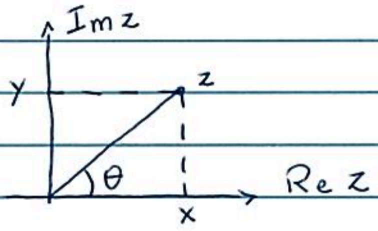
Aula 4

Revisão: números complexos

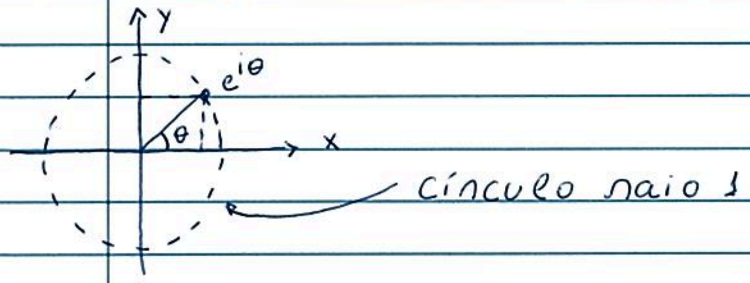
$$i \equiv \sqrt{-1}$$

$$z = x + iy = |z|e^{i\theta}$$



$$\text{tg}\,\theta = y/x \quad \text{e} \quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

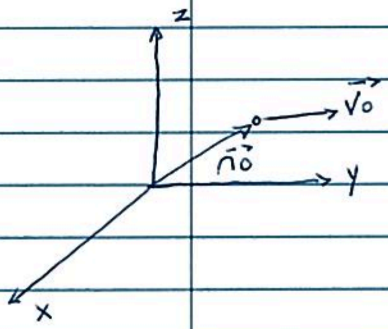
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$: Fórmula de Euler



Ex.: $\theta = \omega t$

↳ frequência angular.

Ex. 6: partícula carregada + campo magnético $\vec{B}$



↑ $\vec{B} = B\hat{z}$: campo mag. uniforme

condições iniciais: $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

q: carga elétrica partícula

Lei de Lorentz: $\vec{F} = \overset{0}{\cancel{q\vec{E}}} + q\vec{v}\times\vec{B}$

$$= q(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \times B\hat{z}$$

$$= qB(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x})$$

Eq. de movimento :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = qB(V_y\hat{x} - V_x\hat{y})$$

$$\left.\begin{aligned} \text{direção } \hat{x} &: \quad m\dot{V}_x = qBV_y \\ \hat{y} &: \quad m\dot{V}_y = -qBV_x \end{aligned}\right\} \text{2 eq. diferenciais acopladas !}$$

$$\hat{z} : \quad m\dot{V}_z = 0$$

direção $\hat{z}$: $V_z = C_1$

$$\frac{dz}{dt} = C_1 \Rightarrow z = C_1 t + C_2$$: mov. uniforme.

c.i. : $C_1 = V_{0z}$ e $C_2 = z_0$

direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$:

definir : $\omega = \frac{qB}{m}$: frequência ciclotrônica

↳ $\dot{V}_x = \omega V_y$

$\dot{V}_y = -\omega V_x$ $\times i$

$$\oplus \Rightarrow \underbrace{\dot{V}_x + i\dot{V}_y}_{\dot{\eta}\in\mathbb{C}} = -i\omega(\underbrace{V_x + iV_y}_{\eta\in\mathbb{C}})$$

↳ $\dot{\eta} = -i\omega\eta$: eq. diferencial de primeira-ordem

solução : $\eta = Ae^{-i\omega t}$; $A = \underset{\text{módulo}}{\underset{\uparrow}{a}}e^{i\delta}$ ↖ fase

$$\eta = ae^{i(\delta-\omega t)} = V_x + iV_y = \underbrace{a\cos(\delta-\omega t)}_{V_x(t)} + \underbrace{ia\sin(\delta-\omega t)}_{V_y(t)}$$

C.i. : $V_x(0) = V_{ox}$ e $V_y(0) = V_{oy}$ — Notar: 2 c.i e 2 ctes a determinar

↳ $V_{ox} = a\cos\delta$ e $V_{oy} = a\sin\delta$

$V_x = a\cos\delta\cos\omega t + a\sin\delta\sin\omega t$

$V_y = a\sin\delta\cos\omega t - a\cos\delta\sin\omega t$

↳ $V_x = V_{ox}\cos\omega t + V_{oy}\sin\omega t$ — Exercício: mostrar que ↵

$V_y = -V_{ox}\sin\omega t + V_{oy}\cos\omega t$

$V_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow x = \frac{V_{ox}}{\omega}\sin\omega t - \frac{V_{oy}}{\omega}\cos\omega t + C_1$

