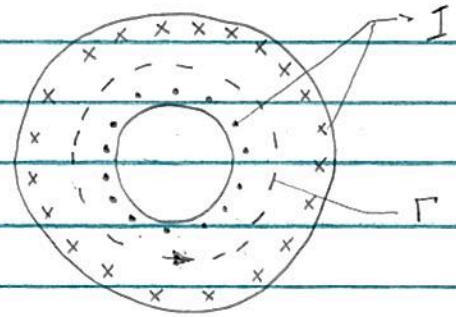
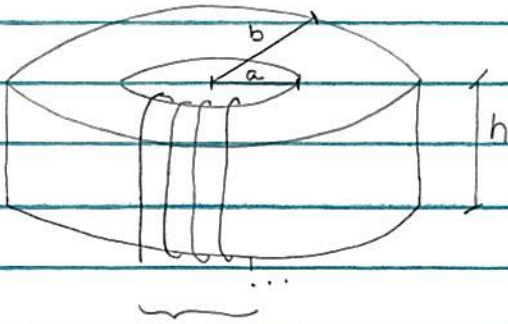
$\Phi_1 = M_{11} I_1 + M_{12} I_2$

$\Phi_2 = M_{21} I_1 + M_{22} I_2$

ou, em forma matricial :

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Ex. 2: considerar toroide, raio interno  $a$ , raio externo  $b$ ,  
 área seção transversal retangular  $\oplus$  corrente  $I$ ;  
 determinar auto-indutância do sistema.



$N$  voltas em torno anel completo

• campo magnético  $\vec{B}$  no interior do toroide:  
 por simetria  $\vec{B} \propto \hat{\phi}$

p/ curva (tracejada)  $\Gamma =$  círculo raio  $r$ ;  $a < r < b$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \oint_{\Gamma} (B\hat{\phi}) \cdot (nd\phi\hat{\phi}) = 2\pi n B$$

Lei de Ampère (99.1):  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = 2\pi n B = \mu_0 N I$

$$\hookrightarrow \vec{B}(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (118.1)$$

• fluxo  $\Phi_B$  do campo magnético  $\vec{B}$  através área seção transversal do toroide:

$$\Phi_B = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$\Phi_B$  através  $\frac{1}{2}$  espina

como  $d\vec{A} = dn dz \hat{\phi}$  (coordenadas cilíndricas),

$$\hookrightarrow \Phi_B = N \int_S \left( \frac{\mu_0 N I \hat{\phi}}{2\pi n} \right) \cdot (dn dz \hat{\phi})$$

$$= \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} \int_a^b dn \int_0^h dz = \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) I}_L \quad (118.2)$$

• consideramos que  $I_i = I_i(t)$ , e que  $I_i$  variam lentamente c/ o tempo

$$\underbrace{\sim T \gg \ell}_{\substack{\text{período} \\ I = I(t)}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{comprimento} \\ \text{característico} \\ \text{velocidade} \\ \text{da luz} \end{array}$$

(i) se  $I_1 = I_1(t) \neq 0$  e  $I_2 = 0$ ,

$$\text{Lei de Faraday (105.1)} : \quad \mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt} = - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = - M \frac{dI_1}{dt}$$

↳ emf no solenoide 2 devido à variação temporal da corrente no solenoide 1

De modo análogo,

(ii) se  $I_1 = 0$  e  $I_2 = I_2(t) \neq 0$

$$\text{Eq. (105.1)} : \quad \mathcal{E}_1 = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - M_{12} \frac{dI_2}{dt} = - M \frac{dI_2}{dt}$$

↳ emf no solenoide 1 devido à variação temporal da corrente no solenoide 2

Além disso, podemos definir a emf auto-induzida em cada solenoide :

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_i}{dt} = - L \frac{dI_i}{dt} \quad (119.1)$$

Interpretação (119.1) : a emf auto-induzida se opõe à variação da corrente  $I \sim \text{sinal "-"} (Lei de Lenz).$

• Elemento (dispositivo) autoindutância  $L$  em um circuito:

- indutor :
- dispositivo que se opõe à variação da corrente em um circuito;
  - campo magnético completamente confinado no seu interior ~ elemento que armazena energia magnética;
  - resistência nula;

representação em circuito elétrico:



• sobre a diferença de potencial nos terminais do indutor

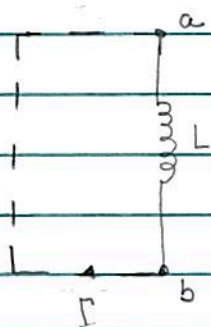
Lembranças:

(1) emf autoinduzida  $\mathcal{E} = \oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \neq 0 \rightarrow \vec{E}_n$ : campo elétrico não conservativo

(2)  $V_a - V_b = - \int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l}$  : válida p/  $\vec{E}_c$  = campo elétrico conservativo

↳ Q. : Como definir  $V_{ab} = V_a - V_b$  p/ um indutor ?

considerar a curva  $\Gamma$  abaixo:



$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  : curva fechada

$\Gamma_1$  : ———

$\Gamma_2$  : - - - -



Lei de Faraday (III.2) ⊕ (III.1) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_n \cdot d\vec{e} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - L \frac{dI}{dt}$$

variação  $\Phi_B$  apenas no interior  $\underline{\underline{L}}$ .

$\vec{E}_n \neq 0$  apenas ao longo curva  $\Gamma_s$  :

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E}_n \cdot d\vec{e} = \int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{e} = - L \frac{dI}{dt}$$

como indutor apresenta  $R \approx 0 \rightarrow E \approx 0$  p/ movimento  
carga através dispositivo

$$\hookrightarrow \vec{E}_{TOTAL} = \vec{E}_c + \vec{E}_n \approx 0 : \text{campo elétrico total no interior condutor}$$

$\hookrightarrow$  conservativo  $\sim$  3 cargas p/ os a e b !

