

Eletrô magnetismo

Introdução

Interação eletromagnética: interação fundamental da natureza

Interações fundamentais:

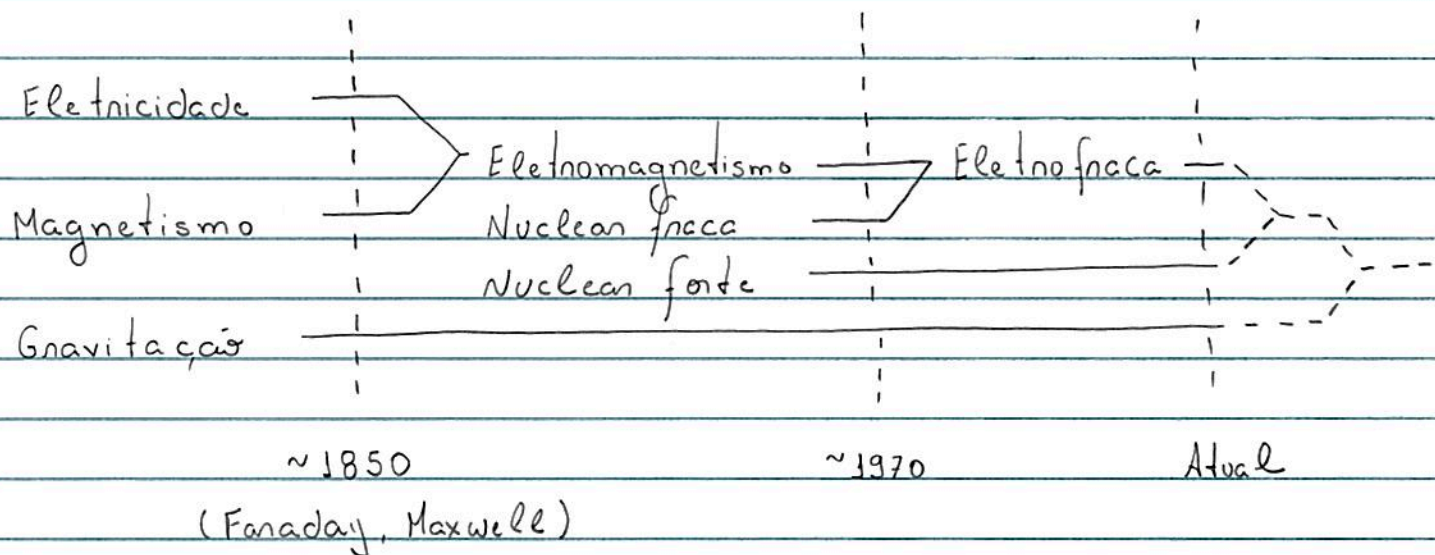
- gravitacional
- nuclear fraca
- eletromagnética
- nuclear forte

↓ intensidade

Interação eletromagnética:

- descrição estrutura da matéria (átomos, moléculas, sólidos)
- escala macroscópica

Unificação interações fundamentais:



• ideia EM : descrevem sistema formado por um conjunto de cargas elétricas

ou

determinam a força que um conjunto de cargas elétricas q_1, \dots, q_n (fontes) exerce em sob uma carga elétrica q (teste)

caso geral : cargas elétricas em movimento

• Resumo curso básico : Eqs. de Maxwell (vácuo), forma integral :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

(2.1)

$$\oint_R \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_R \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

• Eqs. de Maxwell

relações fundamentais

⊕ Lei de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$: EM

notas (2.1) :

- fontes \vec{E} : cargas elétricas ; \vec{B} ou \oint_B variáveis tempo.

- " \vec{B} : correntes \vec{E} " \oint_E " " " .
elétricas ;

ideia Eletro I : - revisão curso básico ⊕ conceitos matemáticos avançados
(Cálculos II e III, Métodos matemáticos)

- EM na matéria

Eletro II : radiação

• Eletrostática,

ideia : determinar a força que um conjunto de cargas elétricas q_1, \dots, q_n (fontes) exercem sob uma carga elétrica q (teste)

⊕ hipótese : fontes em repouso

descrição do sistema, 3 possibilidades :

- Lei de Coulomb : carga \leftrightarrow carga : força; ação à distância

- campo elétrico

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$: carga \leftrightarrow campo \leftrightarrow carga : Campo = mediador interação EM; vetor

- potencial elétrico

$V = V(\vec{r})$: carga \leftrightarrow pot. \leftrightarrow carga : mediador = escalar

· sobre o conceito de carga elétrica (Q ou q):

- propriedade corpo/partícula
- 2 tipos: positiva e negativa (convenção)
- conservada: conservação global
" local (\oplus restritivo)
- quantizada:

$$q = ne, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} : \text{carga elementar}$$

unidade SI : [carga] : coulomb (C)

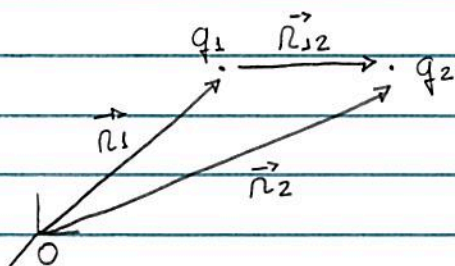
· sobre sistema de unidades:

- SI (mks) : Eletro I
- Gaussiano (cgs) : útil estudo radiação (Eletro II)

$$[carga] : \text{esu} ; \quad 1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9 \text{ esu}$$

· Lei de Coulomb,

considerar: cargas pontuais q_1 e q_2 em repouso no vácuo



$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Experimento: $F_{21} \propto q_1 q_2$

$$\propto \frac{1}{r_{12}^2}$$

$$\hookrightarrow F_{21} \propto \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

escolha constante \sim sistema de unidades

verifica-se que p/ $q_1 = q_2 = 1 \text{ C}$ e $r_{12} = 1 \text{ m}$

$$\hookrightarrow F = 8.9 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{n}_{12} = -\vec{F}_{12} \quad : \text{Lei de Coulomb} \quad (5.1)$$

onde (S.I.)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \frac{c^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} = 8,988 \cdot 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}$$

ou

velocidade da luz (apenas valor numérico, SI unidades)

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2 : \text{cte, permissividade do vácuo}$$

\vec{F}_{ij} : força partícula j sob i : convenção !

notas:

$$\vec{F}_{12} \leftarrow \overset{\hat{n}_{12}}{\bullet} \text{---} \bullet \vec{F}_{21} \quad : q_1 \text{ e } q_2 \text{ sinais } =$$

$$\overset{\vec{F}_{12}}{\bullet} \text{---} \bullet \vec{F}_{21} \rightarrow \hat{n}_{12} \quad : \text{ " e " " } \neq$$

Obs. : Eq. (5.1) no sistema Gaussiano

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{n}_{12}$$

nesse caso : $[q] = \text{esu}$

$[r_{12}] = \text{cm}$

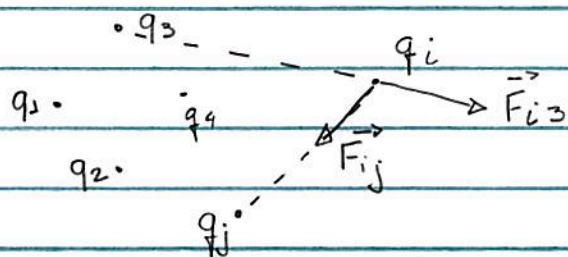
$[F] = \text{dina}$

veja Apêndice C, Griffiths.

Experimento

↳ princípio de superposição válido p/ interações EM!

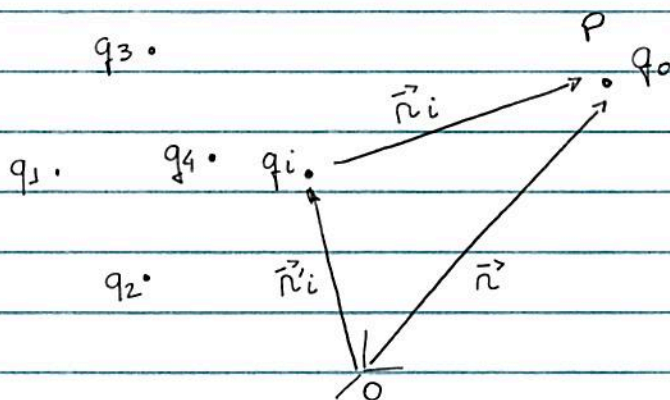
↳ p/ sistema de N-cargas:



$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ji}^2} \hat{n}_{ji} \quad (6.1)$$

↑
Eq. (5.1)

Alternativa:



$$\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{ou } \hat{n}_i = \frac{\vec{r} - \vec{r}'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}$$

Eq. (6.1):

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \hat{n}_i \quad : \text{força sob } q_0 \text{ devido cargas } q_i \quad (6.2)$$

podemos reescrever (6.2) como

$$\vec{F} = q_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i}_{\equiv \vec{E}(\vec{r})} = q_0 \vec{E}(\vec{r}) \quad (7.1)$$

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$: campo elétrico (função vetorial)

notas : \vec{E} independe carga (teste) q_0
 \vec{E} depende apenas posição \vec{r}

em detalhes,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (7.2)$$

interpretações Eq. (7.1) / (7.2)

- \vec{E} : força por unidade de carga atuando sob q_0
- cargas q_1, \dots, q_N são fontes p/ campo elétrico \vec{E} atuando sob q_0
- uma distribuição de cargas no vácuo altera as propriedades (elétricas) do espaço, produzindo em cada pto P um campo elétrico \vec{E}
- q_0 é uma carga de prova / teste. A existência de um campo elétrico \vec{E} no pto P onde q_0 está localizada $\sim \vec{F} \neq 0$ sob q_0

unidade \vec{E} (S.I.): $[E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$

Ex.: carga pontual q localizada na origem:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (8.1)$$

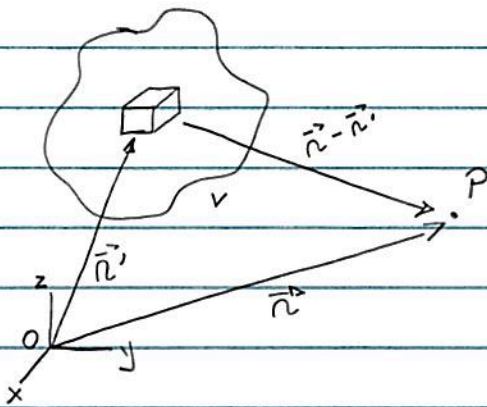
• Eq. (7.2) : ou p/ distribuição discreta de cargas

• Generalização (7.2) p/ distribuição contínua de cargas

Lembrar: dist. contínua é caracterizada por uma densidade (volumétrica) de cargas $\rho = \rho(\vec{r})$, i.e.,

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta V} \right) : \text{função escalar}$$

$\vec{r} \in \Delta V$



p/ volume infinitesimal dv @ \vec{r}' : $dq = \rho(\vec{r}') dv$

$$\text{Eq. (7.2)} : E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \Delta V \left(\frac{\Delta q_i}{\Delta V} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3}$$

$$\xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (9.1)$$

casos particulares:

- dist. superficial de cargas: $dq = \sigma(\vec{r}') ds$

↳ densidade superficial de cargas (carga/área)

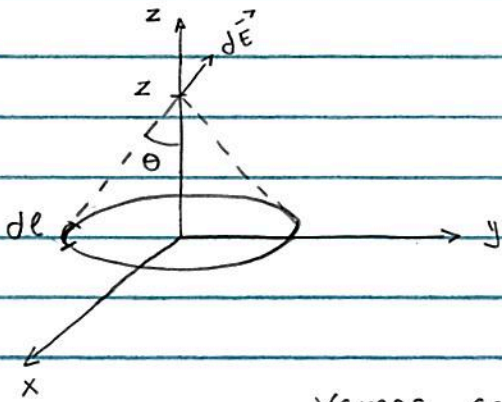
$$\text{Eq. (9.1)} : \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S d^2r' \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (9.2)$$

- dist. linear de cargas: $dq = \lambda(\vec{r}') dl$

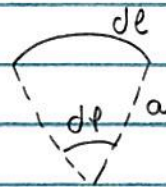
↳ densidade linear de cargas (carga/comprimento)

$$\text{Eq. (9.1)} : \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C dl' \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (9.3)$$

Ex.: P 2.5, G.: Determinar campo elétrico anel raio a ,
densidade linear de carga $\lambda = \text{cte}$



anel \subset plano xy



Vamos considerar caso particular $\vec{E} = \vec{E}(0,0,z)$
hipótese: $\lambda > 0$

notas: por simetria, apenas componente \hat{z} é não nula

campo $d\vec{E}_z$ devido a dl :

$$dE_z = dE \cos \theta \quad ; \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{z^2 + a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a \, d\phi}{z^2 + a^2}$$

$$dq = \lambda dl = \lambda a \, d\phi$$

$$\hookrightarrow E_z(0,0,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda a z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \, d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \lambda 2\pi a$$

$$\text{como } Q = 2\pi a \lambda$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(0,0,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (10.1)$$

casos particulares:

(i) $z \gg a$: Eq. (10.1) : $\vec{E}(0,0,z) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \hat{z}$: campo \vec{E}
 carga pontual Q
 @ origem!