$V_y = \frac{dy}{dt} \rightarrow y = \frac{V_{ox}}{\omega}\cos\omega t + \frac{V_{oy}}{\omega}\sin\omega t + C_2$

C.i. : $x(0) = -V_{oy}/\omega + C_1 = x_o \Rightarrow C_1 = x_o + V_{oy}/\omega$

$y(0) = V_{ox}/\omega + C_2 = y_o \Rightarrow C_2 = y_o - V_{ox}/\omega$

↳ $x(t) = \frac{V_{ox}}{\omega}\sin\omega t - \frac{V_{oy}}{\omega}\cos\omega t + V_{oy}/\omega + x_o$

$y(t) = \frac{V_{ox}}{\omega}\cos\omega t + \frac{V_{oy}}{\omega}\sin\omega t - V_{ox}/\omega + y_o$

$z(t) = V_{oz}t + z_o$: eq. paramétrica da trajetória

hipótese : Se $V_{oy} = 0$, $x_o = 0$ e $y_o = V_{ox}/\omega$

↳ $x(t) = \frac{V_{ox}}{\omega}\sin\omega t$

$y(t) = \frac{V_{ox}}{\omega}\cos\omega t$

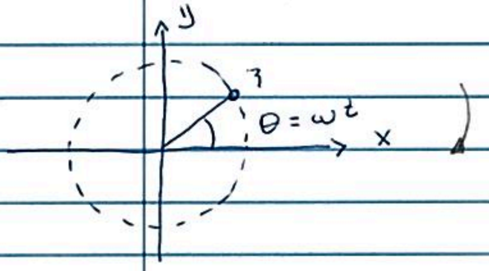
$z(t) = V_{oz}t$

: eq. paramétrica hélice

raio : $\frac{V_{ox}}{\omega} = \frac{V_{ox}\,m}{qB}$

Notar que:

$$z = x+iy = \frac{iV_{ox}}{\omega}\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right) = \frac{V_{ox}}{\omega}e^{-i(\omega t - \pi/2)}$$



Se $V_{oz} = 0$ ⇒ órbita circular!

Soluções alternativas: veja Marion, cap. 2 → Ref. [1]
e Fowles, sec. 4.5 → Ref. [3]

Comentário : partícula carregada + campos elétricos $\vec{E}$
e magnéticos $\vec{B}$

$\vec{B} = B\hat{z}$ e $\vec{E} = E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$

Eq. de movimento : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

direção $\hat{x}$: $m\dot{v}_x = qBv_y$

" $\hat{y}$: $m\dot{v}_y = -qBv_x + qE_y$

" $\hat{z}$: $m\dot{v}_z = qE_z$

temos que :

$$z(t) = z_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{qE_z}{m}t^2$$: mov. uniformemente acelerado

eq. diferencial p/ $\eta = v_x + iv_y$

$\dot{\eta} = -i\omega\eta + i\eta_0$; $\eta_0 = qE_y/m$

Solução : (detalhes no próximo capítulo)

$\eta = Ae^{-i\omega t} + \eta_0/\omega$ (verificar!)

$= ae^{i(\delta-\omega t)} + \eta_0/\omega$

↳ $v_x = a\cos(\delta-\omega t) + \eta_0/\omega$

$v_y = a\sin(\delta-\omega t)$

e $x(t) = -\frac{a}{\omega}\sin(\delta - \omega t) + \frac{\eta_0 t}{\omega} + C_1$

$y(t) = \frac{a}{\omega}\cos(\delta - \omega t) + C_2$

→ Comparar c/ Ex. 6, termo extra.

Notar que:

$\eta_0/\omega = E_y/B \rightarrow \eta_0/\omega\,\hat{x} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$

p/ referencial O' que se movimenta com

$\vec{v}_D = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$ em relação a O:

$\vec{r}\,' = \vec{r} - \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}\,t$

↳ $x'(t) = -\frac{a}{\omega}\sin(\delta - \omega t) + C_1$

$y'(t) = \frac{a}{\omega}\cos(\delta - \omega t) + C_2$

: eq. da trajetória da partícula no referencial O'

Componente "E_y" foi "eliminada" no ref. O' !

Veja também problema 2-22 da Ref. [1].