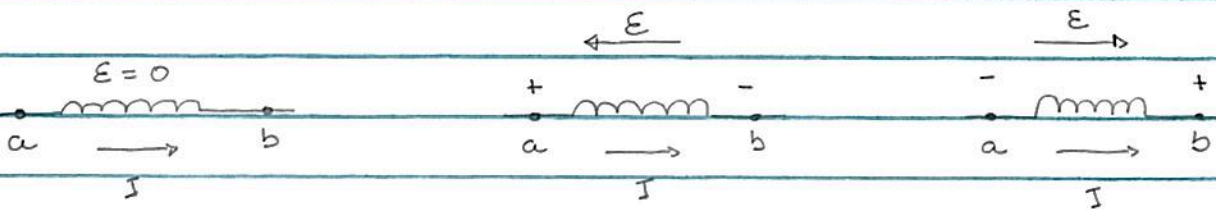
$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E}_n \cdot d\vec{e} = - \int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{e} = - L \frac{dI}{dt}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{V_{ab} = V_a - V_b}$

$$\hookrightarrow V_{ab} = V_a - V_b = L \frac{dI}{dt} : \Delta V \text{ entre terminais indutor} \quad (III.3)$$

$\hookrightarrow$  regras de Kirchhoff OK p/ circuito c/ indutor !

notar sinal  $V_{ab} = V_a - V_b$



$dI/dt = 0$

$dI/dt > 0$

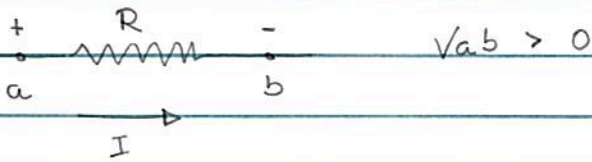
$dI/dt < 0$

$(V_{ab} = 0)$

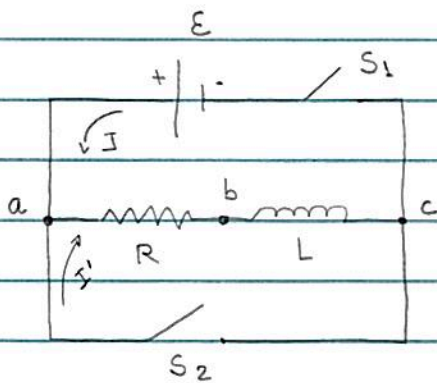
$(V_{ab} > 0)$

$(V_{ab} < 0)$

comparar c/ resistor:



Ex. 1: circuito RL: indutor, autoindutância  $L$   $\oplus$   
 resistor  $R$ ; fonte  $E$ ;  
 determinar  $I = I(t)$



2 casos:

- (i)  $S_1$  fechada e  $S_2$  aberta
- (ii)  $S_1$  aberta e  $S_2$  fechada

(i)

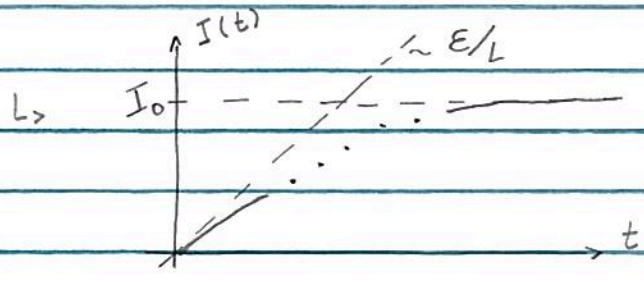
$\sum v = 0$  :  $E - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$   
 malha  
 (sentido I)

$L \frac{dI}{dt} + RI = \frac{E}{L}$  : eq. diferencial (122.1)  
 1ª ordem não homogênea

comportamento  $I = I(t)$ ,

-  $t=0 : I=0 \rightarrow (122.1) : \frac{dI}{dt} \approx \frac{\epsilon}{L}$

-  $t \rightarrow +\infty : I = cte \rightarrow \frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow (122.1) : I = \frac{\epsilon}{R} \equiv I_0$



Solução (122.1) (veja pg. 78)

(122.1)  $\rightarrow \frac{dI}{I - I_0} = -\frac{R}{L} dt ; I_0 = \frac{\epsilon}{R}$

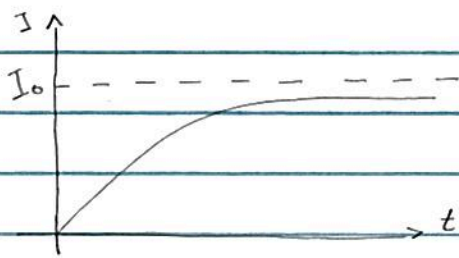
$\hookrightarrow \int_0^I \frac{dI'}{I' - I_0} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt'$

$\hookrightarrow \ln \frac{I - I_0}{I_0} = -\frac{Rt}{L} \rightarrow I(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$  (123.1)

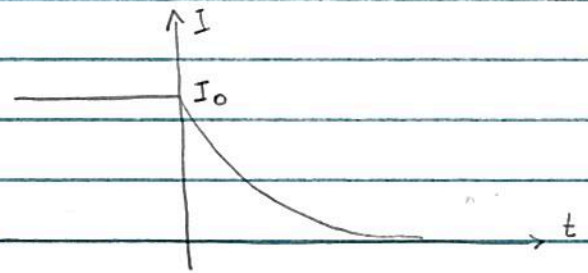
$\tau \equiv \frac{L}{R}$  : cte de tempo.  
(escala de tempo caracteristica do sistema)

notas:

$[L] = [R] = \frac{H}{\Omega} = \frac{\Omega \cdot s}{\Omega} = s !$



(i)



(ii)

(ii)

$$\sum_{\text{malha}} v = 0 \quad : \quad -RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

(sentido I')

$$L > I = I_0 e^{-t/\tau} \quad ; \quad I_0 : \text{valor inicial corrente} \quad (124.1)$$

$$\tau = L/R$$

Obs.: Comparar c/ circuito RC, pgs. 76-79

• notar caso (ii): energia é dissipada no resistor R

como  $\nexists$  fontes  $\rightarrow$  energia é armazenada em L durante processo (i)!

• sobre a energia armazenada no indutor,

$$\text{como potência } P = V_{ab} I$$

$$\text{e } V_{ab} = L \frac{dI}{dt}$$

$$\left. \begin{array}{l} P = V_{ab} I \\ V_{ab} = L \frac{dI}{dt} \end{array} \right\} \rightarrow P = L I \frac{dI}{dt}$$

como  $P = \frac{dU}{dt}$

$$\hookrightarrow dU = LI dI \rightarrow \int_0^U dU' = L \int_0^I I' dI'$$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{2} LI^2 \quad ; \text{ energia armazenada no indutor} \quad (125.1)$$

Obs.: comparem Eqs. (52.1) e (125.1)

notas:  $U \neq 0$  apenas se  $I \neq 0$ !

