Equação de Laplace

Lembrar ideia eletrostática (veja pg. 3): determinar a força que um conjunto de cargas elétricas $q_1, \dots q_N / \rho(\vec{r})$ em repouso exercem sob uma carga elétrica q (teste)

ou, alternativamente: determinar o campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ devido a um conjunto de cargas elétricas $q_i \ (i = 1, \dots N) / \rho(\vec{r})$ em repouso

Em princípio, $\vec{E}(\vec{r})$ pode ser calculado via Eq. (9.1):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \, \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

ou, alternativamente, podemos determinar o potencial elétrico $V = V(\vec{r})$ associado à distribuição de cargas em repouso via Eq. (30.2):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \, \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$\oplus$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

entretanto: - em alguns casos, cálculo das integrais: difícil !!!

- $\rho(\vec{r})$ não é inicialmente conhecido, e.g., em sistemas envolvendo condutores

· Alternativa p/ o cálculo $V(\vec{r})$: utilizar a forma diferencial da Eq. (30.2), i.e., Eq. (39.1):

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \quad : \text{ Eq. de Poisson}$$

⊕ <u>condições de contorno</u> apropriadas (veja abaixo).

em alguns casos, estamos interessados em determinar $V(\vec{r})$ em regiões do espaço tais que $\rho(\vec{r}) = 0$:

$$\text{Eq. (39.1)} \rightarrow \nabla^2 V = 0 \quad : \text{ Eq. de Laplace} \tag{63.1}$$

em particular, em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{63.2}$$

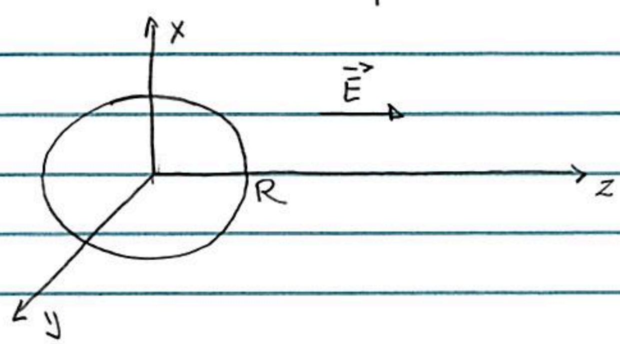
notar: Eq. (63.2): Eq. <u>diferencial parcial</u>!

<u>our task</u>: determinar solução (63.1) p/ certas condições de contorno

Ex.: <u>Exemplo</u> 3.8, G: considerar esfera <u>condutora</u> neutra, raio R, centro = origem, sob campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0\hat{z}$.

↳ Q.: Qual o potencial $V(\vec{r})$ p/ $r > R$?

(veja pg. 80)



Obs.: Determinação de soluções analíticas das Eqs. de Laplace e Poisson ∈ Teoria do potencial (veja Sec. 7.2, Zangwill)

método sol. Eq. (63.1) : separação de variáveis

inicial: algumas considerações sobre a solução geral Eq. (63.1)

· Teorema: se $V_1, V_2, \ldots, V_N$ são soluções da Eq. Laplace

↳ $V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} c_i V_i(\vec{r})$,

onde c_i são ctes arbitrárias, é sol. Eq. de Laplace.

Demonstração: como o Laplaciano ∇^2 é um op. linear

↳ $\nabla^2 V = \nabla^2 \left(\sum_i c_i V_i \right) = \sum_i c_i \nabla^2 V_i = 0$

· Teoremas de unicidade,

* verifica-se que, determinada uma solução das Eqs de Laplace e Poisson que satisfaz as condições de contorno fixadas
↳ essa é a solução ⇒ a solução é única!

· Teorema de unicidade I:

Considerar volume $\mathcal{V}$ cuja fronteira = superfície S (Fig. A)
↳ A solução $V(\vec{r})$, $\vec{r} \in \mathcal{V}$, da Eq. de Laplace é única se $V(\vec{r})$ p/ $\vec{r} \in S$ é conhecida.

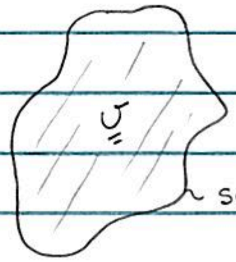


Fig. A

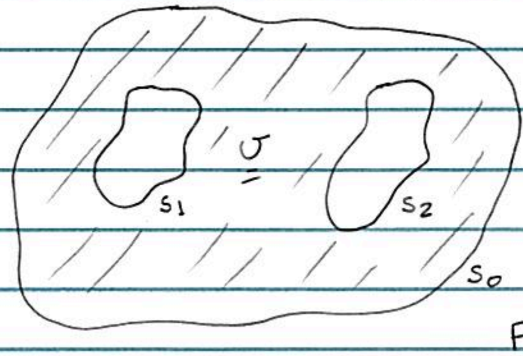


Fig. B

Demonstração:

hipótese: V_I e V_{II} são soluções da Eq. de Laplace que satisfazem as mesmas condições de contorno, i.e.,

$$\nabla^2 V_I = 0 \;,\; \nabla^2 V_{II} = 0 \quad \text{e} \quad V_I(\vec{r}) = V_{II}(\vec{r}) \;,\; \vec{r} \in S$$

seja $\Phi = V_I - V_{II}$

$\hookrightarrow$ $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 (V_I - V_{II}) = 0$ e $\underbrace{\Phi(\vec{r}) = 0 \text{ p/ } \vec{r} \in S}_{\text{C.C. } (*)}$

i.e., Φ satisfaz a Eq. de Laplace $\oplus$ condições de contorno $(*)$

Verifica-se que (veja abaixo): se $V(\vec{r})$ é sol. da Eq. de Laplace $\rightarrow$ máximos/mínimos $V(\vec{r})$ estão localizados na fronteira do volume $\underline{\underline{v}}$ $(**)$

C.C. $(*)$ $\oplus$ $(**)$

$\hookrightarrow$ $\Phi_{MIN} = \Phi_{MAX} = 0 \rightarrow \Phi(\vec{r}) = 0$ p/ $\vec{r} \in \underline{\underline{v}}$

$\hookrightarrow$ $V_I(\vec{r}) = V_{II}(\vec{r})$.

