Revisão: cálculo vetorial

- vetor v.s. escalar.

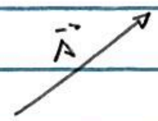
  - escalar: magnitude

    Ex.: massa, carga, densidade

  - vetor: magnitude (módulo), direção e sentido (1ª ideia!)

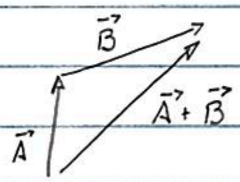
    Ex.: posição, velocidade, força, campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$

se $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ vetores



↳ Operações:

(i) adição: $\vec{A} + \vec{B}$



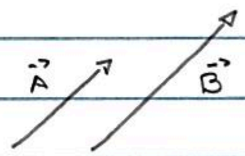
propriedades: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$: comutativa

$(\vec{A}+\vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B}+\vec{C})$: associativa

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

(ii) multiplicação por escalar:

Se $a \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{B} = a\vec{A}$

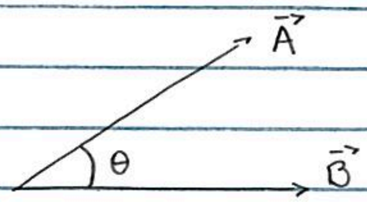


$(a > 0)$

propriedade: $a(\vec{A}+\vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$: distributiva

(iii) produto escalar:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv \underbrace{A}_{\text{módulo } \vec{A}:\ A = |\vec{A}|} B \cos\underbrace{\theta}_{\measuredangle \text{ entre } \vec{A} \text{ e } \vec{B}} \quad : \text{escalar} \qquad (1.1)$$



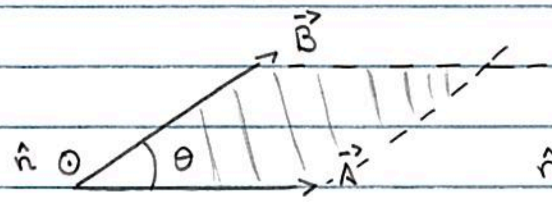
propriedades : $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$: comutativa
$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$: distributiva

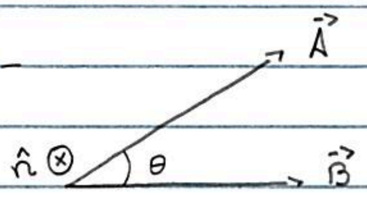
notar : se $\vec{A} \perp \vec{B} \rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

$$A = \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} \quad : \text{módulo vetor } \vec{A}$$

(iv) produto vetorial :

$$\vec{A}\times\vec{B} \equiv AB\sin\theta\,\hat{n} \quad : \text{vetor} \qquad (2.1)$$





notar : direção $\hat{n}$ = "regra mão direita"

propriedades : $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$: distributiva
$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{C}$

notar : se $\vec{A} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0$

$|\vec{A}\times\vec{B}|$ = área paralelogramo definido por $\vec{A}$ e $\vec{B}$!

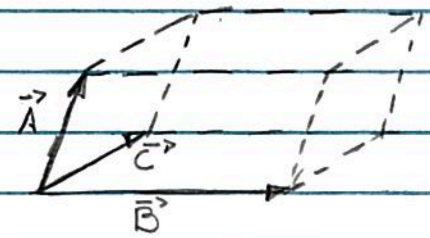
(v) produtos triplo :

Eqs. (1.1) e (2.1) $\rightarrow$

↳ $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$: escalar (3.1)

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$: vetor (3.2)

Lembrar: $|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$ = volume paralelepípedo definido por $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$



· Álgebra vetorial,

Representação vetor $\vec{A}$ em termos vetores unitários $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$
(base)

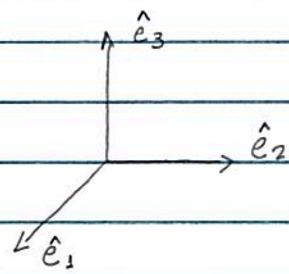
propriedades: $\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1 = \hat{e}_2\cdot\hat{e}_2 = \hat{e}_3\cdot\hat{e}_3 = 1$

$\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2 = \hat{e}_1\cdot\hat{e}_3 = \hat{e}_2\cdot\hat{e}_3 = 0$

$\hat{e}_1\times\hat{e}_2 = \hat{e}_3$, $\hat{e}_2\times\hat{e}_3 = \hat{e}_1$, $\hat{e}_3\times\hat{e}_1 = \hat{e}_2$

↳ $\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{e}_i$: representação vetor $\vec{A}$

A_1 → componente $\vec{A}$ na direção $\hat{e}_1$!