(ii) $z \ll a$:

$$(z^2 + a^2)^{-3/2} = a^{-3} \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-3/2} \approx \frac{1}{a^3} \left(1 - \frac{3z^2}{2a^2}\right)$$

Eq. (10.1) : $\vec{E}(0,0,z) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} z \hat{z}$; $Q > 0$

notas : força sob partícula carga $q < 0$ se movimentando
 ao longo eixo z :

$$\vec{F} = -\frac{|q|Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} z \hat{z}$$

Lembrar : série de Taylor,

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{df}{dx} \Big|_{x=a} + \frac{1}{2!} (x-a)^2 \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x=a} + \dots$$

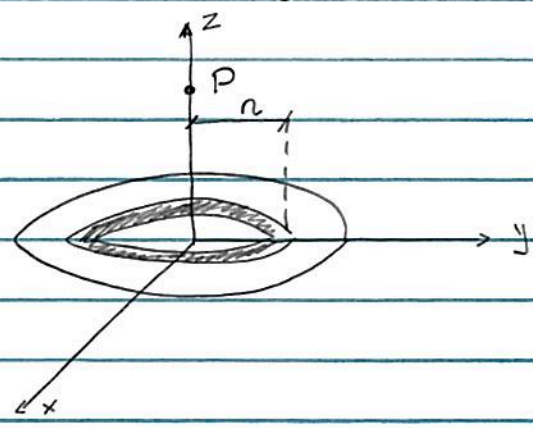
Ex. :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots \quad |x| < 1 !$$

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{1}{2!} n(n-1) x^2 + \dots$$

Ex.: P 2.6, G : Determinar campo elétrico disco raio a , densidade superficial de carga $\sigma = cte$



disco C plano xy

caso particular $\vec{E} = \vec{E}(0,0,z)$

campo devido anel raio r e largura dr ,

$$Eq. (10.3) : d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (z > 0)$$

$$dq = \sigma ds = \sigma (2\pi r dr)$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{rdr}{(z^2+r^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+a^2} t^{-3/2} dt \hat{z}$$

$$t = z^2+r^2 \rightarrow dt = 2rdr$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right) \hat{z} ; z > 0$$

Incluindo ptos $z < 0$ (exercício).

$$\vec{E}(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right) \hat{z} \quad (12.1)$$

• caso particular, plano ∞ , $\sigma = \text{cte}$,

$a \rightarrow +\infty$ em (12.1):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z} \quad : \text{ campo uniforme!} \quad (13.1)$$

notar: \vec{E} é descontínuo em $z=0$

$$\vec{E}(x, y, z \rightarrow 0^+) - \vec{E}(x, y, z \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \quad : \text{ veja abaixo}$$

discussão sobre
condições de
contorno \vec{E}

• caso particular, $z \gg a$,

$$\text{notar: } \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{z}{|z|} \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{z}{|z|} - \frac{z}{|z|} \frac{a^2}{2z^2}$$

$$\text{Eq. (12.1): } \vec{E}(0, 0, z) \approx \frac{\sigma \pi a^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{z^2} \frac{z}{|z|} \hat{z}$$

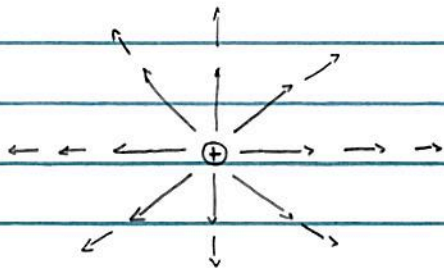
$$\text{como } Q = \sigma \pi a^2$$

: campo elétrico
carga pontual
 Q @ origem!

• Representação campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$,

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$: campo (função) vetorial

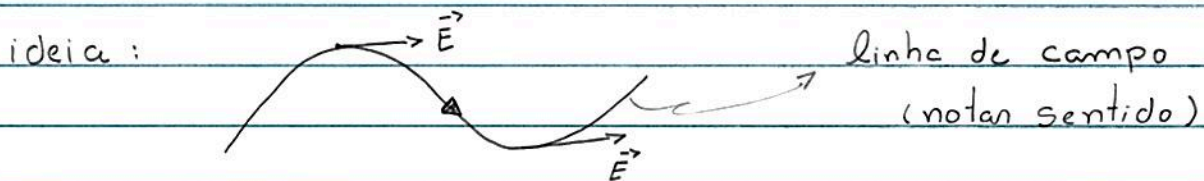
em particular, p/ carga pontual $q > 0$ [Eq. (8.1)]



: campo vetorial

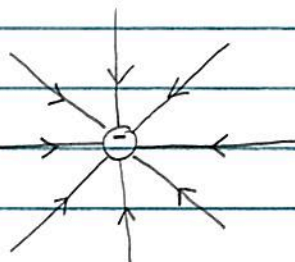
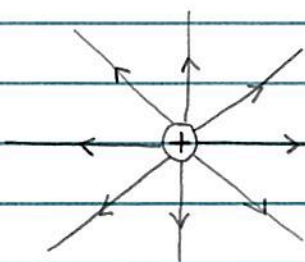
alternativa : representação $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ através linhas de campo

Definição linhas de campo : curva cuja tangente no pto P indica a direção do campo elétrico \vec{E}

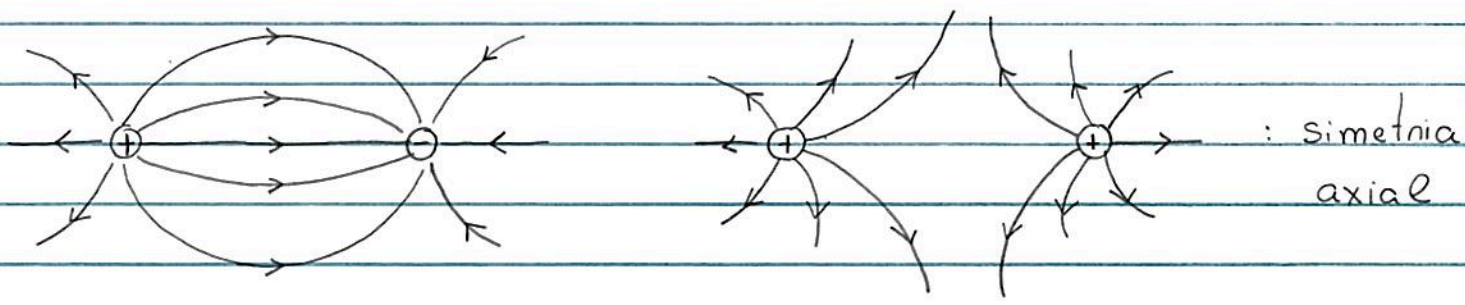


Obs. : densidade de linhas $\propto |\vec{E}|$

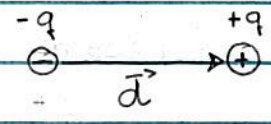
Exemplos :



carga pontual
: simetria esférica



Dipolo elétrico:
 sistema caracterizado
 pelo vetor momento de



dipolo elétrico $\vec{p} = q\vec{d}$

(detalhes dipolo elétrico, veja Sec. 3,4, Griffiths)

• Propriedades do campo eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$,

Vamos analisar duas características do campo \vec{E} :

(1) fluxo \vec{E} através superfície $S \sim \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

(2) circulação \vec{E} ao longo curva $\Gamma \sim \vec{\nabla} \times \vec{E}$

(forma integral)

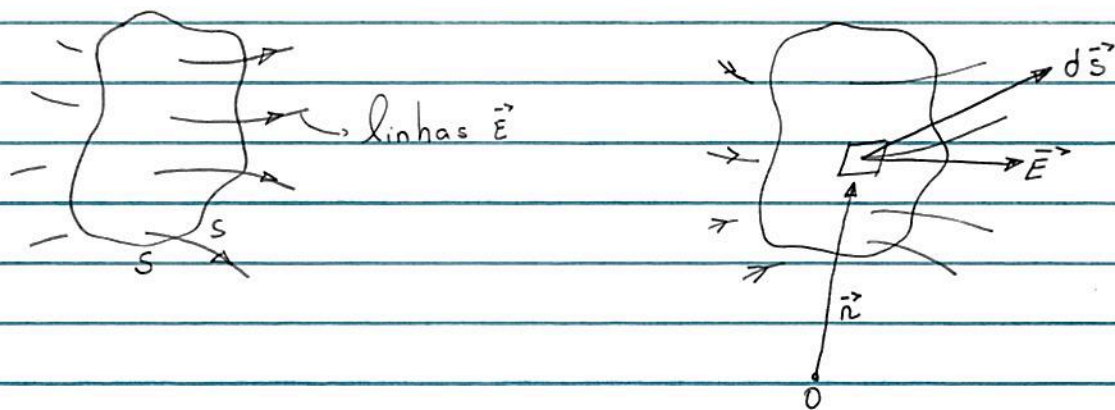
(forma diferencial)

notas: Fig. (14.1) indica que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

⊕ princípio de superposição $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \rightarrow$ resultados válidos p/ caso geral.

(1) Fluxo campo elétrico \vec{E} ,

considerar superfície S arbitrária,



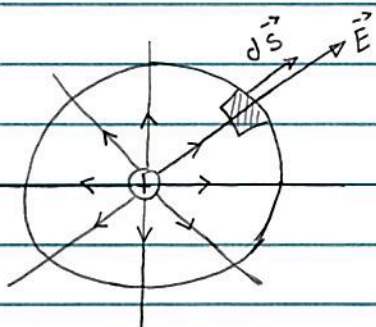
$$\Phi_E = \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad : \text{fluxo } \vec{E} \text{ através da superfície } S \quad (16.1)$$

em particular, se superfície S fechada,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (16.2)$$

Lembrar: p/ sup. S fechada, sentido $d\vec{S}$: "pr fora"

caso particular: carga pontual $q > 0$ @ origem,
sup. S = esfera raio R , centro = origem



$$\vec{E} = E(r) \hat{n}$$

$$d\vec{S} = ds \hat{n}$$

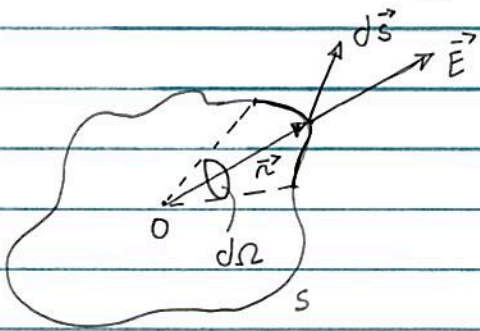
$\therefore \vec{E} \parallel d\vec{S}$ p/ \forall pto $P \in S$

$$\hookrightarrow \Phi_E = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \hat{n} \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{n})$$

$$= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{R^2} \cdot R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q \begin{array}{l} \text{carga} \\ \text{e interior} \\ \text{esfera} \end{array} \quad (17.1)$$

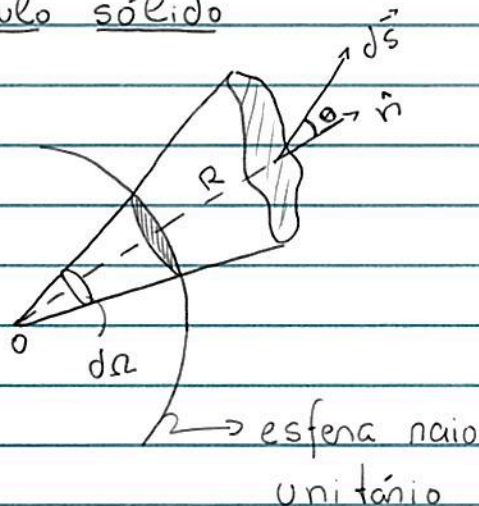
notas: $\Phi_E \propto$ carga e interior esfera
 \neq raio R da esfera