· considerem caso particular, indutor = toroide

$$\text{Eqs. (118.2) } \oplus \text{ (125.1)} : U = \frac{\mu_0 N^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) I^2$$

notas:

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2(r) dv = \frac{1}{2\mu_0} \int \left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\right)^2 r dr d\phi dz$$

$\downarrow$  volume toroide  
 $\uparrow$  Eq. (118.1)

$$= \frac{1}{2\mu_0} \cdot \left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi}\right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2(r) dv$$

L>  $u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$  : densidade de energia armazenada (126.1)  
no campo magnetico no interior  
do indutor

Obs. : comparar (126.1) e (52.1)

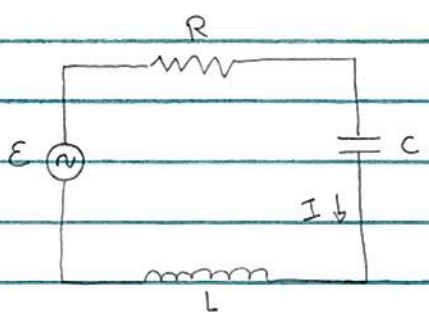
• verifica-se que (126.1) e válida p/ caso geral

L> Eqs. (52.1) e (126.1) :

$U = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) dv$  : energia armazenada no (126.2)  
campo eletromagnético  
(vácuo)

### Circuitos de corrente alternada (ac)

Considere o circuito abaixo:



$E = E(t) = E_0 \cos \omega t$  : emf alternada  
 amplitude ←  
 $\omega = 2\pi \nu$  : frequência ←

Ⓜ : representação fonte emf em um circuito

Regras de Kirchhoff:

$\sum v = 0$  :  $E - RI - \frac{1}{C}Q - L \frac{dI}{dt} = 0$   
 (sentido s)

como  $I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$

$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$  (127.1)

ou

$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \dot{E}(t)$  (127.2)

Eqs (127.1) : eq. diferencial ordinária, 2ª ordem, não homogênea p/  $Q=Q(t)$   
 (128.1) : " " " " " " " p/  $I=I(t)$

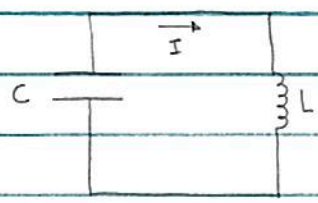
análogas : eq diferencial oscilador harmônico amortecido  
 ⊕ força externa !

• ideia solução (127.1) ou (127.2) : método gráfico (fasores)

• vamos considerar 3 casos :

- (i)  $\mathcal{E} = 0$  e  $R = 0$  : circuito LC  $\sim$  oscilador harmônico
- (ii)  $\mathcal{E} = 0$  : " RLC  $\sim$  " " amortecido
- (iii) circuito RLC (série)  $\oplus$  fonte  $\sim$  " " forçado

• (i) : circuito LC,



Eq. (127.1) :  $\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0$  : eq. diferencial ordinária (128.1)  
 2ª ordem homogênea

solução geral :  $Q(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

como  $\ddot{Q}(t) = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi)$

em (128.1) :  $\left( \frac{1}{LC} - \omega_0^2 \right) A \cos(\omega_0 t + \phi) = 0$

$\hookrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  : frequência característica (128.2)  
 circuito LC

hipótese : capacitor inicialmente carregado :  $Q(t=0) = Q_0$

como  $\exists$  indutor L no circuito :  $I(t=0) = 0$



como  $I = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt} \rightarrow I(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$\hookrightarrow Q(0) = Q_0 = A \cos \varphi$

$I(0) = 0 = -A\omega \sin \varphi \rightarrow A = Q_0$  e  $\varphi = 0$

$\hookrightarrow Q(t) = Q_0 \cos \omega t$  (129.1)

$I(t) = -Q_0 \omega \sin \omega t = Q_0 \omega \cos(\omega t + \pi/2)$

Interpretação (129.1):

-  $I(t)$  e  $Q(t)$  estão fora de fase;

-  $I(t)$  está adiantada w.r.t.  $Q(t)$  de  $\pi/2$ .

Lembrar: capacitor: dispositivo que armazena energia eletrostática  
indutor: " " " " magnética

como:

Eq. (52.1):  $U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \rightarrow U_C(t) = \frac{Q_0^2 \cos^2 \omega t}{2C}$  : energia armazenada em C

Eq. (126.1):  $U_L = \frac{1}{2} L I^2 \rightarrow U_L(t) = \frac{Q_0^2 \omega^2 L \sin^2 \omega t}{2}$  : energia armazenada em L  
 $\frac{Q_0^2}{2C}$

$\hookrightarrow U = U_C + U_L = \frac{Q_0^2}{2C}$  : energia total do sistema : conservada!

$\hookrightarrow$  circuito LC: transferência (cíclica)  
energia eletrostática capacitor  $\leftrightarrow$  energia magnética indutor

frequência característica:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Obs. 1: notas  $\exists$  analogia entre sistema massa-mola e circuito LC:

massa-mola

circuito LC

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$



$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = 0$$

$$x = x(t), m, k$$

$$Q = Q(t), L, 1/C$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$v = dx/dt$$

$$I = dQ/dt$$

$$T = 1/2 m v^2$$

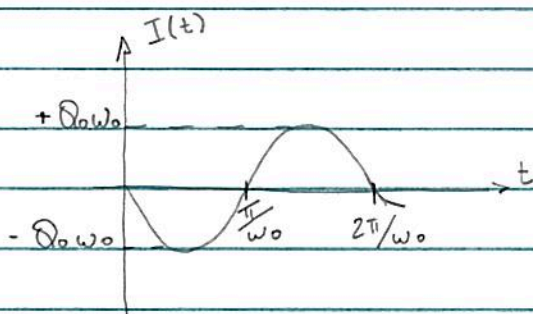
$$U_L = LI^2/2$$

$$U = 1/2 k x^2$$

$$U_C = Q^2/2C$$

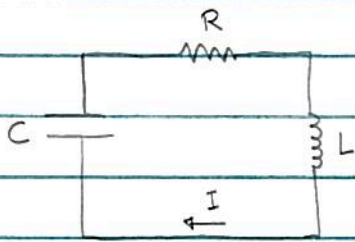
notas: L representa "inércia" ~ massa m!

Obs. 2: sobre comportamento  $I = I(t)$ , Eq. (129.1),



notas a variação no sentido de corrente no circuito!