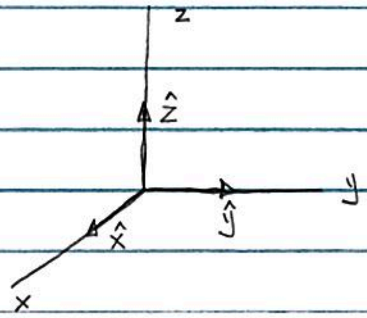


: mutuamente ortogonais!

em particular, em <u>coordenadas</u> <u>cartesianas</u>,

vetores unitários (base) = <u>versores</u> $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

propriedades:
$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$$
$$\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{z} = \hat{y}\cdot\hat{z} = 0 \qquad (4.1)$$
$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$$



componente $\vec{A}$ na direção $\hat{x}$

↳ $\vec{A} = A_x\,\hat{x} + A_y\,\hat{y} + A_z\,\hat{z}$: representação vetor $\vec{A}$ em coordenadas cartesianas

↳ Operações vetoriais (i) - (v) em termos componentes cartesianas:

(i) adição:

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\,\hat{x} + (A_y + B_y)\,\hat{y} + (A_z + B_z)\,\hat{z}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} (A_i + B_i)\,\hat{e}_i \qquad (4.2)$$

(ii) multiplicação por escalar:

$$\vec{B} = a\vec{A} = aA_x\,\hat{x} + aA_y\,\hat{y} + aA_z\,\hat{z} = \sum_{i=1}^{3} a A_i\,\hat{e}_i \qquad (4.3)$$

(iii) produto escalar:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \equiv \underbrace{A_i B_i}$$

convensão Einstein
(somatório sob índices repetidos!)

(iv) produto vetorial:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, \hat{e}_i A_j B_k = \epsilon_{ijk}\, \hat{e}_i A_j B_k$$

símbolo Levi-Civitá
(veja abaixo)

ou

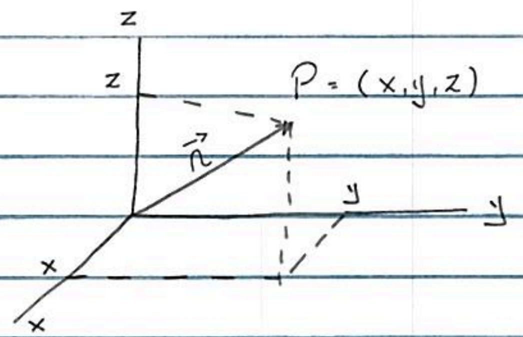
$$(\vec{A}\times\vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$: notar somatório sob "j" e "k".

(v) produtos triplo:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

Exercício: utilizar ϵ_{ijk} e verificar Eq. (3.2)

· ponto P : descrito através coordenadas cartesianas (x, y, z)



↳ $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r_i \hat{e}_i$: vetor posição

$d\vec{\ell} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$: deslocamento infinitesimal

$(x, y, z) \longrightarrow (x + dx, y + dy, z + dz)$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

· Lembrar :

(i) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$: delta de Kronecker (6.1)

(ii) $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = xyz,\ yzx,\ zxy \text{ : permutações cíclicas } xyz \\ -1, & ijk = xzy,\ yxz,\ zyx \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ (6.2)

Eq. (6.2) : Símbolo de Levi-Civitá

propriedades : $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ $\qquad \hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{e}_k$

$\delta_{kk} = 3$ $\qquad \delta_{ij}\epsilon_{ijk} = 0$ $\qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

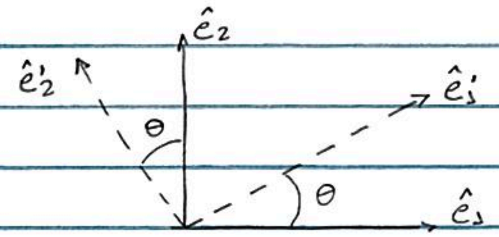
$\epsilon_{ijk}\epsilon_{i\ell m} = \delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell}$

· Transformações ortogonais,

considerar : referencial (REF) O, base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$

" " O', base $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$

hipótese : REF O' = REF O ⊕ rotação ângulo θ w.r.t. $\hat{e}_3$



notar :
$$\hat{e}'_1 = \cos\theta\, \hat{e}_1 + \sin\theta\, \hat{e}_2$$
$$\hat{e}'_2 = -\sin\theta\, \hat{e}_1 + \cos\theta\, \hat{e}_2$$
$$\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$$

ou
$$\hat{e}'_i = \sum_j A_{ij}\, \hat{e}_j \quad ; \quad i = 1,2,3$$

onde
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
: matriz ~ transformação de coordenadas

caso geral :
$$\hat{e}'_i = A_{ij}\, \hat{e}_j \quad ; \quad i = 1,2,3 \qquad (7.1)$$

como $\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}$

$$\hookrightarrow \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \sum_{km} A_{ik} A_{jm} \underbrace{\hat{e}_k \cdot \hat{e}_m}_{\delta_{km}} = \sum_k A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}$$
$$= \sum_k A_{ik} A^T_{kj} = \delta_{ij}$$