De fato, Eq. (17.1) é válida p/ \forall superfície fechada S
 tal que carga q e interior S



$$\text{notas: } \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \underbrace{dS \cos\theta}_{= r^2 d\Omega} \\ \hookrightarrow \text{ângulo sólido}$$

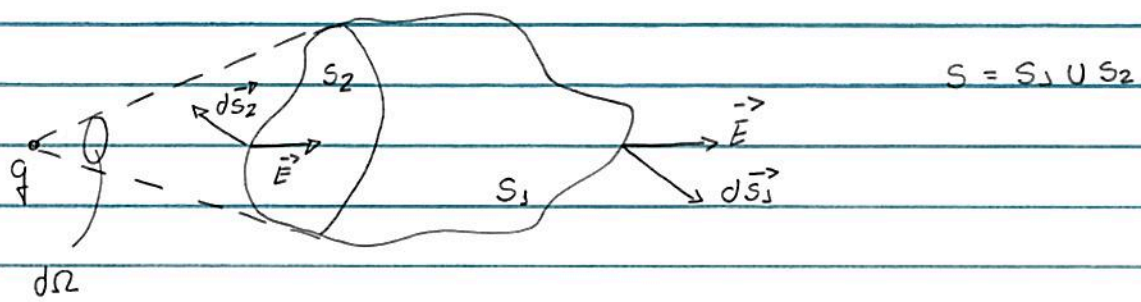
Lembrar: ângulo sólido



$$d\Omega = \frac{1}{R^2} d\vec{s} \cdot \hat{n} \\ = \frac{1}{R^2} dS \cos\theta$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \Phi_E &= \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \oint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \int_{\text{ESFERA}} d\Omega \\ & \hspace{15em} \text{RAIO } r \text{ (veja Fig. pg. 17)} \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta}_{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

hipótese: carga q é interior superfície S



$$\begin{aligned} \hookrightarrow \Phi_E &= \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_2 \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{S_1} d\Omega - \int_{S_2} d\Omega \right) = 0 \end{aligned}$$

caso geral, N cargas pontuais $q_i \in$ interior sup. fechada S:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{princípio superposição}}{=} \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{campo } \vec{E} \text{ carga } q_i}{=} \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i$$

$$\hookrightarrow \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dv \rho(\vec{r}) \quad (19.1)$$

↑
cargas \subset interior sup. S

↙
volume definido
pela sup. S

Eq. (19.1) : Lei de Gauss (forma integral)

Obs.: 1- Lei de Gauss é equivalente Lei de Coulomb, apenas reformulação

2- interpretação (19.1) : cargas elétricas são fontes p/ \vec{E}

3- superfície imaginária S = superfície Gaussiana

4- ingrediente importante determinação (19.1) : $F \propto 1/r^2$ [Eq. (5.1)]

5- " " " " : princípio de superposição

• Eq. (19.1) ⊕ teorema do divergente (veja pg. 20M) :

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dv \rho(\vec{r})$$

↙
volume definido por S

ou

$$\int_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) dv = 0$$

Como

volume V $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$: Lei de Gauss (forma diferencial) (19.2)

Alternativa: é possível derivar (9.2) a partir de (9.1),

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{ALL SPACE}} d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right)}_{4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}')} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

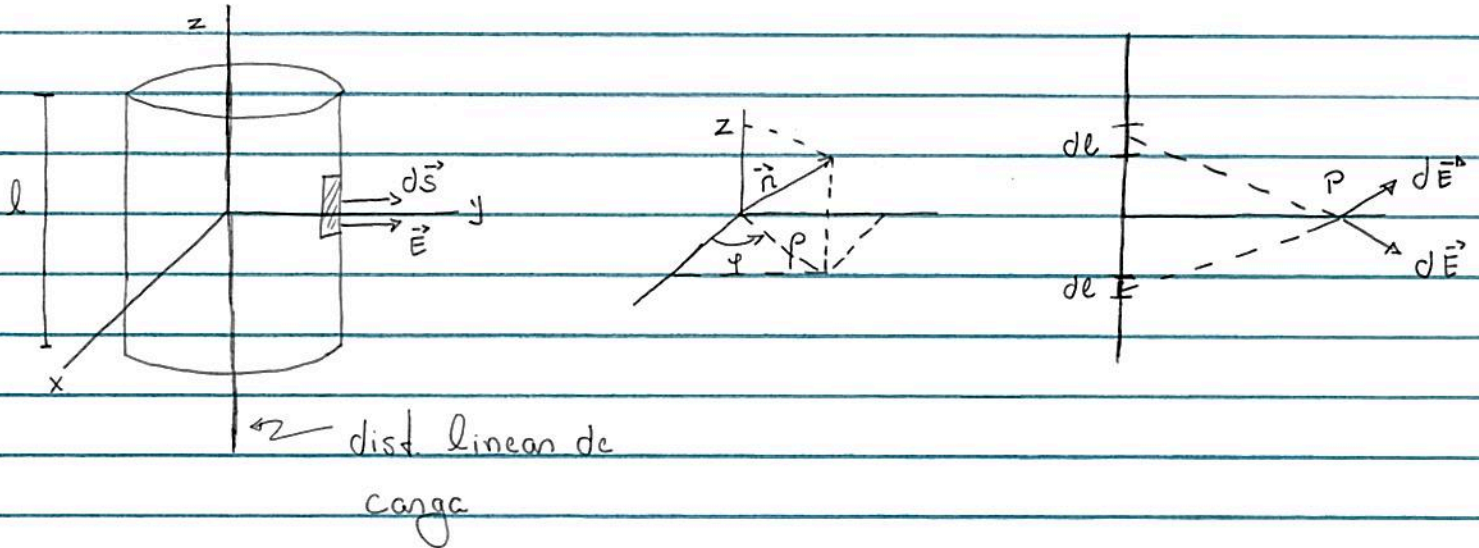
Obs. 1: é possível $\int_V \rightarrow \int_{\text{ALL SPACE}}$ assumindo que $\rho(\vec{r}) = 0$ p/ $\vec{r} \notin V$

Obs. 2: lembre que $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{r})$, veja pg. 284

Lei de Gauss: útil determinação campo elétrico \vec{E} p/ distribuições simétricas de carga,

veja exemplo 2.2, Griffiths : simetria esférica
 " " 2.3 " : " cilíndrica
 " " 2.4 " : " "planar"

Ex. 1: Distribuição linear de carga ao longo eixo z ,
densidade (linear) carga $\lambda = \text{cte}$ e $\lambda > 0$,
determinar campo elétrico \vec{E} .



notas: por simetria, apenas componente radial \vec{E}
(coord. cilíndricas) é não nula, i.e., $\vec{E} = E\rho\hat{\rho}$
↳ sup. Gaussiana = cilindro s

$$\text{bases } s : d\vec{s} = \pm ds \hat{z} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\text{lateral } s : d\vec{s} = ds \hat{\rho} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(\rho) ds$$

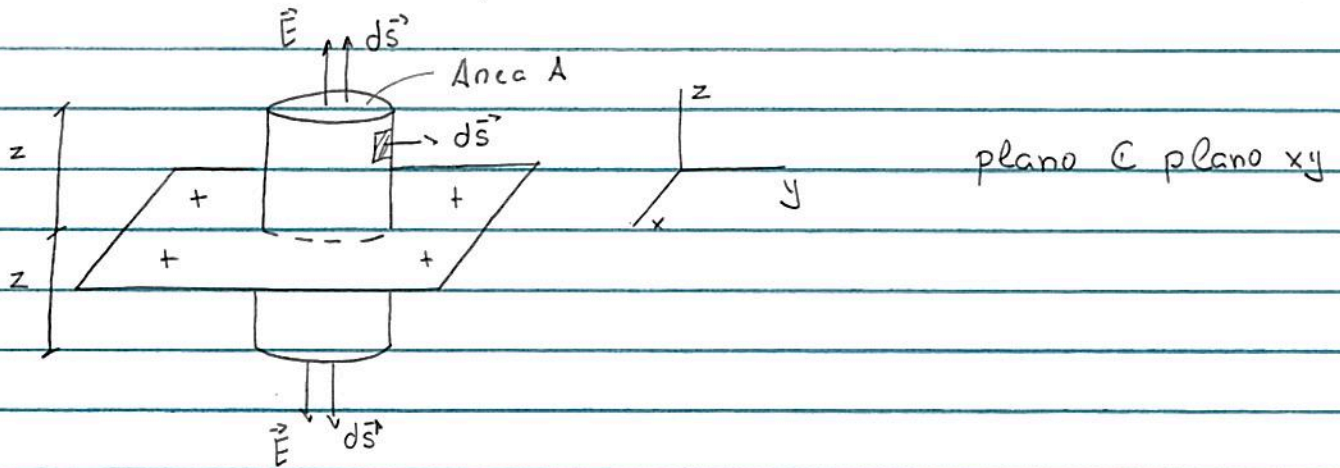
$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{LATERAL } s} E(\rho) (\rho d\phi dz) = E(\rho) \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int dz = 2\pi\rho l E(\rho)$$

$$q = \int_c \lambda dl = \lambda \int_c dl = \lambda l$$

$$\text{Eq. (19.1)} : E(\rho) \cdot 2\pi\rho l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho} \quad (21.1)$$

Ex. 2: Distribuição superficial de carga (plano infinito), densidade (superficial) de carga $\sigma = \text{cte}$, $\sigma > 0$ determinam campo elétrico \vec{E} .



notas: por simetria, apenas componente \hat{z} do campo elétrico é não nula, i.e., $\vec{E} = E_z \hat{z} = E(z) \hat{z}$
 \hookrightarrow superfície Gaussiana = cilindro S

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{BASE UP}} E(z) \hat{z} \cdot (ds \hat{z}) + \int_{\text{BASE DOWN}} E(z) (-\hat{z}) \cdot ds (-\hat{z}) = 2E(z)A$$

$$q = \int_S \sigma ds = \sigma \int ds = \sigma A \quad : \text{ carga C interior S}$$

Área intersecção plano cilindro

$$\text{Eq. (19.1)} : 2E(z)A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

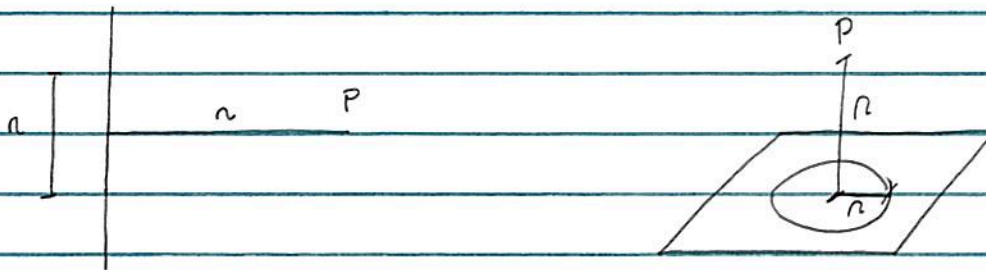
$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z} \quad : \text{ companan Eq. (13.1)}$$

Obs.: os resultados

$E \propto 1/r$, dist. linear (fio infinito) , $\lambda = cte$ e
 $E = cte$, " plano (plano ") , $\sigma = cte$

estão relacionados a $E \propto 1/r^2$ p/ carga pontual :

principal contribuição p/ campo \vec{E} no pto P : cargas mais próximas



fio : $E \propto \frac{Q}{r^2} \sim \frac{(\lambda r)}{r^2} \sim \frac{\lambda}{r}$

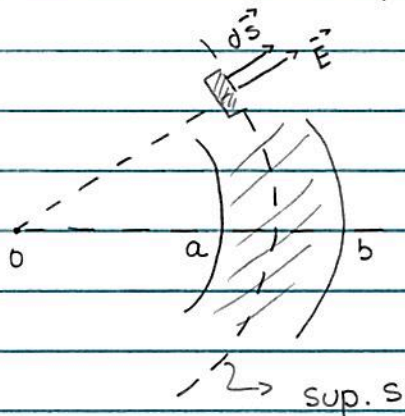
plano : $E \propto \frac{Q}{r^2} \sim \frac{(\sigma r^2)}{r^2} \sim \sigma = cte !$

Ex. 3 : P 2.15, G : Camada esférica , raios $a < b$,

densidade volumétrica de carga $\rho = \rho_0 r^n$, $\rho_0 > 0$, $\rho_0 = cte$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

determinar campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(r)$.