• (ii) circuito RLC - série



notar:  $\exists$  elemento dissipativo: resistor  $R$

$$\text{Eq. (127.1)}: \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 : \text{eq. diferencial} \quad (131.1)$$

ordinária, 2ª ordem,  
homogênea

Aqui, há 3 casos distintos:

$$(a) \omega_0^2 = \frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} : \text{subamortecimento (p/ sistema massa-mola)}$$

$$(b) \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} : \text{amortecimento crítico}$$

$$(c) \omega_0^2 = \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2} : \text{superamortecimento}$$

Vamos considerar apenas o caso (a).

$$\hookrightarrow \text{solução geral (131.1)}: q(t) = \Delta e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \varphi)$$

$$\text{em (131.1) verifica-se que : } \beta = \frac{R}{2L}$$

(exercício)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

se condições iniciais :  $Q(0) = Q_0$  e  $I(0) = 0$

$L \rightarrow Q(0) = Q_0 = A \cos \varphi$

$$I(t) = -A e^{-\beta t} (-\beta \cos(\omega_1 t - \varphi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \varphi))$$

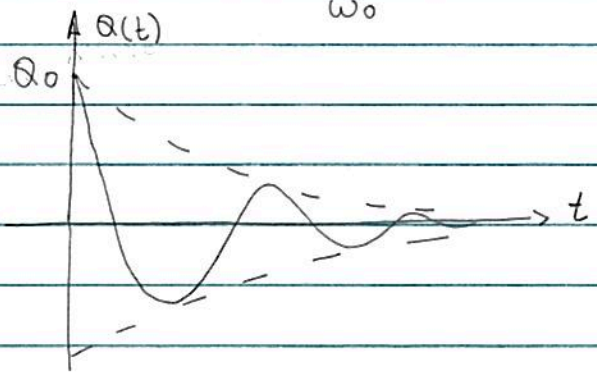
$L \rightarrow I(0) = -A (\beta \cos \varphi - \omega_1 \sin \varphi) = 0$

$$L \rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\beta}{\omega_1} \rightarrow \sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega_1^2}} = \frac{\beta}{\omega_0} = \frac{R}{2L\omega_0}$$

$$\cos \varphi = \frac{\omega_1}{\sqrt{\beta^2 + \omega_1^2}} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

$$A = \frac{Q_0}{\cos \varphi} = \frac{Q_0 \omega_1}{\omega_0}$$

$L \rightarrow Q(t) = \frac{Q_0 \omega_1}{\omega_0} e^{-Rt/2L} \cos(\omega_1 t - \varphi)$  (132.1)



notas :  $Q(t \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$  :  $\sim$   $\exists$  resistor  $R$  !

Carga no capacitor

• (iii) circuito RLC (série)  $\oplus$  fonte

solução geral Eq. (127.2):  $I(t) = I_h(t) + I_p(t)$  (133.1)

•  $I_h(t)$ : sol. eq. homogênea = (127.2)  $\oplus$   $\mathcal{E}(t) = 0$

vimos que (pgs. 131-132)  $I_h(t \rightarrow +\infty) = 0$ : transiente

•  $I_p(t)$ : solução particular, relacionada a  $\mathcal{E}(t)$

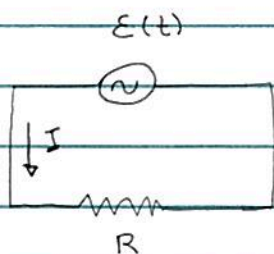
frequência oscilação  $I_p(t)$  = frequência "termo externo"  
 $\mathcal{E}(t)$

$I_p(t) \neq 0$  p/  $t \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ : solução estacionária

ideia: determinar  $I_p(t)$  via método gráfico: fasores

• vamos considerar os três elementos do circuito  
(resistor, capacitor e indutor) separadamente

(a) resistor  $\oplus$  fonte emf alternada  $\mathcal{E}(t)$ ,



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

Obs.: representação sentido  
positivo  $I$

se  $\mathcal{V}_R = \mathcal{V}_R(t)$ : diferença de potencial (ddp) entre

terminais do resistor  $R$

Como  $E = \mathcal{U}_R$

$$\hookrightarrow \mathcal{U}_R(t) = E_0 \cos \omega t = R i(t)$$

$$\hookrightarrow \mathcal{U}_R(t) = V_R \cos \omega t ; V_R = E_0 \quad (134.1)$$

amplitudes

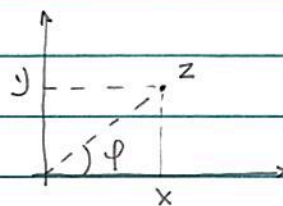
$$i(t) = I_0 \cos \omega t ; I_0 = \frac{V_R}{R} = \frac{E_0}{R} \quad (134.2)$$

notas:  $\mathcal{U}_R(t)$  e  $i(t)$  estão em fase

• Lembrar números complexos:

$$z = x + iy = |z| e^{i\varphi} ; |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$



$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

• Definindo:

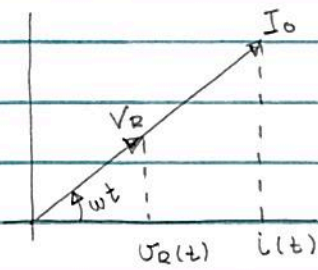
$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} ; I_0 \in \mathbb{R}$$

$$= I_0 \cos \omega t + i I_0 \sin \omega t \rightarrow i(t) = \operatorname{Re}[I(t)] \\ = I_0 \cos \omega t$$

analogamente:

$$V_R(t) = V_R e^{i\omega t} \rightarrow \mathcal{U}_R(t) = \operatorname{Re}[V_R(t)]$$

$\hookrightarrow$  representação gráfica:

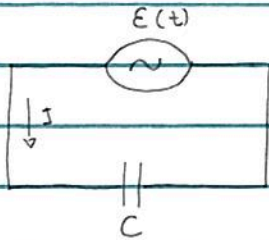


$I_0$  e  $V_R$  : fasores

: Diagrama de fasores

notas: fasores  $V_R$  e  $I_0$  //  $\sim v_R(t)$  e  $i(t)$  em fase !

(b) capacitor  $\oplus E(t)$ ,



$V_c = V_c(t)$  : ddp entre terminais capacitor C

Como  $E = V_c$

$$L > V_c(t) = E_0 \cos \omega t \equiv V_c \cos \omega t$$

$$\text{Como } q(t) = C V_c(t) \quad \text{e} \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$L > i(t) = -\omega C V_c \sin \omega t = \omega C V_c \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$\text{definido } i(t) = I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$L > I_0 = \omega C V_c \quad \text{ou} \quad V_c = \frac{1}{\omega C} I_c \quad : \text{notas analogia "V = RI"}$$

(135.1)

Relaçãõ entre as amplitudes de  $V_c(t)$  e  $i(t)$  !