Demonstração alternativa:

considerar a identidade (5), pg. 16M.

$$\vec{\nabla}\cdot(V\vec{\nabla}V) = |\vec{\nabla}V|^2 + V\nabla^2 V$$

Teor. de Gauss

$$\hookrightarrow \int_{v} d^3r\, |\vec{\nabla}V|^2 + \int_{v} d^3r\, V\nabla^2 V = \int_{v} \vec{\nabla}\cdot(V\vec{\nabla}V)\, d^3r = \oint_{S} (V\vec{\nabla}V)\cdot d\vec{S} \quad (66.1)$$

em particular, p/ $V = \Phi$:

$$\int_{v} d^3r\, |\vec{\nabla}\Phi|^2 = \underbrace{\oint_{S} (\Phi\vec{\nabla}\Phi)\cdot d\vec{S}}_{=0,\ \text{pois } \Phi(\vec{r}) = 0 \text{ p/ } \vec{r}\in S}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hookrightarrow \displaystyle\int_{v} d^3r\, |\vec{\nabla}\Phi|^2 = 0 \\ \\ \text{como } |\vec{\nabla}\Phi|^2 \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{\nabla}\Phi = 0 \rightarrow \Phi = cte$$

$$\hookrightarrow V_I = V_{II} + cte \;!$$

Obs.: resultado pode ser generalizado p/ o caso volume v = volume exterior conjunto de superfícies S_i (Fig. B)

nesse caso, $V(\vec{r})$, $\vec{r}\in S_i$, é conhecida

Obs.: - condição de contorno $V(\vec{r})$, $\vec{r}\in S$, conhecida: condições de contorno de Dirichlet

- condição de contorno $\hat{n}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r})$, $\vec{r}\in S$, conhecida: condições de contorno de Neumann

- ambas $V(\vec{r})$ e $\hat{n}\cdot\vec{\nabla}V(\vec{r})$, $\vec{r}\in S$, conhecidas:
  condições de contorno de Cauchy.

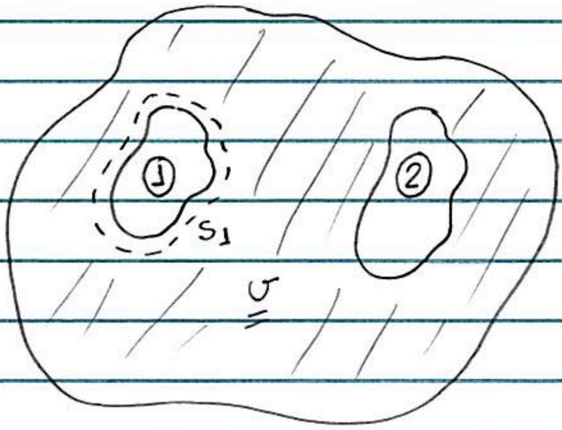
Ex.1: sistema = 2 condutores,
potencial sup. dos condutores V_1 e V_2, ctes!
$S_0 \to +\infty \oplus V_0 = 0$.

Ex. 2: sistema = 2 condutores,
Q_1 e Q_2 : carga total dos condutores

notar: condições de contorno Ex.1 $\neq$ Ex.2.
p/ o segundo caso, onde apenas a carga total de cada condutor é conhecida, verifica-se que a solução $V(\vec{r})$ da Eq. de Laplace é única!

· Teorema de unicidade II:

considerar volume $\underline{v}$ exterior a um conjunto de condutores tal que a carga total Q_i em cada condutor é conhecida
↳ a solução $V(\vec{r})$ da Eq. de Laplace é única.



Demonstração: de modo análogo ao teorema I,

hipótese: V_I e V_{II} são soluções da Eq. de Laplace

se $\Phi = V_I - V_{II} \rightarrow \nabla^2 \Phi = 0$

p/ a sup. Gaussiana S_i que envolve o condutor i,

$$\oint_{S_i} (\vec{E}_I - \vec{E}_{II}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}(Q_i - Q_i) = 0 = \oint_{S_i} \vec{\nabla}(V_I - V_{II}) \cdot d\vec{S}$$

$$\hookrightarrow \oint_S \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{S} = 0$$

Eq. (66.1) p/ $V = \Phi$:

$$\int_v d^3r \, |\vec{\nabla}\Phi|^2 + \underbrace{\int_v d^3r \, \Phi \nabla^2 \Phi}_{=0} = \underbrace{\oint_S \Phi \, \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{S}}_{(I)}$$

como $\Phi(\vec{r}) \equiv \Phi_i = cte$ p/ $\vec{r} \in S_i$

$$\hookrightarrow (I) = \sum_i \Phi_i \oint_{S_i} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\hookrightarrow \int_v d^3r \, |\vec{\nabla}\Phi|^2 = 0$$

de modo análogo ao teorema I $\rightarrow$ $V_I = V_{II} + cte$!

notar $\neq$s teoremas I e II :

T. I : $V(r) = V_i \sim$ superfície S_i é conhecido

T. II : $V_i \sim$ sup. S_i não é conhecido. Foi utilizado na demonstração apenas que V_i = cte, i.e., sup. condutor = equipotencial !