$\hookrightarrow \hat{A} \cdot \hat{A}^T = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{A}^T = \hat{A}^{-1}$

• Definição : se matriz $\hat{A}$ descreve uma transformação ortogonal

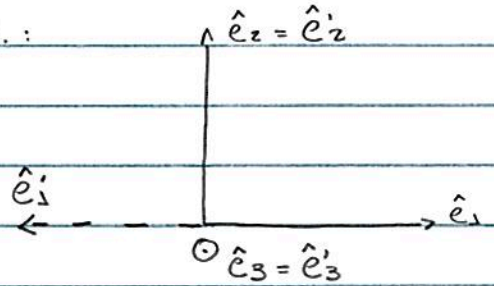
$$\hookrightarrow \hat{A} \cdot \hat{A}^T = \hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} = 1 \qquad (8.1)$$

notar : $\hat{A} \cdot \hat{A}^T = 1 \rightarrow \det(\hat{A} \cdot \hat{A}^T) = \det \hat{A} \cdot \det \hat{A}^T = (\det \hat{A})^2 = 1$

$\hookrightarrow \det \hat{A} = \pm 1 \rightarrow \exists$ 2 classes de transf. $\perp$

$\det \hat{A} = +1$: rotação
$\det \hat{A} = -1$: reflexão, inversão

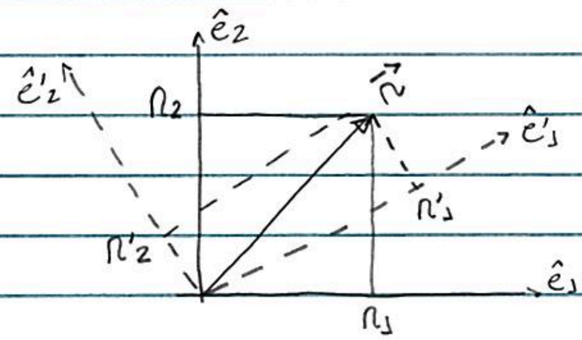
Ex. :



: Reflexão $\quad \hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Inversão : $\hat{e}'_i = -\hat{e}_i \quad \rightarrow \quad A_{ij} = -\delta_{ij}$ ou $\hat{A} = -\hat{1}_{3\times 3}$

• considerar vetor $\vec{r}$ sob transf. de coordenadas $\hat{A}$ (rotação)



: transf. passiva =

= vetor fixo, REFs transformados

↳ $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \hat{e}_i = \sum_{j=1}^{3} r'_j \hat{e}'_j$

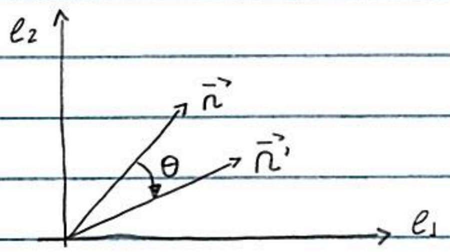
(7.1) → $\sum_i r_i \hat{e}_i = \sum_i \sum_j r'_j A_{ji} \hat{e}_i$

↳ $r_i = A_{ji} r'_j \xrightarrow[(8.1)]{} r'_i = A_{ij} r_j$ (9.1)

Eq. (9.1) : transformação componentes $\vec{r}$ sob transf. ortogonal $\hat{A}$.

* Definição vetor : objeto formado por 3 componentes que se transformam como (9.1) sob transf. $\perp$ $\hat{A}$. (9.2)

· Alternativa : transf. ativa = REF fixo, vetor transformado



comp. $\vec{r}'$ w.r.t. REF O

nesse caso, $\vec{r}' = \hat{A}\vec{r}$ ou $r'_i = A_{ij} r_j$

" $\vec{r}$ " " "

matriz $\hat{A}$: pode ser vista como um operador que transforma $\vec{r}$ em $\vec{r}'$!

caso geral : tensor cartesiano,

· Definição tensor cartesiano $\overleftrightarrow{T}$ ordem (rank): N:

objeto c/ 3^N elementos $\underbrace{T_{ijk\dots}}_{N \text{ índices}}$ tal que

$$T'_{ijk\dots} = A_{il} A_{jm} A_{kn} \dots T_{lmn\dots}$$

sob transformação ortogonal (passiva) $\hat{A}$.