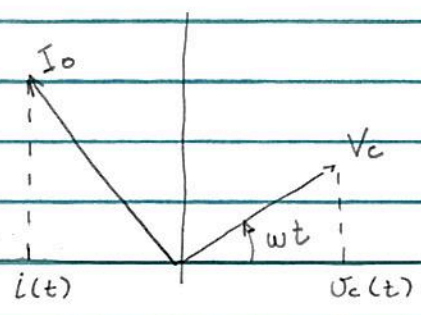
$X_c = \frac{1}{\omega c}$  : reatância capacitiva (136.1)

unidade :

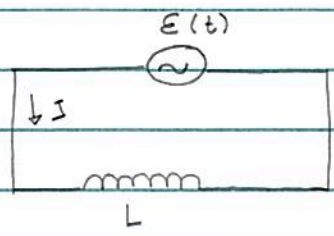
Lembrar que  $[RC] = s \rightarrow [X_c] = [R] = \Omega$

graficamente :

notas :  $I_0$  e  $V_c$   
 $\neq$  fase entre  
 $V_c(t)$  e  $i(t) = \pi/2 !$



(c) indutor  $\oplus E(t)$ ,



$V_L = V_L(t)$  : ddp entre terminais indutor L

como  $E = V_L(t)$

$L \rightarrow V_L(t) = E_0 \cos \omega t \equiv V_L \cos \omega t$

como  $V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow i(t) = \frac{V_L}{\omega L} \sin \omega t$   
 $= \frac{V_L}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$

definindo  $i(t) = I_0 \cos(\omega t - \pi/2)$

$L \rightarrow I_0 = \frac{V_L}{\omega L}$  ou  $V_L = (\omega L) I_0$  (136.1)

comparar c/ (135.1)

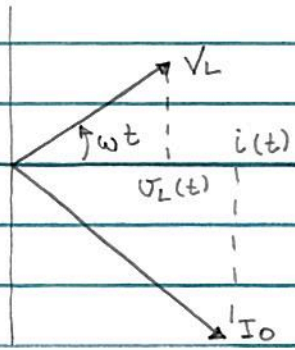


$X_L = \omega L$  : reatância indutiva

unidade :

Lembrar que :  $\left[ \frac{L}{R} \right] = S \rightarrow [X_L] = [R] = \Omega$ .

graficamente :



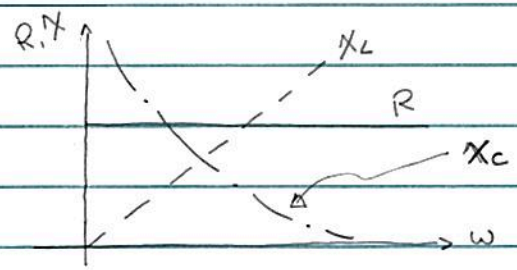
notas :  $I_0 \perp V_L \sim$   
 ≠ fase entre  
 $v_L(t)$  e  $i(t) = \pi/2$  !

Resumo resisten, capacitor, indutor ⊕ corrente alternada :

Resistor	$V_R = R I$	$R$	} $X = X(\omega)$ !
Capacitor	$V_C = X_C I$	$X_C = 1/\omega C$	
Indutor	$V_L = X_L I$	$X_L = \omega L$	

relação entre amplitudes

(137.1)



notas : relações entre amplitudes p/ circuito ac são análogas a  $V = RI$  p/ circuito dc

• notar : se  $v_i(t) = V_i \cos(\omega t + \phi_i)$  ,  $i=1,2$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = V_1 \cos(\omega t + \phi_1) + V_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\hookrightarrow v(t) = \text{Re} [ V_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + V_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} ]$$

ou, em termos de fasores :  $V = V_1 + V_2$  : "soma vetorial"

(138.1)

• Considerar circuito RLC série, pg. 127 :

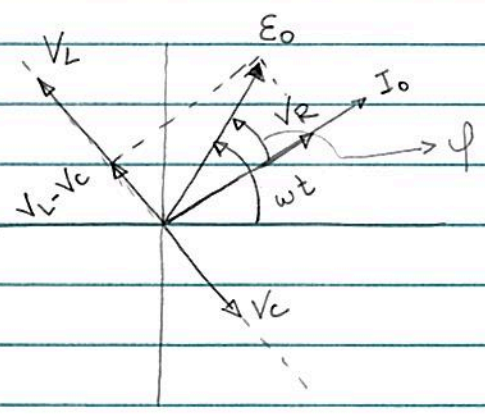
$$\sum v = 0 \quad : \quad E(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t) \quad (138.2)$$

(malha)

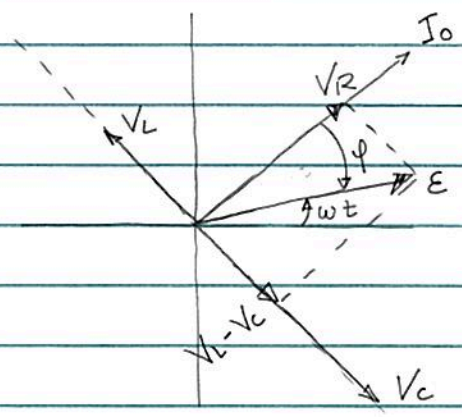
(138.1)  $\rightarrow$  (138.2)  $\sim$  soma vetorial de fasores :

$$E_0 = V_R + V_C + V_L \equiv V$$

elementos em série  $\rightarrow$  apenas um fasor corrente  $I$



$X_L > X_C$



$X_L < X_C$

notar : após a escolha de  $I_0$ , as  $\neq s$  fase entre  $I_0, V_R, V_C$  e  $V_L$  seguem os diagramas de fasores pgs. 135 - 137 !

soma vetorial fasores

$$\hookrightarrow \varepsilon_0^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 = I_0^2 R^2 + I_0^2 (X_L - X_C)^2$$

↑  
Eq. (137.1)

$$\hookrightarrow I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \begin{array}{l} \text{: amplitude} \\ \text{conente} \end{array} \quad (139.1)$$

Definindo :  $V \equiv \varepsilon_0$   
 $Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  : impedância (139.2)

$$(139.1) : V = Z I_0 \quad \text{: p/ circuito ac} \quad (139.3)$$

↳ notar analogia  $V = RI$  p/ circuito dc!