· Sobre o resultado (**), pg. 65,

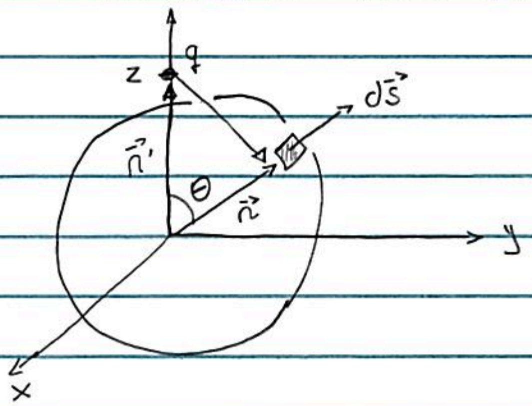
Vamos verificá-lo em duas etapas,

(i) Se $V = V(\vec{r})$ é sol. da Eq. de Laplace e S = superfície esférica, raio R, centro = origem

$$\hookrightarrow \oint_S V(\vec{r})\, ds = 4\pi R^2 V(\vec{r}=0) \qquad (69.1)$$

Demonstração:

considerar $V(\vec{r})$ devido à carga pontual q @ $(0,0,z)$, $z > R$!



p/ $\vec{r} \in$ sup. S :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Como : $ds = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \left(r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)^{1/2} = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$= \left(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta\right)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow \oint_S V(\vec{r})\,ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \frac{R^2 \sin\theta}{(R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta)^{1/2}}}_{\frac{1}{Rz}(R^2+z^2-2Rz\cos\theta)^{1/2}\Big|_0^{\pi}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{Rz}\Big((R+z) - \underbrace{|R-z|}_{z-R,\text{ pois } z>R}\Big)\cdot 2\pi$$

$$= \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 z}}_{V(0)} \cdot 4\pi R^2 \qquad (70.1)$$

p/ N- cargas pontuais $q_i \notin$ interior da esfera S,

Eq. (70.1) ⊕ princípio de superposição → Eq. (69.1) !

notar: podemos escrever (69.1) como

$$\frac{1}{4\pi R^2}\oint_{Esfera} V(\vec{r})\,ds = V(0)$$: valor médio de $V(\vec{r})$ sob uma superfície esférica = $V(0)$

(ii) Eq. (69.1) → $V(\vec{r})$, sol. Eq. de Laplace, não admite máximos/mínimos locais, i.e., valores extremos de $V(\vec{r})$ @ fronteiras volume $\underline{\underline{V}}$

Com efeito, se $V(\vec{r})$ apresenta máximo (mínimo) local em $\vec{r} = \vec{r}_0$

$$\hookrightarrow \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{\substack{\text{Esfera,}\\ \text{raio } R,\\ \text{centro } \vec{r}_0}} V(\vec{r})\,ds < V(\vec{r}_0) \quad (> V(\vec{r}_0))$$: contradição !

· Soluçaõ Eq. de Laplace via método de separaçaõ de variáveis.

idea: considerar volume $\underline{\underline{v}}$ exterior conjunto superfícies $\underline{\underline{S_i}}$

$V(\vec{r})$ ou $\sigma(\vec{r})$, $\vec{r} \in$ sup. S_i, conhecida

hipótese: sup. S_i apresenta simetria particular, e.g., cartesiana, esférica, cilíndrica.

simetria sup. S_i ⟶ escolha sistema de coordenadas (u, v, w).

↳ hipótese soluçaõ geral Eq. de Laplace:

$$V(\vec{r}) = V(u, v, w) = A(u)\, B(v)\, C(w) \qquad (71.1)$$

Eq. de Laplace = eq. diferencial parcial $\xrightarrow[\uparrow\ (71.1)]{}$ 3 eqs. diferenciais ordinárias 2ª ordem ⊕ 3 ctes de separaçaõ

A fim de ilustrar o método, vamos considerar uma série de exemplos

· inicial: sobre conjunto completo de funções ortonormais

considerar: conjunto de funções $f_k(x)$, $a \leq x \leq b$, $k = 1, 2, \ldots$

Definiçaõ: $f_k(x)$ é um conjunto completo de funções se $\forall\, F(x)$, $a \leq x \leq b$, pode ser escrita como uma combinaçaõ linear $f_k(x)$, i.e.,

$$F(x) = \sum_k c_k \psi_k(x) \qquad (72.1)$$

A completeza de um conjunto de funções pode ser escrita como

$$\sum_k \psi_k^*(x') \psi_k(x) = \delta(x-x') \quad ; \quad a \leq x, x' \leq b \qquad (72.2)$$

É fácil verificar que (72.2) → (72.1):

$$F(x) = \int_a^b dx' \, \delta(x-x') F(x') \quad ; \quad a \leq x, x' \leq b$$

$$\overset{(72.2)}{=} \sum_k \underbrace{\int_a^b dx' \, F(x') \psi_k^*(x')}_{\equiv c_k} \psi_k(x) \quad : \text{Eq. } (72.1)$$

notar: se $F(x) = \psi_j(x) \rightarrow c_k = \delta_{kj}$

$$\hookrightarrow \int_a^b dx \, \psi_k^*(x) \psi_j(x) = \delta_{kj} \quad : \text{relação de ortonormalidade} \qquad (72.3)$$

Obs.: notar similaridade com a representação de um vetor em uma base ⊥ (veja pg. 3M).

(1) Solução Eq. de Laplace, <u>simetria cartesiana</u>

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (72.4)$$

se $V(\vec{r}) = V(x,y,z) = X(x) Y(y) Z(z)$ em (72.4):

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

$$* \frac{1}{V} : \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \qquad (73.1)$$

notar: cada termo (73.1) é função de apenas 1-variável;
como soma termos $= 0 \rightarrow$ cada termo $=$ cte

podemos escrever

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 X \; ; \; \frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2 Y \; ; \; \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 Z.$$

onde $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$; α, β, γ: ctes de separação

temos que:

$$X_\alpha(x) = \begin{cases} A_0 + B_0 x & , \alpha = 0 \\ A_\alpha e^{\alpha x} + B_\alpha e^{-\alpha x} & , \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$Y_\beta(y) = \begin{cases} C_0 + D_0 y & , \beta = 0 \\ C_\beta e^{\beta x} + D_\beta e^{-\beta x} & , \beta \neq 0 \end{cases} \qquad (73.2)$$

$$Z_\gamma(z) = \begin{cases} E_0 + F_0 z & , \gamma = 0 \\ E_\gamma e^{\gamma x} + F_\gamma e^{-\gamma x} & , \gamma \neq 0 \end{cases}$$

notar: soluções são rotuladas pelas ctes de separação

solução geral: $$V(\vec{r}) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} X_\alpha(x) Y_\beta(y) Z_\gamma(z)\, \delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \qquad (73.3)$$