notar: tensor ordem 0 : 1 componente, invariante sob $\hat{A}$: <u>escalar</u>

tensor ordem 1 : 3 componentes : <u>vetor</u>

↳ $T'_i = A_{il} T_l$ = Eq. (9.1)

Tensor ordem 2 : 9 componentes : <u>matriz</u> 3×3

↳ $T'_{ij} = A_{il} A_{jm} T_{lm}$

como $T'_{ij} = A_{il} T_{lm} A^T_{mj}$, podemos escrever

$$\overleftrightarrow{T}' = \hat{A}\overleftrightarrow{T}\hat{A}^T = \hat{A}\overleftrightarrow{T}\hat{A}^{-1}$$: <u>transformação de similaridade</u>

Ex. tensor $N=2$: tensor de inércia $\overleftrightarrow{I}$

Exercício: mostrar que ângulo entre vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é invariante sob transf. ortogonal $\hat{A}$.

Ex.: considerar vetor $\vec{m} = \vec{u} \times \vec{v}$ sob transf. ortogonal $\hat{A}$.

verifica-se que (veja abaixo)

$$m'_i = (\det \hat{A})\, A_{iq} m_q \qquad (11.1)$$

comparar Eqs. (9.1) e (11.1): $\vec{m}$ se transforma como um vetor apenas p/ rotações!

se $\hat{A}$ = reflexão ou inversão $\rightarrow$ $\exists$ sinal "−" !!!

↳ Definição vetor polar = definição (9.2)

Definição pseudovetor ou vetor axial: objeto formado por 3 componentes que se transformam como (11.1) sob transf. $\perp$ $\hat{A}$.

Ex.: vetor polar: $\vec{r}, \vec{v}, \vec{F}, \vec{E}$

" axial: $\vec{\omega}, \vec{L}, \vec{B}$

verifica-se que: axial × polar = polar
polar × polar = axial
axial × axial = axial

produto vetorial

· Vamos verificar (11.1),

em termos de componentes: $m_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$

↳ $m'_i = \epsilon_{ijk}\, u'_j\, v'_k \underset{\uparrow \text{ Eq. (9.1)}}{=} \epsilon_{ijk}\, A_{js}\, u_s\, A_{kl}\, v_l$

$$= \epsilon_{pjk} \underbrace{\delta_{ip}}_{A_{iq}A_{pq}} A_{js} A_{kl}\, u_s v_l = \underbrace{\left(\epsilon_{pjk} A_{pq} A_{js} A_{kl}\right)}_{=(\det \hat{A})\,\epsilon_{qsl}} A_{iq}\, u_s v_l$$

↳ identidade

$$= (\det \hat{A})\, A_{iq} \underbrace{\epsilon_{qsl}\, u_s v_l}_{m_q}$$

· Cálculo vetorial.

considerar : $f = f(\vec{r}) = f(x,y,z)$: função <u>escalar</u>

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x,y,z)$: função <u>vetorial</u>

(i) Operador <u>gradiente</u>.

se $f = f(x) \rightarrow df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$ derivada função $f = f(x)$

se $f = f(x,y,z)$, temos que

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right) \cdot \left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right)$$

$\equiv (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{\ell}$

↳ Definição: gradiente da função f:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \quad : \text{função vetorial} \qquad (13.1)$$

Eq. (13.1): generalização derivada p/ função de 2 ou mais variáveis!

notas: $df = |\vec{\nabla} f|\,|d\vec{\ell}|\cos\theta$

↳ $\measuredangle$ entre $\vec{\nabla} f$ e $d\vec{\ell}$

- Se $\vec{\nabla} f \parallel d\vec{\ell} \rightarrow \cos\theta = 1 \rightarrow df_{MAX}$ p/ $|d\vec{\ell}|$ fixo

↳ $\vec{\nabla} f$: direção máxima variação f. (13.2)

- Se $\vec{\nabla} f \perp d\vec{\ell} \rightarrow \cos\theta = 0 \rightarrow df = 0$

↳ $\vec{\nabla} f \perp$ curvas/superfícies f = cte. (13.3)

podemos escrever (13.1) como

$$\vec{\nabla} f = \underbrace{\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right)}_{(*)} f$$

↳ podemos considerar (*) como um <u>operador</u> atuando sob $f = f(\vec{r})$

Definição <u>operador gradiente</u>:

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \quad : \underline{\text{op. vetorial}} \qquad (13.4)$$

Exercício: mostrar que sob transformação ortogonal $\hat{A}$,
$\vec{\nabla}$ se transforma como um vetor.