3 casos :

(i) $r < a$

(ii) $r > b$

(iii) $a < r < b$

notas: por simetria, apenas a componente radial do campo \vec{E} é não nula, i.e., $\vec{E} = E(r) \hat{n}$
 \hookrightarrow superfícies Gaussianas = esferas raio r

(i) $r < a$,

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_S \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r) \hat{n} \cdot \underbrace{(r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{n})}_{d\vec{S}} \\ &= E(r) r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi r^2 E(r) \end{aligned}$$

$$q = 0$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (19.1)} : \vec{E} = 0$$

(24.1)

(ii) $r > b$

$$q = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') = \int_V \rho_0 r^n (r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi)$$

$$= \rho_0 \int_a^b dr r^{n+2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \rho_0 \frac{1}{n+3} (b^{n+3} - a^{n+3}) \equiv Q$$

\hookrightarrow carga total
esfera

$$\text{Eq. (19.1)} : 4\pi r^2 E(r) = q/\epsilon_0$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{n+3} \frac{(b^{n+3} - a^{n+3})}{r^2} \hat{n} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{n} \quad (24.2)$$

(iii) $a < r < b$,

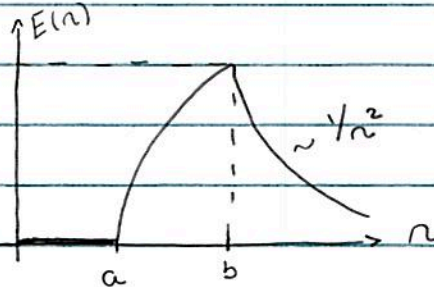
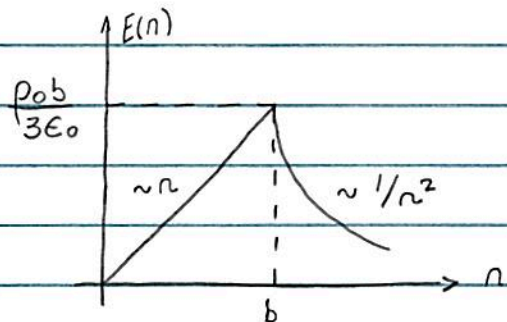
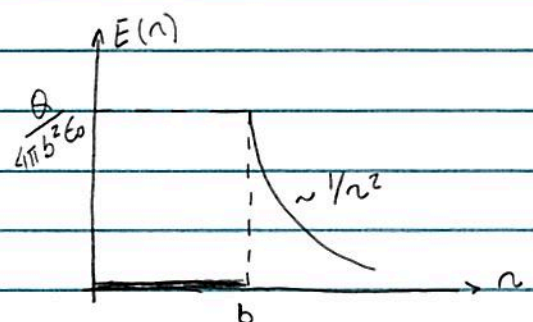
$$q = \int d^3r' \rho(\vec{r}') = \rho_0 \int_a^b dr' r'^{n+2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi\rho_0}{(n+3)} (b^{n+3} - a^{n+3})$$

$$\text{Eq. (19.1)}: \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi \rho_0}{\epsilon_0(n+3)} (r^{n+3} - a^{n+3})$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0(n+3)} r^{n+1} \left(1 - \frac{a^{n+3}}{r^{n+3}}\right) \hat{r}$$

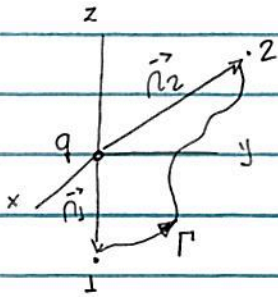
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^{n+1}}{b^{n+3} - a^{n+3}} \left(1 - \frac{a^{n+3}}{r^{n+3}}\right) \hat{r} \quad (25.1)$$

casos particulares,

(a) $n=0$; $\rho = \rho_0$ (b) $n=0$, $a=0$: $\rho = \rho_0$ (c) $n=0$, $a \rightarrow b$: casca esférica,
densidade superficial
de carga $\sigma = \text{cte}$ notas: $\vec{E}(r)$ descontinuo p/ $r=b$!

(2) Circulação campo elétrico \vec{E} ,

considerar: considerar carga pontual q @ origem
 \oplus curva Γ



como $d\vec{e} = \hat{n}dn + \hat{\theta}n d\theta + \hat{\phi}n \sin\theta d\phi$

$$\hookrightarrow \int_{\Gamma} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{e} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{\hat{n} \cdot \hat{n}}_1 dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

em particular, p/ curva fechada Γ , i.e., $r_1 = r_2$

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0 \quad : \text{circulação campo } \vec{E} \quad (26.1)$$

(veja pg. 18M)

Eq. (26.1) \oplus teorema de Stokes (veja pg. 20M):

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (26.2)$$

\hookrightarrow sup. cuja fronteira = Γ

Como (26.2) é válida p/ \forall sup. S cuja fronteira = Γ

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (26.3)$$

caso geral, N -cargas pontuais q_i :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right) = \sum_{i=1}^N \vec{\nabla} \times \vec{E}_i(\vec{r}) = 0 \quad (27.1)$$

↑
princípio de
superposição

↑
propriedade (16M.3)
~ linearidade op. $\vec{\nabla}$

obs.: é possível obter (27.1) a partir de (19.2), veja P 2.19, G.

* Resumo propriedades campo (vetorial) eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$:

$$(1) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$$

(27.2)

$$(2) \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

obs.: Eqs. (27.2) no sistema Gaussiano:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad e \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

• Potencial elétrico $V = V(\vec{r})$,

Eqs. (26.1) / (27.1)

$$\hookrightarrow \int_{\gamma, \Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} : \text{independe curva } \Gamma \sim \text{campo eletrostático} \\ \text{é um campo} \quad (27.3) \\ \text{conservativo!}$$

(27.3) \rightarrow podemos definir uma função escalar $V = V(\vec{r})$ tal que

$$V(\vec{r}) \equiv - \int_{\vec{r}_0, \Gamma}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{e}' \quad : \quad \begin{array}{l} \text{potencial} \\ \text{elétrico} \end{array} \quad (28.1)$$

onde \vec{r}_0 é o zero (pto de referência) do potencial, i.e., $V(\vec{r}_0) = 0$!

Obs. : \vec{r}_0 : escolhido arbitrariamente !

• unidade SI : [potencial] = volt (V)

• notas :

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{e} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{e} \quad (28.2)$$

: diferença de potencial entre pts 1 e 2.

⊕ teorema do gradiente (pg. 19M) :

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = \int_{\Gamma, 1}^2 (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{e} = - \int_{\Gamma, 1}^2 \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

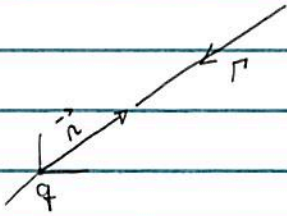
$$\text{ou} \int_{\Gamma, 1}^2 \left((\vec{\nabla} V) + \vec{E} \right) \cdot d\vec{e} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = - \vec{\nabla} V \quad (28.3)$$

notas : Eqs. (27.2) e (28.3) estão de acordo com a propriedade (17M.11) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0 \quad !$$

Ex.: Determinar potencial elétrico $V = V(\vec{r})$ p/ carga pontual q localizada na origem



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{n} = E(r) \hat{n}$$

Como $E(r) \propto 1/r^2 \rightarrow \vec{r}_0 = +\infty$: escolha usual p/ distribuição localizada de cargas

Como $\vec{E} = E(r) \hat{n} \rightarrow$ curva Γ (veja Fig.), $d\vec{e} = dr' \hat{n}$

$$\text{Eq. (28.1): } V(\vec{r}) = - \int_{\infty, \Gamma}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{e}$$

$$= - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{: potencial Coulombiano} \quad (29.1)$$

notas: V : escalon v.s. \vec{E} : vetor
 $V \propto 1/r$ $E \propto 1/r^2$ (carga pontual)

• sobre a validade do princípio de superposição p/ V :

p/ sistema de N cargas pontuais q_i :

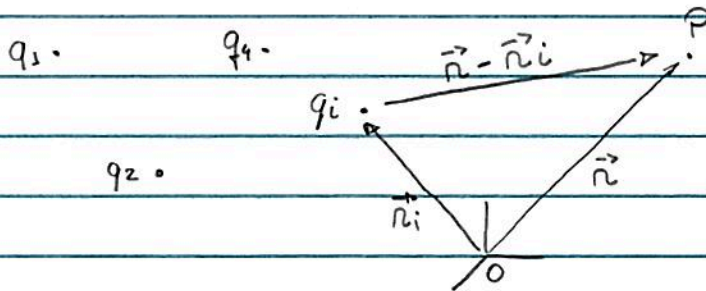
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) \quad \rightarrow \text{campo elétrico } \propto \text{ carga } q_i$$

$$\hookrightarrow - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \left(\sum_i \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{e} = - \sum_i \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}_i \cdot d\vec{e} = \sum_i V_i(\vec{r}) = V(\vec{r})$$

Eq. (29.2) em detalhes, (ou determinação direta $V(\vec{r})$)

- sistema de N -cargas pontuais q_i em repouso,

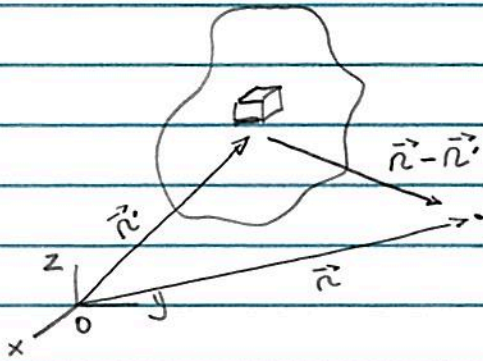
93-



$$\text{Eq. (29.1)} \rightarrow V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (30.1)$$

Obs.: acompanha Eqs. (7.2) e (30.1)

- ρ uma distribuição contínua de cargas,



$$\rho = \rho(\vec{r})$$

ρ volume infinitesimal
 dv @ \vec{r}' : $dq = \rho(\vec{r}') dv$

$$\text{Eq. (30.1)} : V(\vec{r}) = \sum_i \Delta v \left(\frac{\Delta q_i}{\Delta v} \right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\xrightarrow{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (30.2)$$

Obs.: acompanha Eqs (9.2) e (30.2)

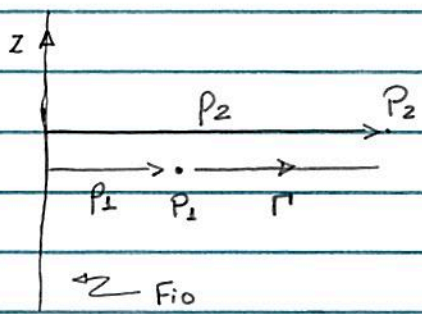
Resumo :

distribuição de cargas em repouso : (vácuo) \longrightarrow campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ no pto P

ou \longrightarrow potencial elétrico $V = V(\vec{r})$ no pto P

Obs. : em alguns casos é interessante calcular V e obter \vec{E} a partir de $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

Ex. 1 : Determinar o potencial elétrico p/ distribuição linear de cargas (fio infinito), densidade linear de carga $\lambda = cte$,



Vimos que, Eq. (21.1) : $\vec{E}(p) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 p} \hat{p}$

como $\vec{E} = E(p) \hat{p} \rightarrow$ escolha curva Γ (Fig.) : $d\vec{e} = dp \hat{p}$

Eq. (28.2) :

$$V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = - \int_1^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 p} \hat{p} \right) \cdot (dp \hat{p}) = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dp}{p}$$

$$= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln p_2 - \ln p_1)$$

notas: nesse caso escolha $V(\vec{r} \rightarrow +\infty) = 0$ not OK

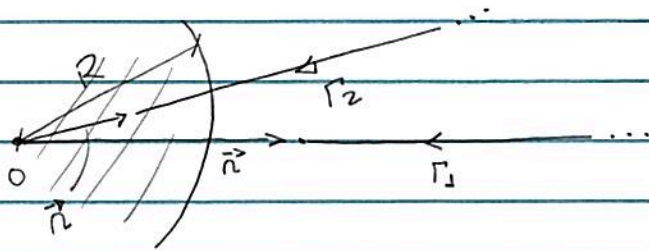
escolha: $\rho_1 = a$: zero potencial

$$\hookrightarrow V(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{\rho}\right)$$

Ex. 2: Determinar o potencial elétrico p/ uma esfera de raio R , uniformemente carregada $\rho = \text{cte}$.