· Lembrar: Série de Fourier

considerar função $f = f(x)$ tal que

- f é periódica, período L
- "single-valued" e contínua por partes (= # descontinuidades finito)
- # máximos e mínimos finito em L (73.4)
- $\int_{x_0}^{x_0+L} dx\, |f(x)| < +\infty$

↳ $f = f(x)$ pode ser expandida em uma série de $\sin(x)$ e $\cos(x)$, i.e.,

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \qquad (73.5)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} dx\, f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} dx\, f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \qquad (73.6)$$

· determinação coeficientes a_n e b_n ~ ortogonalidade funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$

temos que:
$$\int_{x_0}^{x_0+L} dx\, \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) = \frac{1}{2} L\, \delta_{n,m} \quad , \; n,m \neq 0$$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} dx\, \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) = 0$$

$\hookrightarrow \int_{x_0}^{x_0+L} dx \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) * \text{Eq. } (73.5)$:

$$\int_{x_0}^{x_0+L} dx\, f(x) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right) = \frac{1}{2} a_0 \underbrace{\int_{x}^{x_0+L} dx \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)}_{0} +$$

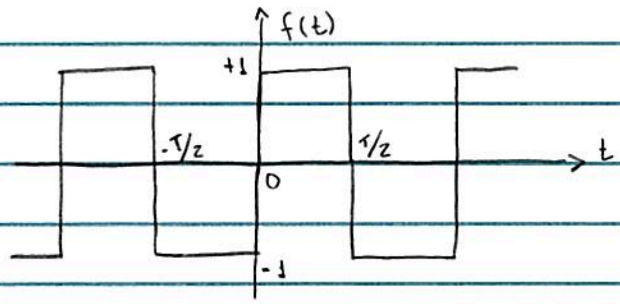
$$+ \sum_{n\geq 1} a_n \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+L} dx \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)}_{1/2 L\, \delta_{n,m}} + b_n \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+L} dx \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi m x}{L}\right)}_{0}$$

$\hookrightarrow$ Eq. (73.6) !

Obs. 1 : Eq. (73.4) = condições de Dirichlet

Obs. 2 : uma função não-periódica pode ser escrita como (73.5) em um intervalo $a < x < b$.

Ex.: Determinar a série de Fourier da "onda-quadrada":



Como $f(t)$ é ímpar $\longrightarrow$ $a_n = 0$ e $b_n \neq 0$

Eq. (73.6) :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} dt\, f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} dt\, \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$\hookrightarrow f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3}\sin\left(3\cdot\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5\cdot\frac{2\pi t}{T}\right) + \ldots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$: frequência angular

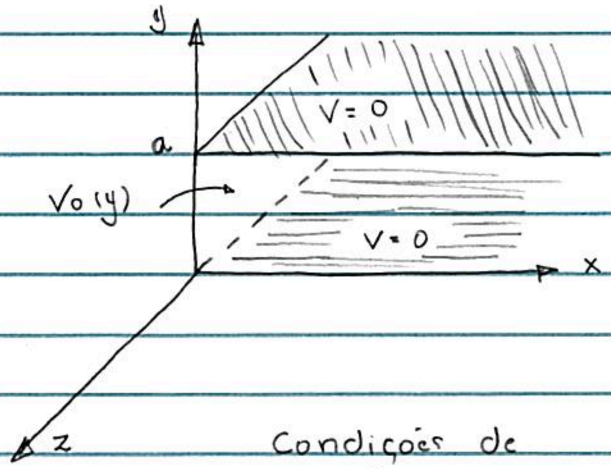
Ex.: Exemplo 3.3, G.:

sistema: placa metálica ∞ @ $y=0$, potencial $V=0$

⊕ " " " " $y=a$, " $V=0$

⊕ " " " " $x=0$, " $V_0(y)$;

determinar potencial $V(\vec{r}) = V(x,y,z)$; $x \geq 0$, $0 \leq y \leq a$, $z \leq 0$ } região interior placas metálicas!



Condições de contorno (c.c.):
$$\begin{cases} V(x,0,z) = 0 \\ V(x,a,z) = 0 \\ V(0,y,z) = V_0(y) \\ V(x\to+\infty,y,z) = 0 \quad : \text{hipótese} \end{cases}$$

notar: c.c. $\not\propto z$ $\longrightarrow$ $Z_r(z) = $ cte ou $r=0$: sistema 2-D!

↳ $\alpha^2 = -\beta^2 \equiv k^2$: escolha apropriada p/ c.c. acima!

Eq. (73.3), $k \neq 0$ e fixo:

$$V(x,y) = X(x)\,Y(y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\sin ky + D\cos ky)$$

ctes A, B, C, D e k ~ condições de contorno

notar:

- $V(x\to+\infty, y) = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow V(x,y) = e^{-kx}(C\sin ky + D\cos ky)$

Obs. 1 : $X_{k=0}(x)$ não satisfaz c.c.

Obs. 2 : escolha $\alpha = k > 0$, O.K. c/ c.c.