Como $\vec{\nabla}$ é um vetor → podemos considerar sua ação sob função vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ via os produtos escalar e vetorial.

(ii) Divergente.

Definição divergente função vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial r_i} \qquad (14.1)$$

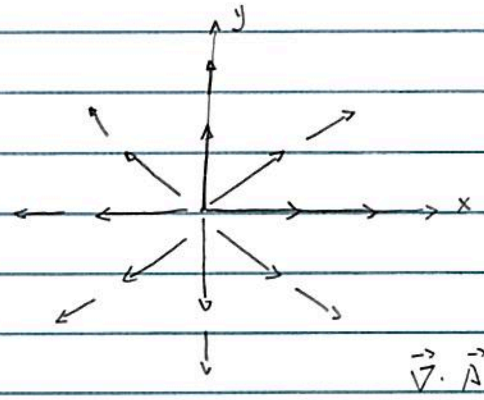
$$= \sum_i \partial_i A_i \quad : \text{escalar}$$

Lembrar que:

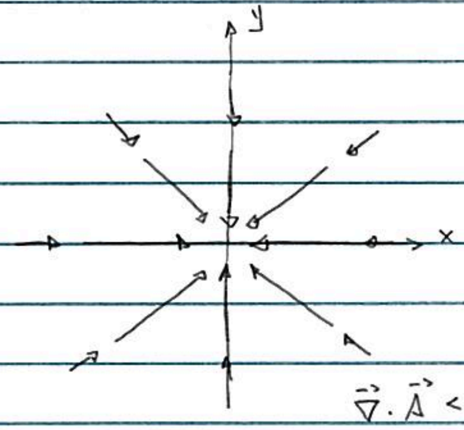
$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x,y,z) =$$

$$= A_x(x,y,z)\,\hat{x} + A_y(x,y,z)\,\hat{y} + A_z(x,y,z)\,\hat{z}$$

idea $|\vec{\nabla} \cdot \vec{A}|$: medida "divergência / convergência" da função vetorial (campo vetorial) w.r.t. pto P.



$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} > 0$



$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} < 0$

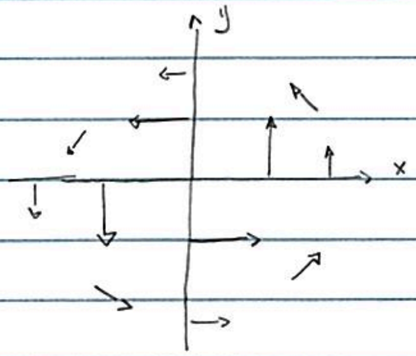
(iii) Rotacional,

Definição rotacional função vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial A_k}{\partial r_j} \quad : \text{vetor} \qquad (15.1)$$

$$= \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \partial_j A_k$$

ideia $\vec{\nabla} \times \vec{A}$: medida da "circulação" da função vetorial (campo vetorial) w.r.t. pto $\underline{P}$.



Ex.: considerar $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z) = \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ e

$$\vec{B} = \vec{B}(x,y,z) = \hat{z} \times \vec{r} = -y\hat{x} + x\hat{y} .$$

Mostrar que : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3$ $\qquad$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ $\qquad$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 2\hat{z}$

· Identidades vetoriais,

se $f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$: funções escalares

e $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ e $\vec{C} = \vec{C}(\vec{r})$: " vetoriais,

verifica-se que:

(1) $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$

(2) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$

(3) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$

(4) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$

(5) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}f)$

(6) $\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = f(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{\nabla}f)\times\vec{A}$

(7) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

(8) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$

(9) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

(10) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f) = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}\right)$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 f$$: Laplaciano função f

notar $\nabla^2 f$: escalar !

(11) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$

(12) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

(13) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

onde $\nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla^2 A_x)\hat{x} + (\nabla^2 A_y)\hat{y} + (\nabla^2 A_z)\hat{z}$: vetor

Obs.: identidade (8):

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = \left(\sum_i B_i \partial_i\right)\left(\sum_j A_j \hat{e}_j\right) = \sum_{ij} B_i (\partial_i A_j)\hat{e}_j$$

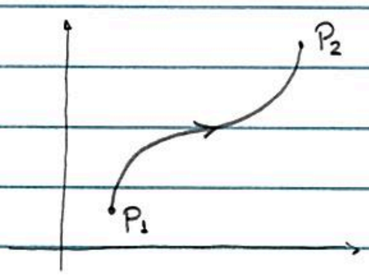
$$= (B_x \partial_x A_x + B_y \partial_y A_x + B_z \partial_z A_x)\hat{x} +$$