Vimos que, nesse caso, o campo elétrico é dado por (veja Eqs. (24.2) e (25.1) $\oplus n=0, a=0, b=R$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho R}{3\epsilon_0} \hat{n}, & r < R \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{n}, & r \geq R \end{cases} \quad (\text{veja Fig. (b), pg. 25})$$



Como $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{n} \rightarrow$ escolha curvas Γ_1 e Γ_2 (Fig)
p/ os dois casos, $d\vec{e} = dr \hat{n}$

nesse caso podemos considerar $V(r_0 \rightarrow +\infty) = 0$

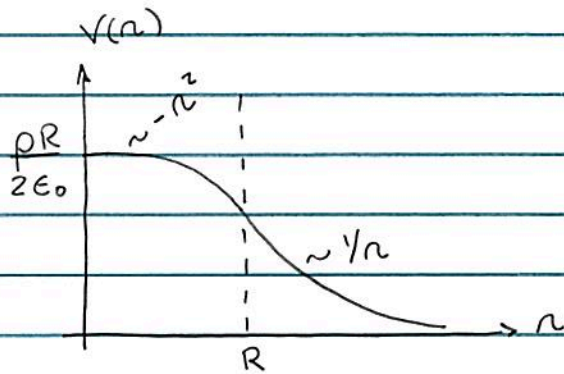
(i) $r \geq R$.

$$\begin{aligned} \text{Eq. (28.1)}: V(\vec{r}) &= - \int_{\infty, \Gamma_1}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{e} = - \int_{\infty, \Gamma_1}^{\vec{r}} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{\hat{n} \cdot \hat{n}}{r'^2} dr' \\ &= - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \end{aligned}$$

onde $Q = \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$: carga total da esfera

(ii) $r < R$

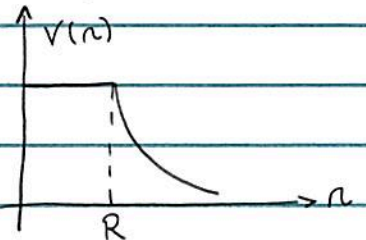
$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{\infty, \Gamma_2}^{|\vec{r}'|=R} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{e} - \int_{|\vec{r}'|=R, \Gamma_2}^{\vec{r}} E(\vec{r}') \cdot d\vec{e} \\ &= - \int_{\infty, \Gamma_2}^R \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{\hat{n} \cdot \hat{n}}{r'^2} (dr' \hat{n}) - \int_{R, \Gamma_2}^r \frac{\rho r'}{3\epsilon_0} \hat{n} \cdot (dr' \hat{n}) \\ &= \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} \end{aligned}$$



Exercício: consideramos uma camada esférica, raio R , uniformemente carregada, densidade superficial de carga σ .

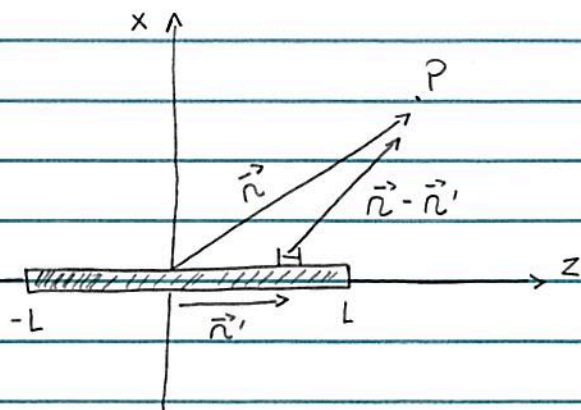
Mostre que:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases}; \quad Q = 4\pi R^2 \sigma$$



notas: $V = V(\vec{r})$: função contínua

Ex. 3: Determinar o potencial elétrico p/ uma barra, comprimento $2L$, densidade linear de carga $\lambda = \text{cte}$



nesse caso, é possível determinar $V(\vec{r})$ p/ \forall pto P!

como o sistema apresenta simetria cilíndrica, temos que

$$\vec{r} - \vec{r}' = \underbrace{\rho \hat{\rho}} + (z - z') \hat{z}, \text{ onde } \vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z}$$

$$\vec{r}' = z' \hat{z}$$

Soma OK pois
 \hat{z} é "fixo"

$$\text{Eq. (30.2)} : V(\vec{r}) = V(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{\lambda dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{(L-z)^2 + \rho^2} + L - z}{\sqrt{(L+z)^2 + \rho^2} - (L+z)} \right) \quad (34.1)$$

(*)

Lembrar que: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(\sqrt{x^2 + a^2} + x)$

Em princípio, (34.1) \oplus $\vec{E} = -\vec{\nabla}V \rightarrow \vec{E} = \vec{E}(\rho, z)$!

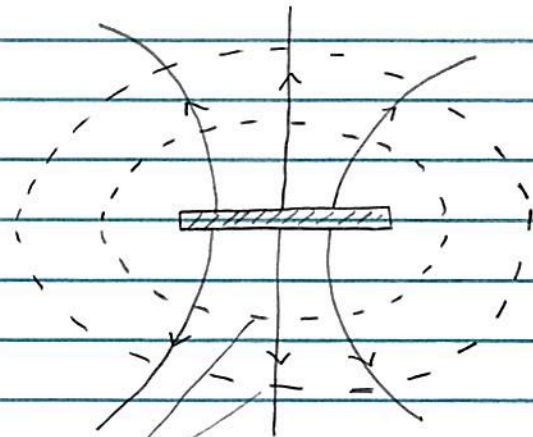
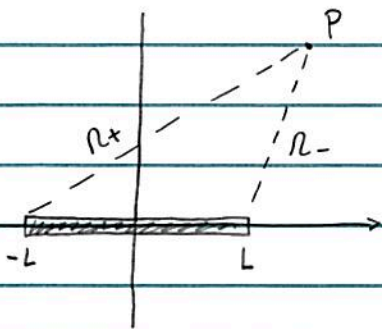
casos particulares (considerados no curso básico),

$$(i) \quad z=0 : V(p) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{L^2+p^2} + L}{\sqrt{L^2+p^2} - L}\right)$$

$$(ii) \quad z=L : V(p,L) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+4L^2} - 2L}\right)$$

$$(iii) \quad (\text{exercício}) \quad p=0 : V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{z+L}{z-L}\right)$$

Vamos reescrever (34.1) em termos das variáveis u e t definidas abaixo



superfícies equipotenciais

temos que $r_{\pm} = \sqrt{p^2 + (L \pm z)^2}$

definindo $u = \frac{1}{2}(r_- + r_+)$

$$r_- = u + t$$

$$\rightarrow r_+ = u - t$$

$$t = \frac{1}{2}(r_- - r_+)$$

o argumento (*) do \ln em (34.1) assume a forma

$$(*) = \frac{\rho_- + (L-z)}{\rho_+ - (L+z)} = \frac{u+t + (L-z)}{u-t - (L+z)}$$

como $ut = -zL$ (verificar), temos que

$$(*) = \frac{(u+L)(1+t/L)}{(u-L)(1+t/L)}$$

$$\hookrightarrow V(p,z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{u+L}{u-L}\right)$$

notam: $V(p,z) = \text{cte} \rightarrow u = \text{cte} \rightarrow \rho_+ + \rho_- = \text{cte}$, i.e.,

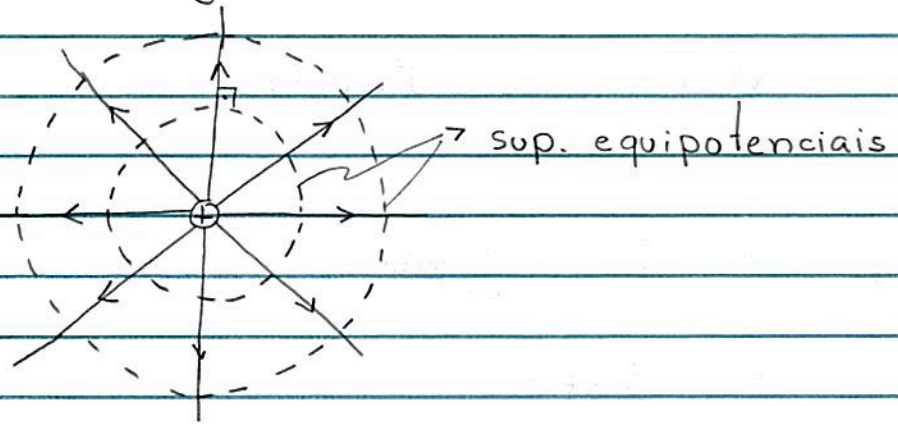
as superfícies equipotenciais são elipsóides
de revolução, focos em $z = \pm L$!

como \vec{E} é \perp às superfícies equipotenciais \rightarrow linhas de campo
são hiperbóides de revolução, i.e., $t = \text{cte}$!

Revisão : superfícies equipotenciais :

Definição : linha/superfície tal que $v(\vec{r}) = cte$

Ex. : carga pontual : sup. equipotenciais = esferas centro @ carga



considerar deslocamento $d\vec{r}$ ao longo sup. equipotencial :

$$dv = (\vec{\nabla}v) \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \vec{E} \perp \text{sup. equipotencial!}$$

\uparrow
 $v = cte$

(veja pg. 134)

sobre o Teorema de Helmholtz,

considerar uma função vetorial $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \mathcal{D}(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{C}(\vec{r}),$$

onde as funções escalar $\mathcal{D}(\vec{r})$ e vetorial $\vec{C}(\vec{r})$ são conhecidas.

Se \mathcal{D} e \vec{C} decaem mais rápido que $1/r^2$ qdo $r \rightarrow +\infty$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(\vec{r}) = 0$

$$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathcal{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) \quad (38.1)$$

Eq. (38.1) : se o divergente e o rotacional de uma função vetorial \vec{F} são especificados \oplus comportamento $r \rightarrow +\infty$

$\hookrightarrow \vec{F}$ é determinada pela (38.1).

Caso particular, se \vec{F} é diferenciável e decai mais rápido que $1/r$ qdo $r \rightarrow +\infty$

$$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) \quad (38.2)$$

notas: Eqs. (27.2) \oplus (38.2)

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) \quad (38.3)$$

$V(\vec{r})$

: OK c/ Eq. (30.2) !

Obs.: p/ detalhes teorema, veja apêndice B, Griffiths.

• Eqs. (27.2) \oplus (28.3),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\nabla^2 V$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad : \quad \text{Eq. de Poisson} \quad (39.1)$$

onde

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad : \quad \text{Laplaciano de } V \quad (\text{veja pg. 164})$$

em particular, p/ regiões tais que $\rho(\vec{r}) = 0$

$$\hookrightarrow \nabla^2 V = 0 \quad : \quad \text{Eq. de Laplace} \quad (39.2)$$

Solução Eq. (39.2) : tópico próximo capítulo !

veja P 2.29, G.

• Condições de contorno,

ideia : analisar o comportamento de $\vec{E}(\vec{r})$ e $V(\vec{r})$
na vizinhança de uma superfície carregada.

Vimos que

(i) p/ distribuição superficial de cargas = plano ∞ @ $z=0$:
(veja pg. 13)

$$\vec{E}(x, y, z \rightarrow 0^+) - \vec{E}(x, y, z \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}, \quad (39.3)$$

i.e. campo \vec{E} é descontínuo na superfície $z=0$

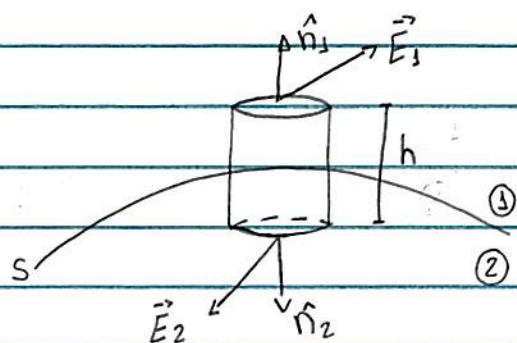
(ii) p/ casca esférica carregada raio R (veja pg. 25):

$$\vec{E}(R \rightarrow R^+) - \vec{E}(R \rightarrow R^-) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (40.1)$$

De fato, a descontinuidade da (componente \perp) do campo elétrico em uma sup. carregada é um resultado geral!

(i) consideras: superfície arbitrária S , $\sigma = \sigma(\vec{r})$

⊕ cilindro infinitesimal



caso geral:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}$$

w.r.t. sup. S

Eq. (19.1):

$$\oint_{\text{CILINDRO}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} q = \frac{\sigma(\vec{n}) A}{\epsilon_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Área base cilindro} \end{array} \right.$$

$$\oint_{\text{CILINDRO}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2) A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$\Phi_E \neq 0$ apenas p/ bases!