unidade :  $[Z] = [R] = \Omega$

• sobre a diferença de fase  $\varphi$  entre  $v(t)$  e  $i(t)$ ,

pela figura, pg. 138 :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{I_0 (X_L - X_C)}{I_0 R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (139.4)$$

Dessa forma,

$$\text{se } v(t) = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t \quad (139.5)$$

$$\hookrightarrow i(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t - \varphi) \quad ; \quad I_0 = I_0(\omega) \quad \text{: Eq. (139.1)}$$

$$\varphi \quad \text{: Eq. (139.4)}$$

↳ solução estacionária (particular) Eq. (127.2)!

sobre a amplitude da corrente (139.1)

notar  $I_0 = I_0(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$  : amplitude  $I \propto \omega!$

se  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow I_0 \rightarrow \omega C E_0 \sim X_C \gg X_L$

$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow I_0 \rightarrow \frac{E_0}{\omega L} \sim X_C \ll X_L$

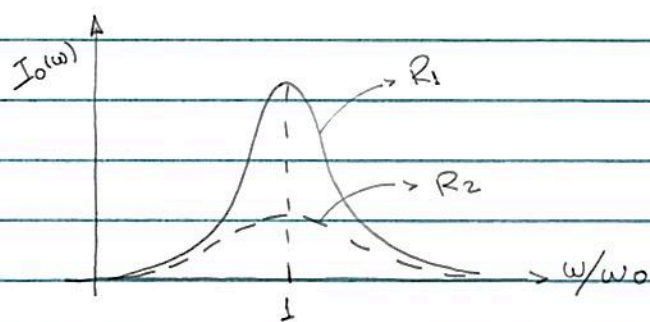
$X_C = X_L \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$  : frequência natural de

$\hookrightarrow I_0$  : MÁXIMO : ressonância

oscilação sistema Eq. (128.2)

Exercício : Verificam que  $\frac{dI_0(\omega)}{d\omega} = 0$

$\hookrightarrow \omega = \omega_0 !$



$R_1 < R_2 !$

Ressonância : resposta do sistema  $i = i(t)$  é máxima quando a frequência  $\omega$  da perturbação externa  $E = E(t)$  é igual à frequência de oscilação natural do sistema,  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} !$

• sobre a potência em um circuito ac

- potência instântanea dissipada no resistor R do circuito RLC-série :

$$p(t) = R i^2(t) = R I_0^2 \cos^2(\omega t - \varphi); \tag{141.1}$$

↑  
Eq. (139.5)

entretanto, a quantidade interessante é a potência média dissipada em um período  $\bar{P}$

Lembrar que, p/ função periódica  $f(t)$ :

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad : \text{valor médio } f(t) \text{ em um período } T \tag{141.2}$$

(141.1) ⊕ (141.2) :

$$\bar{P} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = R I_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\cos^2(\omega t - \varphi)}_{\frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t - 2\varphi))} dt$$

$$\hookrightarrow \langle p(t) \rangle = \bar{P} = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

• definindo :  $I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  : valor quadrático médio de I (root mean square)

$$\hookrightarrow \bar{P} = I_{rms}^2 R \quad : \text{potência média dissipada em } R \tag{141.3}$$

Obs.: notar analogia c/ circuito dc!

- potência média fornecida p/ o circuito pela fonte emf alternada:

$$\begin{aligned} \text{como } p(t) &= E(t)i(t) = E_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) \\ &= E_0 I_0 (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \bar{P} = \langle p(t) \rangle = E_0 I_0 \cos \varphi \underbrace{\langle \cos^2 \omega t \rangle}_{1/2} + E_0 I_0 \sin \varphi \underbrace{\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle}_0$$

$$\hookrightarrow \bar{P} = \frac{1}{2} E_0 I_0 \cos \varphi = E_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \varphi \quad (142.1)$$

notas:

$\bar{P} \propto \neq$  fase entre  $E(t)$  e  $i(t)$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad : \text{ fator de potência}$$

↑  
verificar!

$\hookrightarrow$  p/ circuito RLC-série:

(i)  $R = 0 \rightarrow \varphi = \pi/2 \rightarrow \bar{P} = 0 \sim$  oscilação energia entre indutor e capacitor.

(ii) se  $X_L = X_C \rightarrow Z = R \rightarrow \varphi = 0$

$$\hookrightarrow \bar{P} = \bar{P}_{\text{MAX}} = \frac{1}{2} E_0 I_0 \sim \text{ressonância.}$$

## A Lei de Ampère - Maxwell

Resumo eletromagnetismo (até o momento):

$$\text{Eq. (25.2)} : \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad : \quad \text{Lei de Gauss}$$

$$\text{Eq. (85.3)} : \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad : \quad \# \text{ monopolo magnético}$$

(143.1)

$$\text{Eq. (111.2)} : \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad : \quad \text{Lei de Faraday}$$

$$\text{Eq. (99.1)} : \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I \quad : \quad \text{Lei de Ampère}$$

notas: Lei de Faraday relaciona a circulação do campo elétrico  $\vec{E}$  ao longo caminho fechado  $\Gamma$  com a variação temporal do fluxo do campo magnético  $\vec{B}$  através superfície  $S$  (contorno =  $\Gamma$ )

↳ por simetria, espera-se uma relação análoga entre a circulação de  $\vec{B}$  e a variação temporal fluxo  $\vec{E}$ .

notas: circulação  $\vec{B} \sim$  Lei de Ampère.

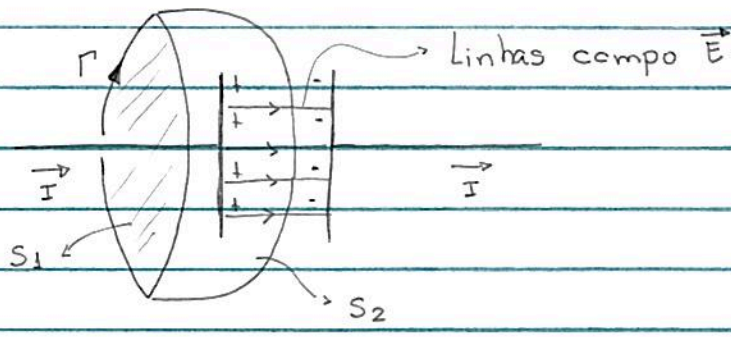
Entretanto, Lei de Ampère  $\neq$  termos  $\sim \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  pois

foi derivada p/ campos estáticos  $\sim$  condições estacionárias

↳  $\vec{E}$  necessário corrigir a Lei de Ampère!