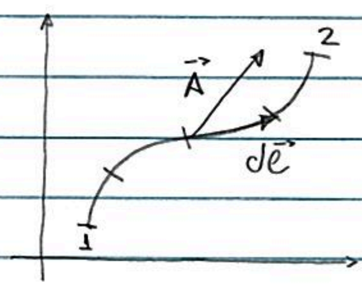
$$+ (B_x \partial_x A_y + B_y \partial_y A_y + B_z \partial_z A_y)\hat{y} +$$

$$+ (B_x \partial_x A_z + B_y \partial_y A_z + B_z \partial_z A_z)\hat{z}$$

· Integrais,

(1) integral de linha,



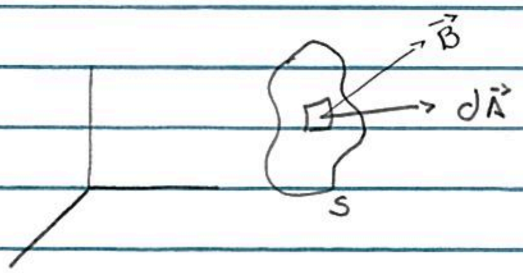


$$I \equiv \int_{1,\Gamma}^{2} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad ; \qquad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$$

onde $d\vec{\ell} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$ (coord. cartesianas) em particular, se Γ curva fechada,

$$\oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad : \text{ circulação vetor } \vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$$

(2) integral de superfície (= fluxo vetor $\vec{B}$ através superfície S),

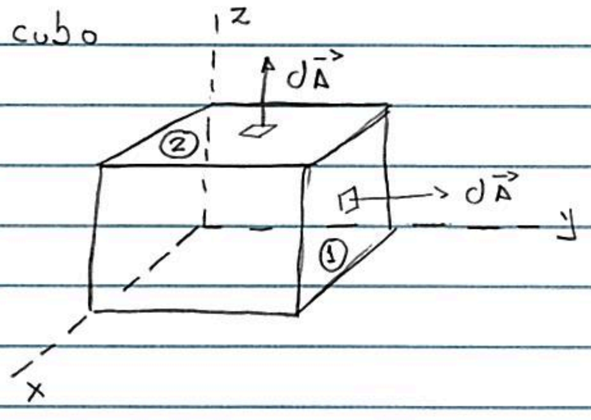


$d\vec{A} = dA\,\hat{n}$: elemento superfície, $\perp$ sup. S

$$I = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad : \text{ fluxo vetor } \vec{B} \text{ através sup. } S$$

Obs. : p/ sup. fechada, direção $\hat{n}$ = "p/ fora"

Ex. : cubo



p/ face ① : $d\vec{A} = dx\,dz\,\hat{y}$

" " ② : $d\vec{A} = dx\,dy\,\hat{z}$

(3) integral de volume,

$$I = \int_V f(\vec{r})\,dV$$

onde $dV = dx\,dy\,dz$ (coord. cartesianas)

· Teoremas fundamentais do cálculo vetorial,

Lembrar: se $F = F(x)$

↳ $\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a)$, onde $F(x) = \frac{df}{dx}$

ou $\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \frac{df}{dx}\,dx = f(b) - f(a)$ (19.1)

Eq. (19.1): Teorema fundamental do cálculo.

p/ funções escalares e vetoriais de 2 ou mais variaveis, temos:

(1) teorema do gradiente,

$$I = \int_{1,\Gamma}^{2} (\vec{\nabla} f)\cdot d\vec{e} = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1) \qquad (19.2)$$

notar: (19.2) depende apenas $\underbrace{\text{ptos inicial e final}}_{}$

= "fronteira"

(comparar Eqs. (19.1) e (19.2))

↳ - I: independe trajetória Γ

- $I = 0$ se Γ curva fechada, i.e., $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$

(2) Teorema de Gauss (teorema do divergente)

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\, dV = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \qquad (20.1)$$

S → sup. definida pelo volume V

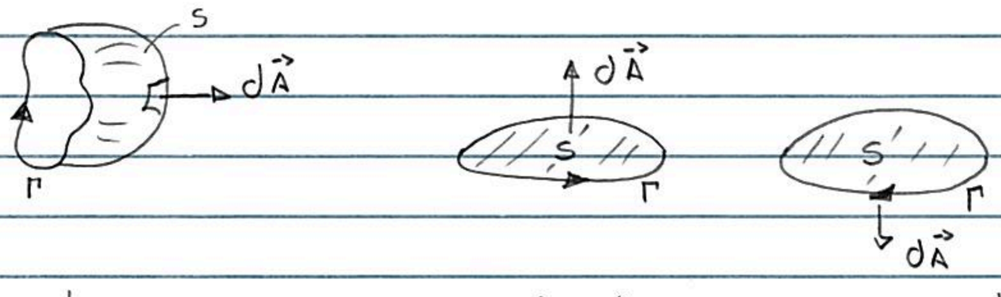
comparar Eqs. (19.1) e (20.1):

integral "derivada $\vec{B}$" ~ comportamento $\vec{B}$ na "fronteira" = sup. S

(3) Teorema de Stokes (teorema do rotacional)

$$I = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{A} = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} \qquad (20.2)$$