Se $E_i^{\perp} = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i$: componente \vec{E}_i ao longo direção \perp \hat{n}_i
e como $\hat{n}_2 = -\hat{n}_1 \equiv -\hat{n}$

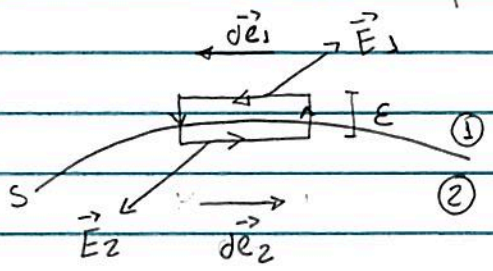
$$\hookrightarrow E_1^{\perp} - E_2^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad : \text{componente } \vec{E} \text{ } \perp \text{ sup. é descontínua na superfície de } \sigma/\epsilon_0 \quad (40.2)$$

Obs. 1 : compare as Eqs. (39.3), (40.1) e (40.2)

Obs. 2 : E_i^\perp : componente \perp $\vec{E}(\vec{r})$ na vizinhança da superfície!

(ii) Considerar : superfície arbitrária S , $\sigma = \sigma(\vec{r})$

⊕ curva fechada Γ



Eq. (26.2) : $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$

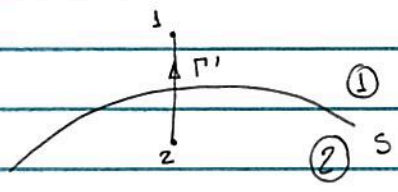
$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (\vec{E}_1 \cdot d\vec{e}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{e}_2) = 0$$

como $d\vec{e}_2 = -d\vec{e}_1$ e $\vec{E}_i \cdot d\vec{e} \propto E_i^\perp$: componente $\vec{E}_i \perp$ w.r.t. sup. S

$\hookrightarrow E_1^\perp = E_2^\perp$: componente $\vec{E} \perp$ sup é contínua na superfície (41.1)

(iii) Considerar : superfície arbitrária S , $\sigma = \sigma(\vec{r})$

⊕ curva Γ'



potencial elétrico

Eq. (28.2) : $V_1 - V_2 = - \int_{\Gamma'} \vec{E} \cdot d\vec{e} \xrightarrow{\Gamma' \rightarrow 0} 0 \rightarrow V_1 = V_2$: é contínuo na sup. (41.2)

veja exemplos pg. 25 !

Resumo condições de contorno $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ e $V = V(\vec{r})$ através
superfície carregada $\sigma = \sigma(\vec{r})$:

$$\text{se } \hat{n} = \hat{n}_1$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (40.2)} : \hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \sigma(\vec{r})/\epsilon_0$$

(42.1)

$$\text{Eq. (41.1)} : \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\text{Eq. (41.2)} : V_1 = V_2$$

• Energia potencial eletrostática,

vimos que [Eq. (27.3)] o campo eletrostático é um campo conservativo

Lembrar sistemas conservativos: pt partícula massa m sob \vec{F} ,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

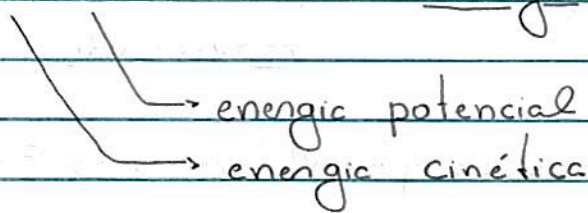
$$\hookrightarrow m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \longrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\hookrightarrow \int_1^2 d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{1 \rightarrow 2}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1 = W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - (U_2 - U_1) \quad (42.2)$$

← pt sistema conservativo!

↳ $E = T_1 + U_1 = T_2 + U_2$: energia total = de de movimento



Em particular, p/ eletrostática:

considerar partícula carga q sob campo eletrostático
 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, movimento $1 \rightarrow 2$

Q. : Qual o trabalho realizado por uma força externa
p/ movimentar partícula $1 \rightarrow 2$?

$$W = \int_1^2 (-q\vec{E}(\vec{r})) \cdot d\vec{e} = -q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

Eq. (42.2) p/ $\vec{F} = q\vec{E}$!

$$= q(V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)) = U(r_2) - U(r_1)$$

Eq. (30.2) ↗

(43.1)

em particular, se $V(\vec{r}_1 \rightarrow +\infty) = 0$ (zero do potencial)

$$\hookrightarrow W = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{e} = qV(\vec{r}) = U(\vec{r})$$

(43.2)

Interpretação (43.2) : trabalho realizado por uma força externa
p/ movimentar carga q de ∞ até
posição \vec{r} cujo potencial (associado a
uma certa distribuição de cargas) é $V(\vec{r})$
= energia potencial eletrostática
 $U(\vec{r})$ da carga q !

Eq. (43.1) \rightarrow interpretação

$$V(\vec{r}) = \frac{W}{q} \quad \begin{array}{l} \text{p/ movimentar} \\ \text{partícula carga } q \\ \infty \rightarrow \vec{r}! \end{array}$$

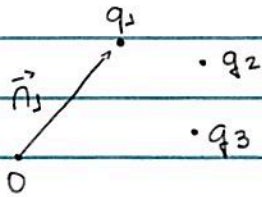
notas (43.1): $U(\vec{r}) = qV(\vec{r})$

associada
à partícula

\sim distribuição
de cargas!

Eq. (43.2) permite determinar a energia potencial eletrostática armazenada em uma certa distribuição de cargas

Considerar, e.g., 3 cargas pontuais q_i nas posições \vec{r}_i ,



$$r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

considerar o processo de montagem do sistema:

1- W força externa q_1 $\infty \rightarrow \vec{r}_1$: 0

2- " " " q_2 " \vec{r}_2 : $q_2 V(\vec{r}_2) = q_2 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

3- " " " q_3 " \vec{r}_3 : $q_3 V(\vec{r}_3) =$

$$= q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

para N cargas:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (44.1)$$

podemos reescrever (44.1) como

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i) \quad (45.1)$$

veja Eq. (30.1) \nearrow $V(\vec{r}_i)$: potencial posição \vec{r}_i devido às cargas (em repouso) $q_j, j \neq i$!

• p/ uma distribuição contínua de cargas caracterizada por uma densidade (volumétrica) de cargas $\rho = \rho(\vec{r})$:

Eq. (45.1) :

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \Delta V \left(\frac{\Delta Q_i}{\Delta V} \right) V(\vec{r}_i) \xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) \quad (45.2)$$

• utilizando a forma diferencial da Lei de Gauss podemos reescrever (45.2) em termos de \vec{E} ,

Eq. (27.3) em (45.2) :

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V d^3r (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) V(\vec{r})$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V d^3r \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} V) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint_S V \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

\swarrow volume cuja fronteira = sup. S $\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \sim \frac{1}{r}$: distribuição localizada de cargas! OK p/

\searrow p/ volume $\rightarrow 0$
 ∇ "suficientemente grande"

como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

$\hookrightarrow U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{ALL SPACE}} d^3r E^2(\vec{r})$: energia (potencial) eletrostática armazenada em um sistema de cargas em repouso.

(46.1)

em particular,

$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(\vec{r})$: densidade de energia (potencial) eletrostática

(46.2)

Obs.: Eq. (46.1) obtida no curso básico p/ o caso particular, capacitores de placas // e paralelas.

notas Eqs. (45.2) e (46.1):

$$U = \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) V(\vec{r})}_{\text{Energia armazenada nas cargas}} = \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3r \epsilon_0 E^2(\vec{r})}_{\text{Energia armazenada no campo elétrico}}$$

Energia armazenada nas cargas

Energia armazenada no campo elétrico

: 2 descrições equivalentes!

- p/ eletrostática : ambas descrições OK
- p/ estudo radiação : ideia energia armazenada no \vec{E} (Eletro II) e \oplus útil!

Obs.: veja comentários Sec 2.4.4., G.

Ex.: Considerar esfera raio R , carga Q , uniformemente carregada, determinar a energia do sistema.

Vimos (Ex. pgs 23-25) que nesse caso ($n=0, a=0, b=R$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \hat{r}, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > R \end{cases}$$

Eq. (46.1) : $U = U_1 + U_2$
 $(r < R)$ $(r > R)$

$$U_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{5} \frac{Q^2}{R}$$

$$\hookrightarrow U_{\text{esf}} = \frac{6}{5} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

em particular, p/ uma camada esférica, raio R , carga Q , uniformemente carregada,

$$U_{\text{camada}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

• Condutores,

Lembrar: é possível classificar os materiais quanto à mobilidade da carga elétrica em seu interior (primeira classificação macroscópica)

(1) condutores: cargas elétricas podem se movimentar interior material (∃ cargas livres)
Ex.: metais Fe, Cu

(2) isolantes: cargas elétricas ligadas
Ex.: vidro, plástico
Si, GaAs (semicondutores)

Propriedades condutor ideal (forma arbitrária), carga Q em equilíbrio eletrostático:

$$(1) \vec{E}_{\text{INTERIOR}} = 0$$

Eq. eletrostático \rightarrow cargas em repouso $\rightarrow \vec{E}_{\text{INT}} = 0$ pois $\vec{F} = q\vec{E}$!

$$(2) \vec{p}(\vec{r}) = 0, \vec{r} \in \text{interior condutor}$$

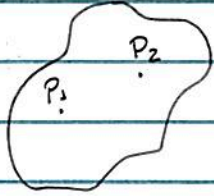
como $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ p/ $\vec{r} \in \text{interior condutor}$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0 \rightarrow \rho(\vec{r}) = 0.$$

(3) carga Q localizada na superfície do condutor

como $\rho(\vec{r}) = 0$ \rightarrow cargas localizadas na superfície (primeiras camadas atômicas)
ne interior

(4) Todos os pontos de um condutor têm o mesmo potencial
= condutor é uma equipotencial

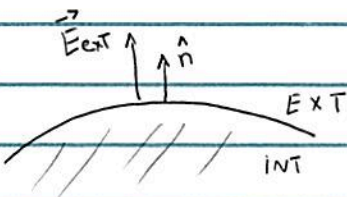


consideram pontos P_1 e P_2 e interior condutor

$$\text{Eq. (28.2)} : V_2 - V_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow V_1 = V_2$$

$\hookrightarrow V_{\text{int}} = \text{cte.}$, em particular, $V_{\text{int}} = V_{\text{superfície}}$.

(5) Campo elétrico na vizinhança da superfície externa de um condutor é \perp superfície e



$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (49.1)$$

Condições de contorno p/ \vec{E} em uma sup. carregada, Eqs. (42.1) :

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}}) = \sigma(\vec{r}) / \epsilon_0 \hat{n}$$

$$\oplus \vec{E}_{\text{int}} = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}}) = 0$$

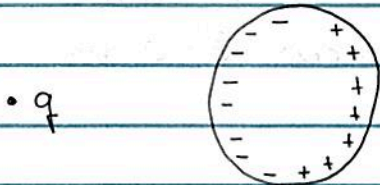
$$\hookrightarrow E_{\text{ext}}^{\perp} = \sigma / \epsilon_0 \quad \text{e} \quad E_{\text{ext}}^{\parallel} = 0$$

Lembrar: eq. eletrostático $\rightarrow \vec{E}_{\parallel} = 0$, caso contrário a superfície poderiam se movimentar!

Obs. propriedades (2) e (3) : essa distribuição de cargas livres deve minimizar a energia do sistema. O sistema discutido na pg. 47 exemplifica esse fato!

Consequências das propriedades (1) - (5)

(i) Considerar condutor \oplus campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ externo, e.g., esfera condutora \oplus carga pontual $q > 0$:

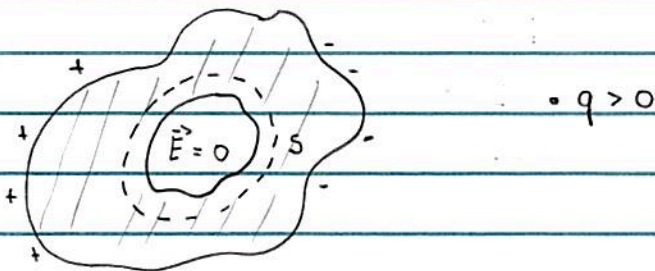


Como $\vec{E}_{\text{INT ESFERA}} = 0 \rightarrow$ cargas livres na esfera se reorganizam de modo que $\vec{E}_{\text{externo}}(\vec{r}) + \vec{E}_{\text{esfera}}(\vec{r}) = 0$,
 (carga q) p/ \vec{r} é interior esfera

ou temos indução de cargas negativas na esfera próximas à carga $q > 0$

Como as cargas induzidas negativas estão \oplus próximas à q
 que " " " " positivas \rightarrow atração
 carga q - esfera

(ii) considerar condutor (forma arbitrária) com uma cavidade \oplus campo elétrico externo, e.g.,

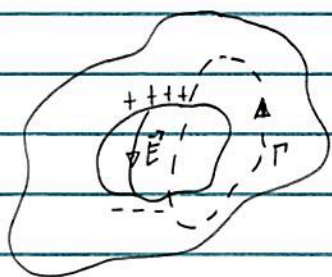


$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 0$, \vec{r} é interior cavidade : princípio blindagem!

notar: Lei de Gauss p/ superfície S : $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ pois

S está no interior do condutor ($\vec{E} = 0$) $\rightarrow Q_{int. S} = 0$.