O exemplo abaixo demonstra esse fato.

Considerar capacitor placas planas e paralelas,  
processo de carga



$S_1$ : superficie plana,  
↳ fio

$S_2$ : superficie curva

### Lei de Ampere

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I$$

ou : contradição!

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 !$$

• ideia conexão Lei de Ampere:

- introduzir termo extra de corrente  $\equiv I_D$
- como  $\exists$  campo elétrico entre placas capacitor  $\rightarrow I_D \propto \vec{E}$

notas: é possível escrever o termo  $\mu_0 I$  da seguinte forma:

$$\mu_0 I = \mu_0 \frac{dQ}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(Q)}{dt} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(Q/A)}{dt}$$

como p/ capacitor placas planas e //s:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$



$$\hookrightarrow \mu_0 I = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (EA)$$

Como  $\Phi_E = EA$  : fluxo campo elétrico através superfície plana,  $\vec{E} \perp \vec{A}$

$\hookrightarrow$  caso geral :

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (145.1)$$

Eq. (145.1) : corrente de deslocamento

• Adicionando (145.1) ao R.H.S. Lei de Ampère

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 (I + I_D) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (145.2)$$

Lei de Ampère-Maxwell

Obs. :

(1) proposta p/ introduzir  $I_D$  : Maxwell

(2) motivação p/ introduzir  $I_D$  : inconsistência na teoria,  
ex. : Lei de Ampère  $\oplus$  processo  
Carga Capacitor (pg. 144)

(conexão não é motivada  
por resultado experimental !)

novamente, resumindo eletromagnetismo (EM) :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

: Equações de Maxwell  
(vácuo)

(146.1)

$$\oint_r \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

• Eqs. de Maxwell ⊕

: relações fundamentais  
EM !

Lei de Lorentz :  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

notas (146.1) :

- fontes  $\vec{E}$  : cargas elétricas,  
 $\vec{B}$  ou  $\Phi_B$  variáveis no tempo

- fontes  $\vec{B}$  : correntes elétricas,  
 $\vec{E}$  ou  $\Phi_E$  variáveis no tempo

Obs. (146.1) : forma integral eqs. de Maxwell

• consideramos (146.1) região espaço tal que  $Q=0$  e  $I=0$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(147.1)

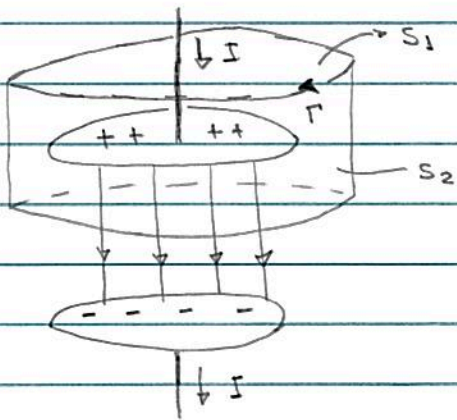
notam simetria entre as eqs.!

(147.1)  $\rightarrow$  campos  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$  : obedecem eq. de onda,  
 $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$  velocidade de propagação  $= c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

• Verificação experimental  $\exists$  ondas EM (Hertz)

$\hookrightarrow$  introdução  $I_0$  em lei de Ampère OK!

Ex.: capacitor placas planas e  $\parallel =$  discos raio  $R$ ,  
 processo de carga



$S_1$ : disco raio  $r > R$

$S_2$ : cilindro

Dois casos:

(i) Lei de Ampère-Maxwell p/ curva  $\Gamma$  e superfícies  $S_1$  e  $S_2$ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

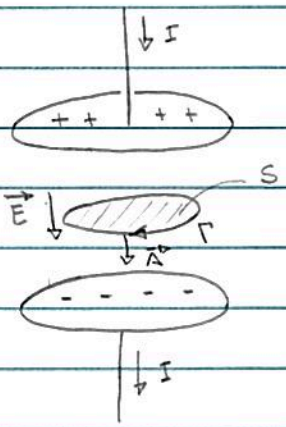
$$= \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{A} + 0 = \mu_0 I$$

$$= 0 + \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (\vec{E} A)}_{\sim \vec{E} \perp \vec{A}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot A \right) = \mu_0 I$$

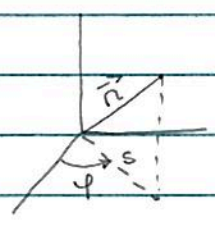
$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt}$$

notar  $I_D = I$  !

(ii) determinar  $\vec{B}$  região entre placas capacitor



$\Gamma$ : círculo raio  $r$   
 $S$ : disco raio  $r$



Eq. (145.2):  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$

como  $\vec{B} \perp d\vec{e}$  e  $\vec{E} \perp d\vec{A}$

$$\hookrightarrow 2\pi n B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (E \pi n^2) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{Q}{\epsilon_0 \pi R^2} \pi n^2 \right)$$

se  $n > R$

$$\hookrightarrow 2\pi n B = \mu_0 \frac{dQ}{dt} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi n}$$

se  $n < R$

$$\hookrightarrow 2\pi n B = \frac{\mu_0 n^2}{R^2} \frac{dQ}{dt} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I n}{2\pi R^2}$$

notas região entre placas capacitor (coordenadas cilíndricas):

$$\vec{E} = \vec{E}(t) = - \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A} \hat{z}$$

$$\vec{B} = - \frac{\mu_0 I n}{2\pi R^2} \hat{\phi}$$

## · Ondas eletromagnéticas

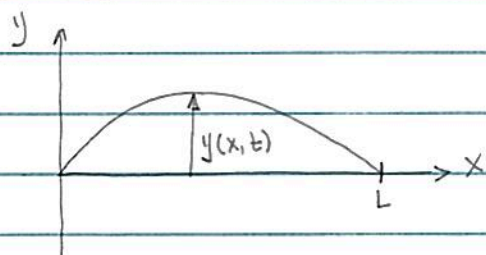
· ideia: exemplificar que eqs. de Maxwell

↳ campos  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$  satisfazem eq. de onda

· Lembra: eq. de onda p/ corda vibrante em 1-D:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad : \text{ eq de onda} \quad (150.1)$$

$y = y(x, t)$ : função de onda ~ deslocamento transversal  
corda



· caso geral:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = E_x(x, y, z, t) \hat{x} + E_y(x, y, z, t) \hat{y} + E_z(x, y, z, t) \hat{z}$$