Γ → curva definida pela fronteira da sup. S



notar orientação Γ e direção $d\vec{A}$: "regra mão direita"

comparar Eqs. (19.1) e (20.2):

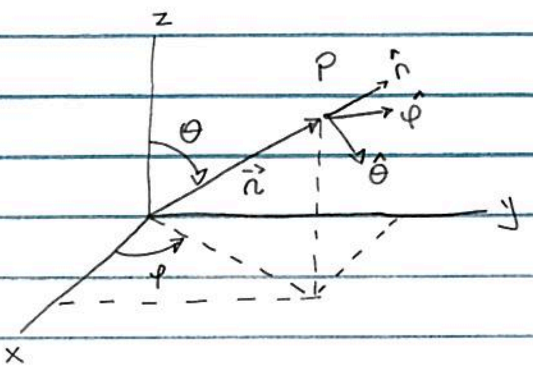
integral "derivada $\vec{B}$" ~ comportamento $\vec{B}$ na "fronteira" = curva Γ.

↳ - I : mesmo valor p/ todas sup. S tais que fronteira = Γ

- $I = 0$, se S sup. fechada, i.e., $\Gamma \to 0$!

· Coordenadas curvilíneas,

(1) coordenada esféricas,



pto P : descrito através coord. cartesianas (x, y, z) ou coordenadas esféricas (r, θ, φ)

Como $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

↳ $x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$

Vetores unitários (base) : $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$
↳ $\vec{r} = r\hat{r}$

verifica-se que

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta, \\
\hat{\theta} &= \hat{x}\cos\theta\cos\varphi + \hat{y}\cos\theta\sin\varphi - \hat{z}\sin\theta, \qquad (21.1) \\
\hat{\varphi} &= -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi
\end{aligned}$$

caso geral : $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$

* importante : $\neq$ versores cartesianos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, os vetores unitários $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ não são fixos, dependem pto $\underline{P}$

· deslocamento infinitesimal : $d\vec{\ell} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$

· elemento volume : $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

· op. gradiente :

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (22.1)$$

se $\vec{A} = \vec{A}(r,\theta,\varphi) = A_r(r,\theta,\varphi)\,\hat{r} + A_\theta(r,\theta,\varphi)\,\hat{\theta} + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\hat{\varphi}$

↳ · $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \qquad (22.2)$$

· $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\hat{\varphi} \qquad (22.3)$$

↳ $$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \qquad (22.4)$$

· Obs. (1) : sobre o op. gradiente (22.1),

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

Como $\vec{\nabla} f = (\vec{\nabla} f)_r \hat{r} + (\vec{\nabla} f)_\theta \hat{\theta} + (\vec{\nabla} f)_\varphi \hat{\varphi}$

e $d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$

↳ $\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla} f)_r dr + (\vec{\nabla} f)_\theta r\,d\theta + (\vec{\nabla} f)_\varphi r\sin\theta\,d\varphi$

$$= df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

↳ Eq. (22.1) !

· Obs. (2) : sobre Eq. (22.2)

Eq. (21.1) ⟶ $\dfrac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}$ $\quad \dfrac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}$ $\quad \dfrac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} = 0$

veja (*) pg. 22 !

$\dfrac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\hat{\varphi}$ $\quad \dfrac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\hat{\varphi}$

$\dfrac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\hat{r} - \cos\theta\,\hat{\theta}$

↳ e.g.,

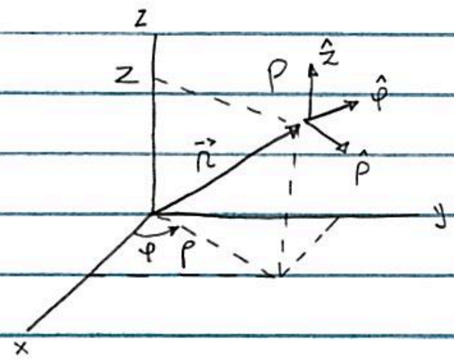
$$\partial_\theta \vec{A} = \hat{r}\,\partial_\theta A_r + A_r \hat{\theta} + \hat{\theta}\,\partial_\theta A_\theta - A_\theta \hat{r} + \hat{\varphi}\,\partial_\theta A_\varphi$$

↳ $\hat{\theta} \cdot \partial_\theta \vec{A} = A_r + \partial_\theta A_\theta$

de modo analogo p/ $\partial_r \vec{A}$ e $\partial_\varphi \vec{A}$

↳ Eq. (22.2).