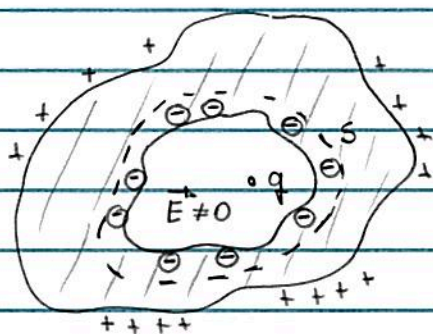
Entretanto, poderíamos ter distribuições de cargas na superfície da cavidade tal que $Q_{TOTAL} = 0$ e $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$ p/ \vec{r} em interior cavidade



$\hookrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$: contradição!

ideia blindagem: objeto C interior cavidade está completamente protegido (blindado) dos efeitos do campo eletrostático \sim carga q !

(iii) consideramos condutor com cavidade \oplus carga pontual $q > 0$ no interior cavidade

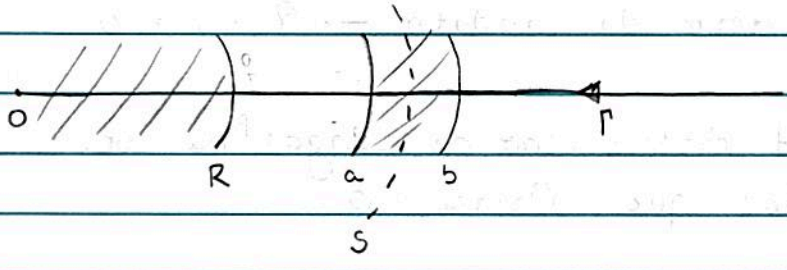


p/ sup. Gaussiana S : $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{1}{\epsilon_0} (q + Q_{ind})$

$\hookrightarrow Q_{ind} = -q$: carga induzida na sup. da cavidade.

Obs.: verifica-se que o campo p/ pontos externos ao condutor não depende da posição carga pontual q ! (veja também Verso pg. 68)

Ex.: P 2.35, G. : esfera condutora raio R , carga $q \oplus$
camada metálica (neutra) raios a e b

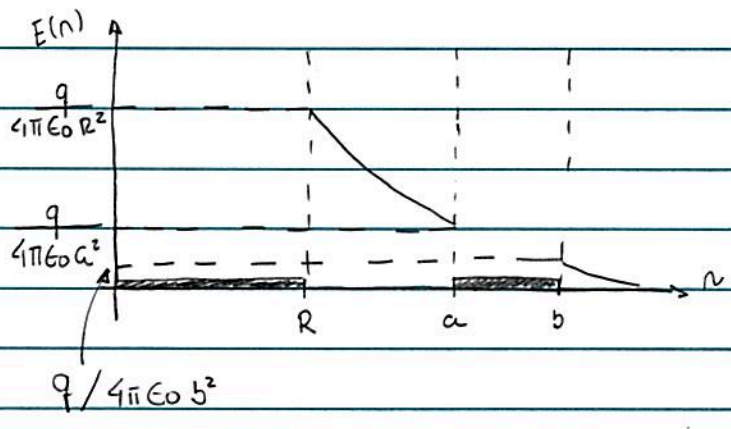


(a) determinar $\sigma(r)$ p/ $r = R, a, b$.

$\sigma(R) = q / 4\pi R^2$ $\sigma(a) = -q / 4\pi a^2$ $\sigma(b) = q / 4\pi b^2$

(b) determinar potencial e elétrico na origem,

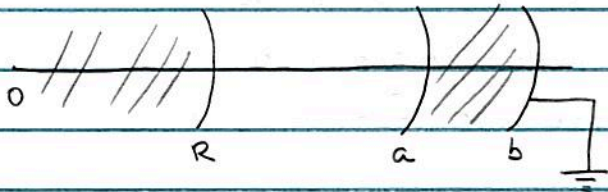
nesse caso $\vec{E} = E(r) \hat{n}$, onde (verificar)



p/ curva $\Gamma : d\vec{e} = dr \hat{n}$

$$V(r=0) = V(R) = - \int_{+\infty, \Gamma}^R \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_{+\infty}^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} dr$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)$$

(c) hipótese: camada metálica atenuada,
repetir itens (a) e (b)



camada metálica
atenuada $\rightarrow V(b) = 0$

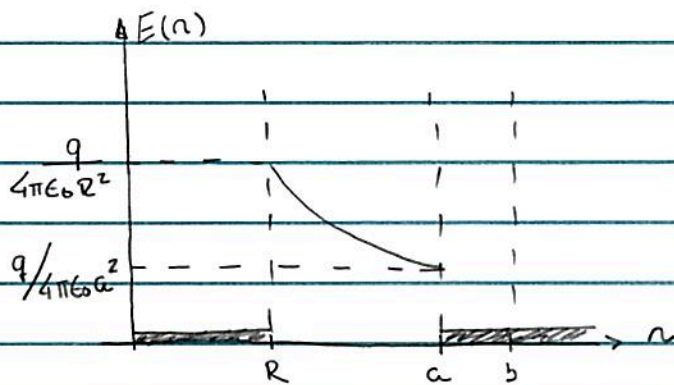
$$\sigma(R) = q/4\pi R^2$$

como $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ p/ $a < r < b \rightarrow \sigma(a) = -q/4\pi a^2$

como $V(b) = V(r \rightarrow +\infty) = 0 \rightarrow \vec{E}(r > b) = 0$

$$\hookrightarrow \sigma(b) = 0$$

Campo elétrico $\vec{E} = E(r) \hat{r}$



de modo análogo,

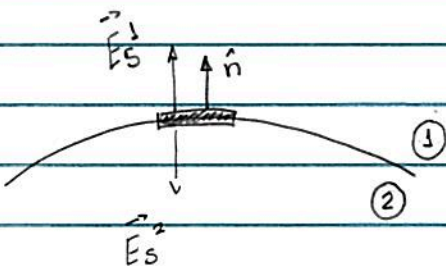
$$V(0) = V(R) = - \int_{+\infty, \Gamma}^R \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_a^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dn}{n^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)$$

Q.: Qual a força sob um elemento de carga dq na superfície de um condutor carregado?

Em princípio: $d\vec{F} = dq \vec{E}$

entretanto, o campo elétrico \vec{E} é descontínuo na superfície

↳ Q.: Qual o valor \vec{E} nesse caso?



pr um elemento de sup. $d\vec{s}$, o campo elétrico nesse ponto é

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_{\text{OTHER}}$$

↳ \vec{E} demais contribuições (contínuo na sup.!)
↳ \vec{E} associado a $d\vec{s}$

pr pontos próximos à sup: $\vec{E}_s = \vec{E}$ pleno ao carregado

$$\hookrightarrow \vec{E}_s^1 = -\vec{E}_s^2 = \frac{\sigma \hat{n}}{2\epsilon_0}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_s^1 + \vec{E}_{\text{OTHER}} = \frac{\sigma \hat{n}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_s^2 + \vec{E}_{\text{OTHER}} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{E}_{\text{OTHER}} = \frac{1}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

notas: resultado geral pr condutor

$$\hookrightarrow d\vec{F} = dq \vec{E}_{OTHER} = (\sigma ds) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$$

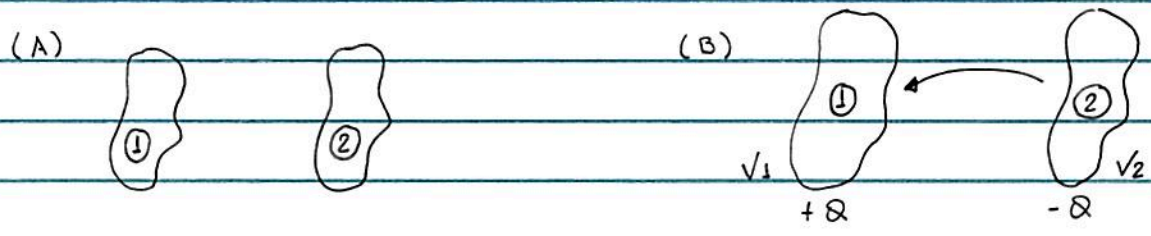
$$\hookrightarrow \frac{dF}{ds} = P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 \quad : \text{pressão eletrostática} \quad (55.1)$$

$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$: campo elétrico na sup. condutor

• Capacitância / capacitores,

ideia: introduzir o conceito de capacitância e discutir dispositivo que armazena energia (potencial) eletrostática

(i) consideram: 2 condutores inicialmente neutros e separados distância d (Fig. A)



(ii) consideram que $+Q > 0$ cargas elétricas são transferidas do condutor 2 p/ 1 (Fig. B)

\hookrightarrow potencial condutor 1 = V_1
 " " " 2 = V_2

notas: campo elétrico \vec{E} região entre condutores

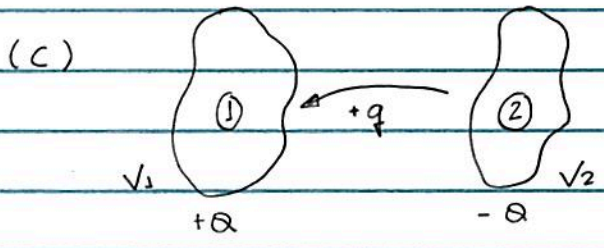
$$E \propto Q \rightarrow V \equiv V_1 - V_2 \propto Q \text{ ou } Q \propto V$$

$$\hookrightarrow Q = CV \quad (55.2)$$

\searrow capacitância do sistema

unidade (SI) : $[C] = \frac{J}{V} \equiv JF$ (farad)

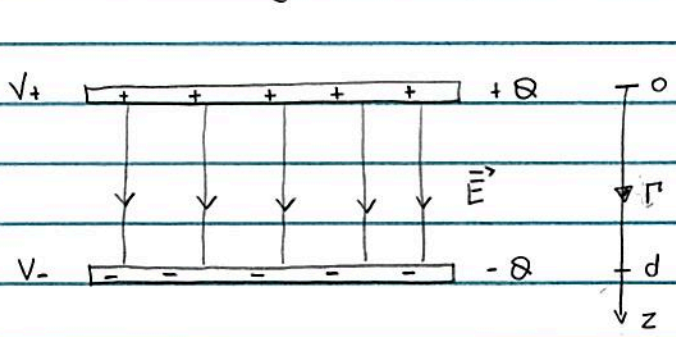
(iii) considerar carga $q > 0$ transferida condutor 2 p/1 (Fig. C)



nesse caso : trabalho deve ser realizado p/ transferência carga q
 ↳ energia (potencial) eletrostática é adicionada ao sistema

↳ sistema 2 condutores : - armazena carga elétrica Q
 (Fig. A) " energia (potencial) eletrostática
 ≡ capacitor

Ex. 1 : capacitor placas paralelas e planas
 (veja exemplo 2.10, G p/ detalhes)



área placa

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} : \text{capacitância (56.1)}$$

(vácuo)

Ex. 1 : detalhes

Vimos que, pg. 22 : $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z}$

$\hookrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$, p/ região entre placas

Eq. (28.2): $V = V_+ - V_- = - \int_{-r}^+ \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_0^d \frac{\sigma \hat{z}}{\epsilon_0} \cdot dz \hat{z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$

$\hookrightarrow Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V$

Ex. 2 : detalhes

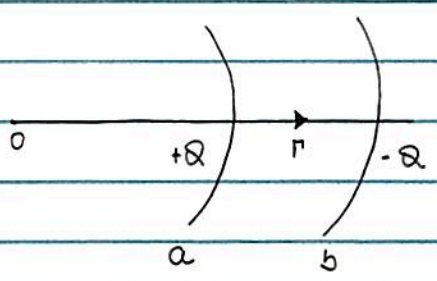
$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n}$, $a < r < b$

$\hookrightarrow V = V_+ - V_- = - \int_{-r}^+ \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{n} \cdot (dn \hat{n})$

$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

$\hookrightarrow Q = \frac{4\pi\epsilon_0 a b}{b-a} V$

Ex. 2 : capacitor = 2 camadas esféricas concêntricas,
raios a e b



$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot ab}{b-a} \text{ : capacitância (57.1)}$$

(vácuo)

(veja exemplo 2.11, G. p/ detalhes)

notas : - região entre condutores = vácuo

- Eqs. (56.1) e (57.1) $\rightarrow C \propto \epsilon_0 \cdot \text{geometria sistema}$
 $\propto \epsilon_0 \cdot \text{comprimento}^3$

$$\hookrightarrow [C] = [\epsilon_0] [\text{comprimento}]^3 \rightarrow [\epsilon_0] = \frac{C^2}{N \cdot m^2} = \frac{F}{m}$$

- Eq. (55.2) :

p/ V fixo $\rightarrow Q \propto C \rightarrow C$: medida da capacidade
do sistema de armazenar
carga/energia!