- $V(x,0) = D e^{-kx} = 0 \to D = 0$

↳ $V(x,y) = C e^{-kx} \sin ky$

- $V(x,a) = C e^{-kx} \sin ka = 0 \to ka = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

↳ solução geral: $$V(x,y) = \sum_{n \geq 1} C_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a) \qquad (75.1)$$

sobre coeficientes C_n,

- $V(0,y) = V_0(y) = \sum_{n \geq 1} C_n \sin(n\pi y/a)$: série de Fourier $V_0(y)$ $\qquad (75.2)$

como $\psi_n(y) = \sin(n\pi y/a)$: funções ⊥, $0 \leq x \leq a$,

$\int_0^a dy \sin(m\pi y/a) * (75.2)$:

$$\sum_{n \geq 1} C_n \underbrace{\int_0^a dy \sin(n\pi y/a) \sin(m\pi y/a)}_{a/2\ \delta_{n,m}} = \int_0^a dy\, V_0(y) \sin(m\pi y/a) \qquad (75.2.1)$$

$$\hookrightarrow C_n = \frac{2}{a} \int_0^a dy\, V_0(y) \sin(n\pi y/a) \qquad (75.3)$$

Obs.: comparar Eq. (75.3) c/ (72.2) - (72.3)

↳ solução geral : Eq. (75.1) ⊕ (75.3),

Caso particular, V_0 = cte

↳ $c_n = \frac{2V_0}{a}\int_0^a dy \sin(n\pi y/a) = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$

Eq. (75.1) : $V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a)$

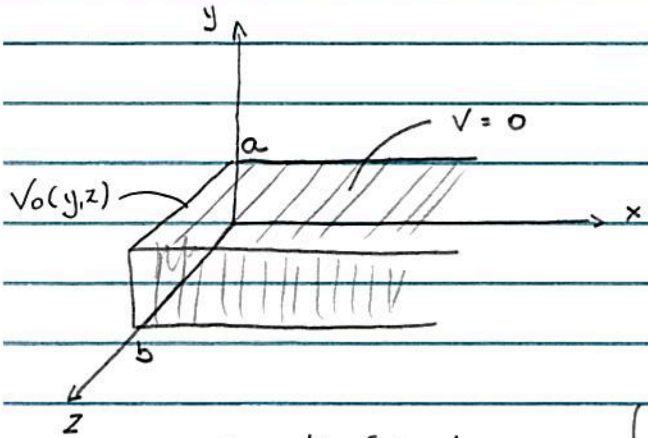
Veja Figs 3.18 e 3.19 $\underline{\underline{G}}$.

Estudar exemplos 3.4 e 3.5 $\underline{\underline{G}}$.

Ex.: Exemplo 3.5, G.,

sistema = tubo metálico, semi-infinito, seção transversal retangular;
laterais: potencial $V = 0$,
base // plano yz: potencial $V = V_0(y,z)$;
determinar potencial

$$V(\vec{r}) = V(x,y,z) \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq a \\ 0 \leq z \leq b \end{array}\right\} \text{região interior tubo}$$



condições de contorno (c.c.):

$$\left\{\begin{array}{l} V(x,y,0) = V(x,y,b) = 0 \\ V(x,0,z) = V(x,a,z) = 0 \\ V(0,y,z) = V_0(y,z) \\ V(x \to +\infty, y, z) = 0 \quad : \text{hipótese} \end{array}\right.$$

solução geral: $V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$

onde $X_\alpha(x) = A_\alpha e^{\alpha x} + B_\alpha e^{-\alpha x}$, $\alpha \neq 0$

$Y_\beta(y)$

$Z_\gamma(z)$ ⊕ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$

simetria sistema $\rightarrow$ $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$

ou $\alpha^2 > 0$ e $\beta^2, \gamma^2 < 0$

↳ $V(x,y,z) = (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})(C\sin\beta y + D\cos\beta y) *$

$* (E\sin\gamma z + F\cos\gamma z)$

considerando as c.c.:

- $V(x \to +\infty, y, z) = 0 \to A = 0$

↳ $V(x,y,z) = e^{-\alpha x}(C\sin\beta y + D\cos\beta y)(E\sin\gamma z + F\cos\gamma z)$

- $V(x,y,0) = 0 = e^{-\alpha x}(C\sin\beta y + D\cos\beta y)F \to F = 0$

↳ $V(x,y,z) = e^{-\alpha x}(C\sin\beta y + D\cos\beta y)\sin\gamma z$

- $V(x,0,z) = 0 \to e^{-\alpha x} \cdot D \cdot \sin\gamma z = 0 \to D = 0$

↳ $V(x,y,z) = C e^{-\alpha x}\sin\beta y \sin\gamma z$

- $V(x,a,z) = 0 = C e^{-\alpha x}\sin\beta a \sin\gamma z \to \beta a = n\pi \; ; \; n = 1, 2, \ldots$

- $V(x,y,b) = 0 = C e^{-\alpha x}\sin\beta y \sin\gamma b \to \gamma b = m\pi \; ; \; m = 1, 2, \ldots$

↳ solução geral: $V(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m}\, e^{-\alpha x}\sin(n\pi y/a)\sin(m\pi z/b)$

$\oplus \quad \alpha = \pi\left((n/a)^2 + (m/b)^2\right)^{1/2}$

Sobre os coeficientes $C_{n,m}$

$$V(0,y,z) = V_0(y,z) = \sum_{n,m} C_{n,m} \sin(n\pi y/a)\sin(m\pi z/b) \qquad (75.4)$$

$$\int_0^a dy \int_0^b dz \, \sin(n'\pi y/a)\sin(m'\pi z/b) * (75.4):$$

$$\sum_{n,m} C_{n,m} \underbrace{\int_0^a dy \sin(n\pi y/a)\sin(n'\pi y/a)}_{a/2\,\delta_{n,n'}} \underbrace{\int_0^b dz \sin(m\pi z/b)\sin(m'\pi z/b)}_{b/2\,\delta_{m,m'}} =$$

$$= \int_0^a dy \int_0^b dz \; V_0(y,z)\sin(n'\pi y/a)\sin(m'\pi y/b)$$

$$\hookrightarrow C_{nm} = \frac{4}{ab}\int_0^a dy \int_0^b dz \; V_0(y,z)\sin(n\pi y/a)\sin(m\pi z/b)$$

↳ solução geral : Eq. (75.1) ⊕ (75.3).