(2) coordenadas cilíndricas,



pto $\underline{\underline{P}}$: descrito através coord. cartesianas (x, y, z) ou coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z)

como $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

$\hookrightarrow$ $x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$
$z = z$

vetores unitários (base) : $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$

$\hookrightarrow$ $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$

verifica-se que

$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$
$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$

caso geral : $\vec{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}$

$$= A_\rho(\rho,\varphi,z)\hat{\rho} + A_\varphi(\rho,\varphi,z)\hat{\varphi} + A_z(\rho,\varphi,z)\hat{z}$$

· deslocamento infinitesimal : $d\vec{l} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$

· elemento volume: $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

· op. gradiente:

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \quad (25.1)$$

· $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (25.2)$$

· $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{z} \quad (25.3)$$

· $$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (25.4)$$

· Função delta de Dirac,

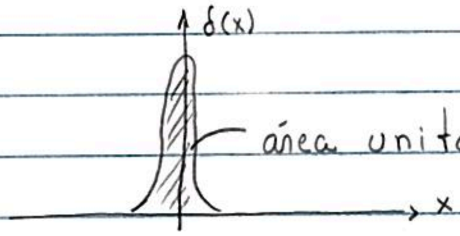
Definição função delta de Dirac 1-D $\delta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x)\, \delta(x-a) = f(a) \qquad (26.1)$$

onde $f = f(x)$ é uma função arbitrária suave.

alternativa (definição informal):

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) = 1 \qquad (26.2)$$

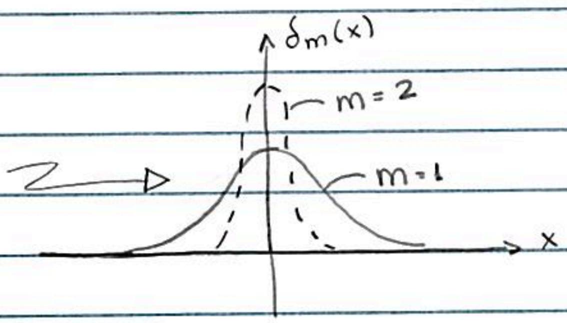


De fato, $\delta(x)$ é uma função generalizada = limite sequência de funções

e.g.,

$$\delta(x) = \lim_{m \to \infty} \frac{\sin mx}{\pi x}$$

$$\delta(x) = \lim_{m \to \infty} \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2 x^2}$$



$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon/\pi}{x^2 + \epsilon^2}$$

· identidades:

(1) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, $a \neq 0$

$\hookrightarrow \delta(-x) = \delta(x)$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \frac{d}{dx}\delta(x-x') = -\frac{df}{dx}\bigg|_{x'} = -f'(x')$$

(3) $\frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x)$,

onde $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$: função degrau

(4) $$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ik(x-x')}$$

· Generalização 3-D.

Eq. (26.1) $\rightarrow$ $$\int_V d^3r\, f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \begin{cases} f(\vec{r}\,'), & \vec{r}\,' \in V \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad (27.1)$$

de modo análogo, Eq. (26.2) :

$$\delta(\vec{r}) = 0,\ r \neq 0 \quad e \quad \int_V d^3r\, \delta(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} = 0 \in V \\ 0, & c.c. \end{cases} \quad (27.2)$$

em particular, em coordenadas cartesianas, temos que

$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$

Ex. 1 : Mostrar que $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \, \delta(\vec{r})$ (28.1)

Eq. (22.2) : $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = 0 \,, \quad r \neq 0$

Como $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\hat{r}}{r^2} = +\infty$, vamos integrar $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right)$ sob uma esfera de raio R, centro = origem, p/ determinar comportamento em torno $\vec{r} = 0$:

$$\int_{V} d^3r \; \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \underset{(20.1)}{=} \oint_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{A} = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \frac{1}{R^2} R^2 \sin\theta = 4\pi$$

V ↳ esfera raio R

↳ Eq. (28.1)

Ex. 2 : Mostrar que $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \, \delta(\vec{r})$ (28.2)

De modo análogo ao Ex. 1,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = 0$$

$$\int_{V} d^3r \; \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \oint_S \underbrace{\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)}_{-\frac{\hat{r}}{r^2}} \cdot d\vec{A} = -4\pi$$

V ↳ esfera raio R