• sobre a energia potencial eletrostática armazenada em um capacitor

Considerar o processo de carga capacitor, capacitância C

se Q = carga armazenada $\rightarrow Q = CV$

considerar $Q \rightarrow Q + dQ \rightarrow dW = V dQ$: trabalho realizado
força externa

como $Q = CV$

$$\hookrightarrow W = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{1}{2C} Q^2$$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \text{ : energia potencial armazenada capacitor (58.1)}$$

• Considerar sistema de N -condutores (veja Sec. 3.6 Purcell p/ detalhes)

Q.: É possível generalizar Eq. (55.2), i.e., é possível relacionar as cargas Q_i e os potenciais V_j dos N -condutores ?

caso $N = 3$:

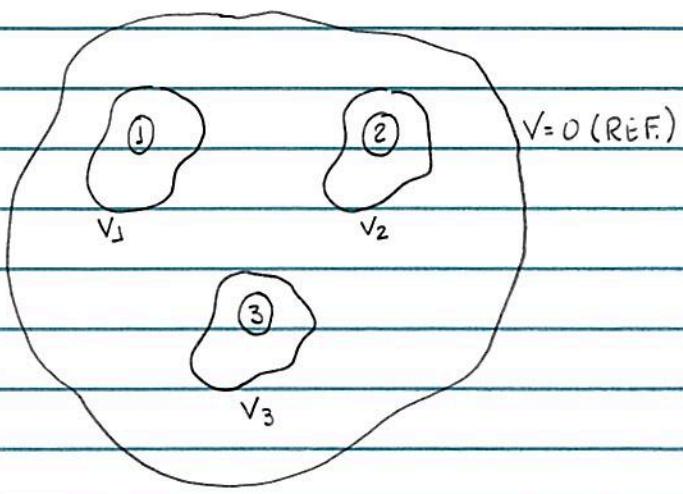


Fig. A

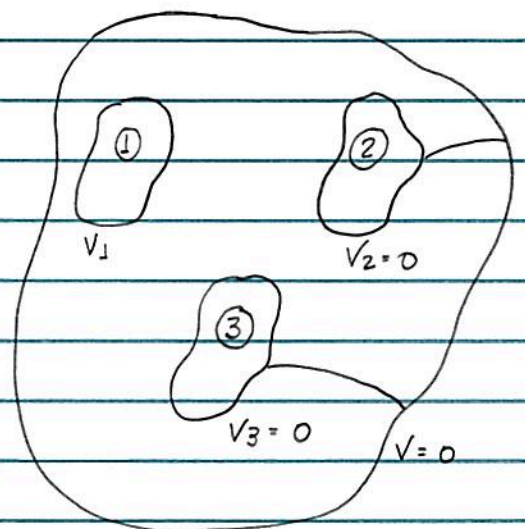


Fig. B

a fim de determinar a relação entre Q_i e V_j , vamos analisar 3 casos distintos:

(i) $V_1 \neq 0$ e $V_2 = V_3 = 0$, i.e., condutores 2 e 3 aterrados (Fig. B)

notar V_1 associado a Q_1 induzirá cargas em 2 e 3 de modo que $V_2 = V_3 = 0$

↳ podemos escrever: $Q_1 = C_{11}V_1$; $Q_2 = C_{21}V_1$; $Q_3 = C_{31}V_1$, (59.1)

onde C_{ij} : coeficientes de capacitância ~ geometria sistema

De modo análogo,

(ii) $V_2 \neq 0$ e $V_1 = V_3 = 0$

↳ $Q_1 = C_{12}V_2$; $Q_2 = C_{22}V_2$; $Q_3 = C_{32}V_2$

(iii) $V_3 \neq 0$ e $V_1 = V_2 = 0$

↳ $Q_1 = C_{13}V_3$; $Q_2 = C_{23}V_3$; $Q_3 = C_{33}V_3$

Como a superposição (i), (ii), (iii) = caso geral Fig. A

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Matriz de capacitância \hat{C}

pr N -condutores:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j \quad (59.2)$$

Verifica-se que (veja Sec. 5.4.3, Zangwill)

- $C_{ij} = C_{ji}$
- $C_{ii} > 0$
- $C_{ij} < 0, i \neq j$
- $\sum_j C_{ij} \gg 0$

Obs.: elementos diagonais $C_{ii} \neq$ capacitância C discutida acima
(veja exemplo abaixo)

sobre a Eq. (59.1): o fato de que Q_i é unicamente determinada por V_i é baseado no teorema de unicidade para soluções da Eq. de Laplace (39.2), veja Cap. 3.

Eq. (59.2) pode ser escrita como

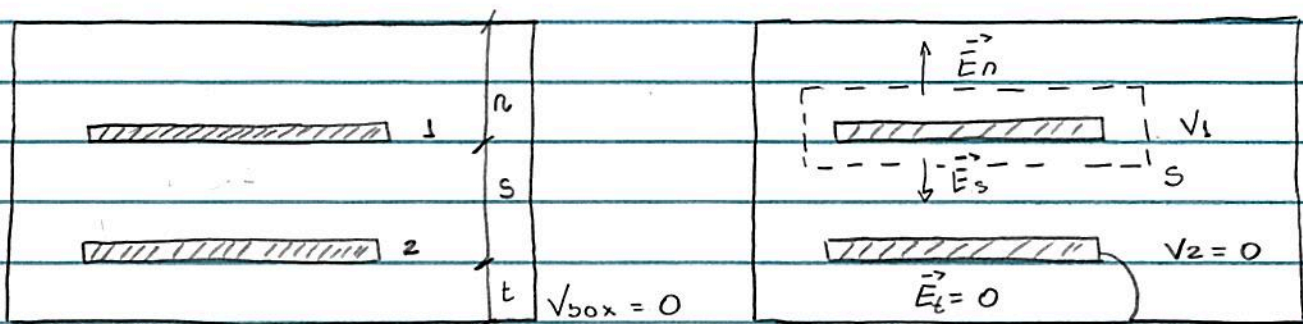
$$V_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j \quad ; \quad \hat{P}^{-1} = \hat{C} \quad (59.3)$$

↳ coeficientes de potencial

Verifica-se que

- $P_{ij} = P_{ji}$
- $p_{ii} > 0$
- $p_{ii} \gg P_{ij}$

Ex.: Determinar cij p/ sistema = caixa metálica \oplus 2 placas planas e \perp .



hipotese: $V_{box} = 0$

(i) $V_1 \neq 0$ e $V_2 = V_{box} = 0$

nesse caso: $E_s = \frac{(V_1 - V_2)}{s} = \frac{V_1}{s}$ e $E_n = \frac{(V_1 - V_{box})}{n} = \frac{V_1}{n}$

Lei de Gauss p/ sup S em torno placa 1:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q = A(E_n + E_s) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_1 = AV_1 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{s} \right)$$

$$\hookrightarrow C_{11} = \epsilon_0 A \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{s} \right) ; \lambda: \text{área placa}$$

de modo análogo p/ placa 2:

$$\hookrightarrow Q_2 = \epsilon_0 A (-E_s + 0) = -\frac{\epsilon_0 A}{s} V_1 \rightarrow C_{21} = -\frac{\epsilon_0 A}{s}$$

$$(ii) V_2 \neq 0 \text{ e } V_3 = V_{\text{box}} = 0$$

$$\text{Verifica-se que (exercício): } C_{22} = \epsilon_0 A \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) \text{ e } C_{12} = -\frac{\epsilon_0 A}{s}$$

$$\text{notam } C_{12} = C_{21} !$$

Q.: Qual a relação entre C_{ij} e a capacitância C de um capacitor de placas planas e // ?

$$\text{Eq. (60.3) } \oplus Q_1 = -Q_2 = Q,$$

$$V_1 = P_{11} Q - P_{12} Q \quad \rightarrow \quad V_1 - V_2 = (P_{11} + P_{22} - 2P_{12}) Q$$

$$V_2 = P_{21} Q - P_{22} Q$$

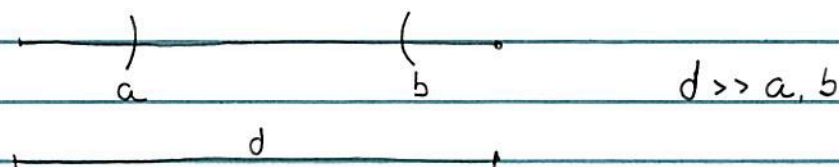
$$L \rightarrow C = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}$$

↑
verificam

$$= \epsilon_0 A \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{n+t} \right) \xrightarrow{n, t \rightarrow +\infty} C = \frac{\epsilon_0 A}{s}$$

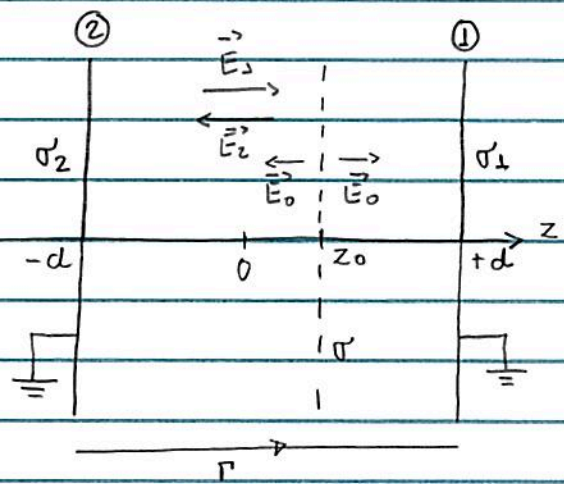
↙
verificam

Exercício: calcular coeficientes C_{ij} e P_{ij} p/ sistema = 2 esferas raios \underline{a} e \underline{b} separadas distância \underline{d}



Ex. P 5.4, Zengwill: consideramos 2 planos condutores infinitos em $z = \pm d$ \oplus plano infinito, densidade sup. carga σ , em z_0 , $-d < z_0 < d$;
 calcular: σ_1 e σ_2

$V(z_0)$
 Força/área sob plano em z_0 devido planos condutores.



hipotese: $\sigma = cte$

temos que: $\vec{E}_0 = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$, p/ $z > z_0 / z < z_0$

$\vec{E}_1 = \pm \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \hat{z}$, p/ $z > d / z < d$

$\vec{E}_2 = \pm \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{z}$, p/ $z > -d / z < -d$

(veja Fig. p/ $\sigma > 0$!)

Como $V(z = \pm d) = 0$

$\hookrightarrow V(d) - V(-d) = - \int_{-d}^d \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0$

$\hookrightarrow - \int_{-d, \Gamma}^{z_0} \left(\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \right) \hat{z} \cdot (dz \hat{z}) -$
 $- \int_{z_0, \Gamma}^{+d} \left(\frac{+\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \right) \hat{z} \cdot (dz \hat{z}) = 0$

$$\hookrightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{z_0}{d} \sigma$$

$$\text{como } \sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma$$

$$\hookrightarrow \sigma_1 = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z_0}{d} \right) \sigma$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{z_0}{d} \right) \sigma$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = 0 \quad \text{p/ } z > +d \\ \text{p/ } z < -d !$$

$$- V(z_0) - \cancel{V(d)} = - \int_{-d, r}^{z_0} \vec{E} \cdot d\vec{e} = \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma) \int_{-d}^{z_0} dz$$

$$\hookrightarrow V(z_0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z_0}{d} \right) (z_0 + d)$$

- força sob plano em $z = z_0$

$$\vec{F} = Q (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

$$= (\sigma A) \left(-\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \right) \hat{z}$$

$$\hookrightarrow \frac{\vec{F}}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \frac{z_0}{d} \hat{z}$$