Caso particular, $V_0 = cte$

↳ $C_n = \frac{2V_0}{a}\int_0^a dy \sin(n\pi y/a) = \frac{2V_0}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ 4V_0/n\pi, & n \text{ ímpar} \end{cases}$

Eq. (75.1) : $V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n}e^{-n\pi x/a}\sin(n\pi y/a)$

Veja Figs. 3.18 e 3.19, G.

Estudar exemplos 3.4 e 3.5, G.

(2) Solução Eq. de Laplace, simetria esférica

Laplaciano em coordenadas esféricas, pg. 22 M,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (76.1)$$

em particular, vamos considerar sistemas c/ simetria azimutal, i.e. $V(\vec{r}) = V(r,\theta) \longrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0$

↳ $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = 0 \qquad (76.2)$$

Se $V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ em (76.2) :

$$\Theta \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0 \quad * \frac{1}{V}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0$$

como cada termo depende apenas de uma variável

↳ cada termo = cte

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = \lambda R \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -\lambda \sin\theta\, \Theta \qquad (77.1)$$

λ ↳ cte de separação!

- Eq. angular,

se $x = \cos\theta \longrightarrow \frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$

$$\hookrightarrow -\sin\theta \frac{d}{dx}\left((-1)\sin^2\theta \frac{d\Theta}{dx}\right) = -\kappa \sin\theta\, \Theta$$

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right) + \lambda\Theta = 0 \qquad (77.2)$$

: Eq. diferencial de Legendre

notar: (77.2) é invariante se $x \to -x \to \Theta(x)$: paridade definida!

Lembrar: solução via série de potências,

se $\Theta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad ; \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

em (77.2) : $$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - \lambda}{(j+1)(j+2)} a_j \qquad (78.1)$$

se $\Theta(x)$ par : $a_1 = 0$ e $a_j \propto a_0$
" " ímpar : $a_0 = 0$ e $a_j \propto a_1$

p/ $j \gg 1$: $\dfrac{a_{j+2}}{a_j} \to \dfrac{1/j+2}{1/j} \longrightarrow \Theta(x) \to \sum_j \dfrac{1}{j} x^j$

notar: $\Theta(\pm 1)$: diverge logaritmicamente $(\theta = 0, \pi)$ (*)

↳ série p/ $\Theta(x)$ deve apresentar número finito de termos $\ell = 0, 1, 2 \ldots$

(78.1) : se $j_{MAX} = \ell \to \lambda = \ell(\ell+1)$; $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

↳ $\Theta(x) = P_\ell(x) = P_\ell(\cos\theta)$: polinômio de Legendre (78.2)

Obs.: segunda solução linearmente independente de (77.2) excluída pois também apresenta comportamento (*)!

em resumo: soluções fisicamente OK (77.2) : Eq. (78.2) !

· sobre os polinômios de Legendre,

$P_\ell(x)$ pode ser escrito como

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell \quad : \text{Fórmula de Rodrigues} \qquad (78.3)$$

Exemplos : $P_0(x) = 1$ $\quad P_1(x) = x$

$P_2(x) = (3x^2-1)/2$ $\quad P_3(x) = (5x^3-3x)/2$

$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$

Propriedades:

(1) $P_\ell(\pm 1) = (\pm 1)^\ell$

(2) $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$: paridade definida

(3)

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell,\ell'}$$: relação $\perp$

(veja Eq. (72.3))

ou

$$\int_0^{\pi} P_\ell(\cos\theta) P_{\ell'}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2\ell+1}\,\delta_{\ell,\ell'} \qquad (79.1)$$

(4) $P_\ell(x)$: conjunto completo de funções,

se $f = f(x)$ é contínua por partes em $[-1;1]$

$\Rightarrow$ $$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(x)$$

onde $$a_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, f(x) P_\ell(x) \qquad (79.2)$$

(5) verifica-se que

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}}_{\text{Função geradora } P_\ell(x)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(x) \quad ; \quad \begin{matrix} |x|<1 \\ 0<t<1 \end{matrix} \qquad (79.3)$$

(6) relações de recorrência,

verifica-se que

- $(\ell+1) P_{\ell+1} = (2\ell+1)\, x P_\ell - \ell P_{\ell-1}$

- $P'_{\ell+1} + P'_{\ell-1} = P_\ell + 2x P'_\ell$

- $P'_{\ell-1} = -\ell P_\ell + x P'_\ell$

- $(2\ell+1) P_\ell = P'_{\ell+1} - P'_{\ell-1}$

- Eq. radial.

a eq. radial pode ser escrita como

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{80.1}$$

se $R(r) = Ar^\alpha$ em (80.1) :

$$Ar^\alpha \left(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - \lambda \right) = 0 \rightarrow \alpha(\alpha+1) = \lambda = l(l+1)$$

$\hookrightarrow \alpha = l, -(l+1)$

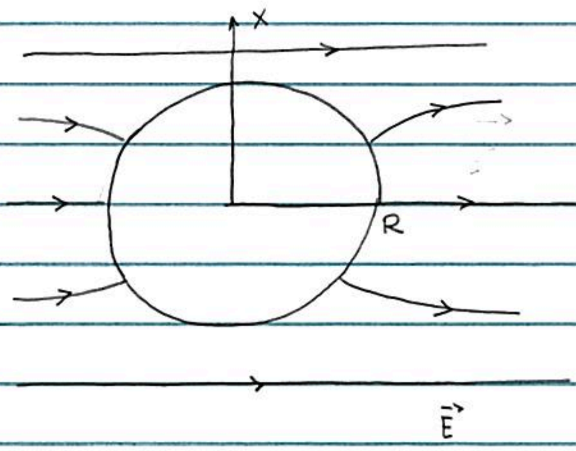
$$\hookrightarrow R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}$$

solução geral (76.2) :

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \tag{80.2}$$

Ex.: Exemplo 3.8. G. : considerar esfera condutora neutra, raio R, centro = origem, sob campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{z}$.