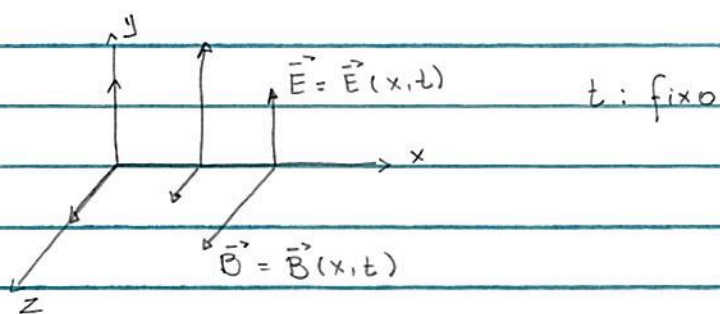
$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = B_x(x, y, z, t) \hat{x} + B_y(x, y, z, t) \hat{y} + B_z(x, y, z, t) \hat{z}$$

hipótese:  $\vec{E} = E_y(x, t) \hat{y} \quad : \text{ caso particular} \quad (150.2)$   
 $\vec{B} = B_z(x, t) \hat{z}$

vamos verificar que (150.2) satisfaz eqs. de Maxwell (vácuo)  
na ausência cargas  $\rho$  e correntes  $\mathbf{J}$  [Eq. (147.3)] se  
 $E_y$  e  $B_z$  obedecem eq. de onda (150.1)

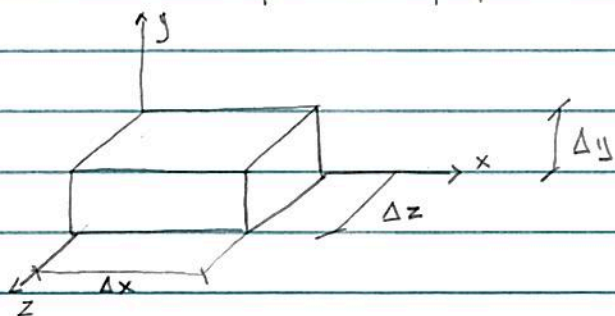
ideia demonstraçãõ: verifican que (150.2) satisfaz (147.1) p/  
 $\Gamma/S = \text{retângulos infinitesimais.}$

Lembran:  $\Gamma$  arbitrário =  $\sum \Gamma$  infinitesimais  
 $S$  " = "  $S$  "



notan: p/ x e t fixos,  
 $\vec{E} \perp \vec{B}$  !

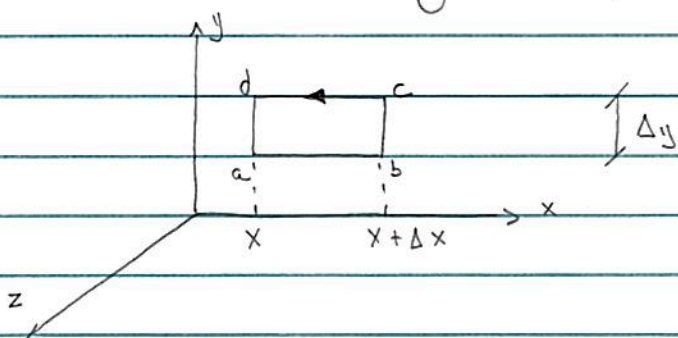
• consideran paralelepipedo infinitesimal, arestas  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$



verifica-se (exercício) que para essa sup. fechada


$$(150.2) \rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

• consideran  $\Gamma = \text{retângulo infinitesimal } \subset \text{ plano } x-y$



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_b^c E_y dy + \int_d^a E_y dy = E_y(x+\Delta x, t) \Delta y - E_y(x, t) \Delta y$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B_z dA = B_z(x, t) \Delta x \Delta y$$

↳  definido por  $\Gamma$  !

Eq. (147.1) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

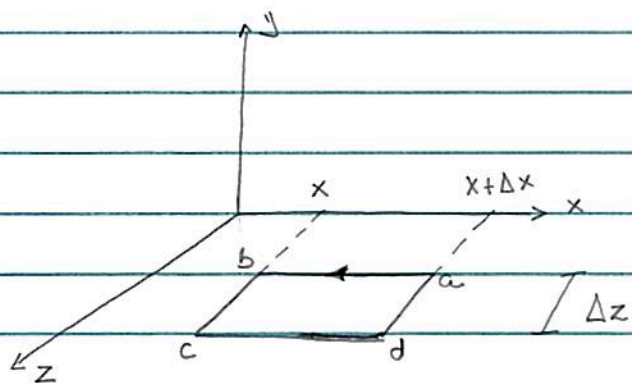
$$\hookrightarrow (E_y(x+\Delta x, t) - E_y(x, t)) \Delta y = - \frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} \quad (152.1)$$

Verifica-se que (exercício)  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

se  $\Gamma/S =$  retângulo infinitesimal  $\subset$  plano  $xz$   
 " " = " " " " " "  $yz$

• consideram  $\Gamma =$  retângulo infinitesimal  $\subset$  plano  $xz$





$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_c^b B_z dz + \int_d^a B_z dz = B_z(x, t) \Delta z - B_z(x + \Delta x, t) \Delta z$$

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_s E_y dA = E_y(x, t) \Delta x \Delta z$$

Eq. (147.1):

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_s \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\hookrightarrow (B_z(x, t) - B_z(x + \Delta x, t)) \Delta z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} \Delta x \Delta z$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad - \frac{\partial B_z(x, t)}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} \quad (153.1)$$

notas:

$$\frac{\partial}{\partial x} (152.1) : \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (153.1) : \quad - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2} \quad : \text{ eq. de onda } \quad (153.2)$$

p/  $E_y(x, t)$

velocidade  
propagação:  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$  : velocidade da luz!

Obs.: verifica-se que (exercício)  $B_z(x,t)$  satisfaz eq. de onda (153.2)

↳ solução (particular) (150.2) satisfaz eqs. de Maxwell (vácuo) na ausência de fontes (147.1) se  $E_y$  e  $B_z$  satisfazem eq. de onda (153.2)!

• Apesar (150.2) = caso particular, podemos identificar algumas características gerais ondas EM:

(i)  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$   $\perp$  direção de propagação  $\rightarrow$  ondas EM são transversais. De fato,  
 $\vec{E} \times \vec{B} \propto$  sentido propagação onda

(ii) Ondas EM se propagam no vácuo ( $\neq$  ondas mecânicas que se propagam em um meio)  $\propto$  velocidade = velocidade da luz!