Determinar potencial $V(\vec{r})$ p/ $r > R$?



como esfera = equipotencial → hipótese $V_{ESF} = 0$

p/ $|z| >> R$ → $V(x,y,z) = -E_0 z + C$

↳ condições de contorno : $\begin{cases} V(R,\theta) = 0 \\ V(r>>R,\theta) = -E_0 z + C \end{cases}$

como o sistema apresenta simetria azimutal
↳ solução = Eq. (80.2) !

notar :

- $V(R,\theta) = \sum_\ell \left(A_\ell R^\ell + \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta) = 0 \rightarrow B_\ell = -A_\ell R^{2\ell+1}$

$$↳ V(r,\theta) = \sum_\ell A_\ell \left(r^\ell - \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

- $V(r>>R,\theta) = \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) = -E_0 z + C$

$$= -E_0 r \cos\theta + C$$

$$= -E_0 r P_1(\cos\theta) + C P_0(\cos\theta)$$

↳ $A_0 = C$
$A_1 = -E_0$; $A_\ell = 0, \ \ell \geq 2$

$$↳ V(r,\theta) = C\left(1 - \frac{R}{r}\right) - E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$\hookrightarrow \vec{E}(r,\theta) = \hat{r}\left(E_0\left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right)\cos\theta \;-\; \frac{R\,C}{r^2}\right) +$

$\quad - \hat{\theta}\, E_0\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\sin\theta$

condições de contorno $\vec{E}$ na superfície esfera, Eq. (40.2) :

$E_r(R,\theta) - 0 = 3E_0\cos\theta - \frac{C}{R} = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}$: densidade superficial de carga induzida

$\hookrightarrow Q = \int_{ESF} ds\, \sigma(\theta) = \int\left(3E_0\cos\theta - \frac{C}{R}\right) R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$Q = 0$ somente se $C = 0$!

$\hookrightarrow V(r,\theta) = -E_0\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$

Obs. : caso geral, simetria esférica.

Se $V(\vec{r}) = V(r,\theta,\varphi)$, verifica-se que (veja Cap. 3, Jackson)

Eq. (80.2)

$$\hookrightarrow V(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (82.1)$$

onde

$Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,(-1)^m e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$: Harmônico esférico !

(3) Solução Eq. de Laplace, simetria cilíndrica

Laplaciano em coordenadas cilíndricas, pg. 25M

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (82.2)$$

se $V(\vec{r}) = V(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\,G(\varphi)\,Z(z)$ em (82.2) :

$$G Z \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV}{d\rho}\right) + R Z \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2 G}{d\varphi^2} + R G \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad * \frac{1}{V}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{R}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{G}\frac{d^2 G}{d\varphi^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2$$: cte de separação

$$\hookrightarrow \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \qquad (82.3)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{R}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + k^2\rho^2 = -\frac{1}{G}\frac{d^2 G}{d\varphi^2} = \nu^2$$: cte de separação

$$\hookrightarrow \frac{d^2 G}{d\varphi^2} + \nu^2 G = 0 \qquad (82.4)$$

$$\hookrightarrow \rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + (\rho^2 k^2 - \nu^2) R = 0 \qquad (82.5)$$

se $\nu^2 \geq 0$ e $k^2 \geq 0$, temos que

$$G_\nu(\varphi) = \begin{cases} C_0 + D_0\varphi, & \nu = 0 \\ C_\nu e^{i\nu\varphi} + D_\nu e^{-i\nu\varphi}, & \nu \neq 0 \end{cases}$$

$$(82.5)$$

$$Z_\kappa(z) = \begin{cases} E_0 + F_0 z, & \kappa = 0 \\ E_\kappa e^{\kappa z} + F_\kappa e^{-\kappa z}, & \kappa \neq 0 \end{cases}$$

como: $V(\rho, 0, z) = V(\rho, 2\pi, z)$, i.e. $V(\vec{r})$ single-valued

$\hookrightarrow$ $G_\nu(0) = G_\nu(2\pi) \rightarrow \nu \in \mathbb{Z}$.

sobre a eq. radial (82.5),

se $x = \kappa\rho \rightarrow \dfrac{d}{d\rho} = \dfrac{dx}{d\rho}\dfrac{d}{dx} = \kappa\dfrac{d}{dx}$ em (82.5):

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \quad : \text{Eq. de Bessel} \qquad (82.6)$$

solução via <u>série de potências</u>,

se $R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ em (82.6)

$\hookrightarrow$ $\alpha = \pm\nu$ e $a_{2j} = -\dfrac{1}{4j(j+\nu)} a_{2j-2}$; $j = 1, 2, \ldots$

$\hookrightarrow$ $a_j = 0$, j impar

e $a_{2j} = \dfrac{(-1)^j \Gamma(\alpha+1)}{2^{2j} j! \, \Gamma(j+\alpha+1)} a_0$

escolhendo $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$

$$\hookrightarrow R(x) = J_{\pm\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j\pm\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \qquad (82.7)$$

Eq. (82.7) : Função de Bessel de 1º tipo, ordem $\pm\nu$.

- se $\nu \notin \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$: linearmente independentes
- se $\nu \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ " " " " dependentes,

i.e., $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$

nesse caso, soluções (82.6) :

$J_\nu(x)$

e $N_\nu(x) = \dfrac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$: Função de Neumann $\qquad$ (82.8)

Lembrar, comportamento assintótico:

- $J_\nu(x) \sim x^\nu$
  $N_\nu(x) \sim x^{-\nu}$, $\nu \neq 0$, $x \ll 1$

- $J_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \dfrac{\nu\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$
  $N_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \dfrac{\nu\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $x \gg 1$

Relação de $\perp$:

$$\int_0^a d\rho\, \rho\, J_\nu\left(x_{\nu n'}\frac{\rho}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) = \frac{1}{2} a^2 \left(J_{\nu+1}(x_{\nu n})\right)^2 \delta_{n,n'} \qquad (82.9)$$

onde $J_\nu(x_{\nu n}) = 0$

$\hookrightarrow$ n-ésimo zero de $J_\nu(x)$!

em resumo, solução eq. radial (82.5) :

$$R_{\nu k}(\rho) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln\rho, & k=0,\ \nu=0 \\ A_\nu \rho^{\nu} + B_\nu \rho^{-\nu}, & k=0,\ \nu\neq 0 \\ A_{\nu k} J_\nu(k\rho) + B_{\nu k} N_\nu(k\rho), & k^2>0 \\ A_{\nu k} I_\nu(\bar{k}\rho) + B_{\nu k} K_\nu(\bar{k}\rho), & k^2=-\bar{k}^2<0 \end{cases} \qquad (82.10)$$

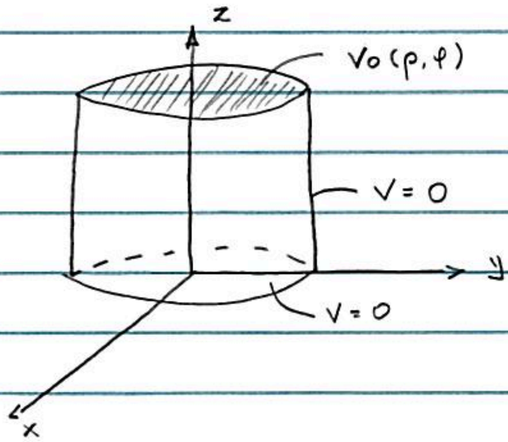
onde

$$I_\nu(\bar{k}\rho) = i^{-\nu} J_\nu(ik\rho)$$

$$K_\nu(\bar{k}\rho) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1}\left(J_\nu(ik\rho) + i N_\nu(ik\rho)\right)$$

: Funções de Bessel modificadas

Ex.: Considerar cilindro metálico, raio a, altura L;
determinar $V(\vec{r})$ p/ $\rho<a$.



condições de contorno :
$$\begin{cases} V(\rho,\varphi,0) = 0 \\ V(a,\varphi,z) = 0 \\ V(\rho,\varphi,L) = V_0(\rho,\varphi) \end{cases}$$

Eqs. (82.5) e (82.10) ⊕ hipótese $k^2>0$

$$V(\vec{r}) = V(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\,G(\varphi)\,Z(z)$$

$$= \left(A J_\nu(k\rho) + B N_\nu(k\rho)\right)\left(C e^{i\nu\varphi} + D e^{-i\nu\varphi}\right)\left(E e^{kz} + F e^{-kz}\right)$$

Lembrar: $V(\rho,0,z) = V(\rho,2\pi,z) \rightarrow \nu = m = 0,1,2,\ldots$

notar:

- $V(\rho, \varphi, 0) = 0 \rightarrow E = -F$

- $V(\rho = 0, \varphi, z) < +\infty \rightarrow B = 0$

↳ $V(\rho, \varphi z) = J_m(k\rho)\left(A \sin(m\varphi) + B\cos(m\varphi)\right) \sinh(kz)$

- $V(a, \varphi, z) = 0 \rightarrow J_m(ka) = 0$

↳ $K_{mn} a = X_{mn}$: n-ésimo zero de $J_m(x)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

↳ solução geral:

$$V(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(K_{mn}\rho) \sinh(K_{mn} z) *$$

$$* \left(A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi\right)$$

- $V(\rho, \varphi, L) = V_0(\rho, \varphi) =$

$$= \sum_{m,n} J_m(K_{mn}\rho) \sinh(K_{mn} L)\left(A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi\right)$$

utilizando as relações de H (75.2.1) e (82.9), verifica-se que (exercício)

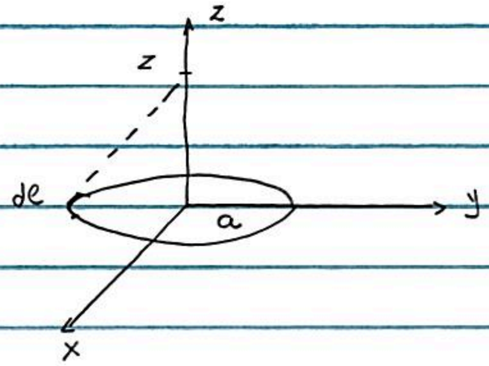
$$A_{mn} = C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\, \rho\, V_0(\rho, \varphi)\, J_m(K_{mn}\rho) \sin m\varphi$$

$$B_{mn} = C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\rho\, \rho\, V_0(\rho, \varphi)\, J_m(K_{mn}\rho) \cos m\varphi$$

onde $\mathbb{C} = 2\,\mathrm{cosech}(K_{mn}L) / \pi a^2 J^2_{m+1}(K_{mn}a)$

Obs.: P 3.24 e P3.25, $\underline{\underline{G}}$, casos particulares, $L \to +\infty$!

Ex.: simetria esférica: considerar anel, raio $\underline{a}$, $\lambda = cte$;
determinar $V(\vec{r})$.



· Lembrar caso particular $V(0,0,z)$:

p/ comprimento infinitesimal dl,

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{z^2+a^2}} \quad ; \quad dq = \lambda dl = \lambda a\, d\varphi$$

$$\hookrightarrow V(0,0,z) = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{\lambda 2\pi a}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} \qquad (82.11)$$

· caso geral $V = V(\vec{r})$.

como sistema apresenta simetria azimutal $\to V = V(r,\theta)$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (80.2)}: \; V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)$$

como $V(0,\theta) < +\infty$: solução regular na origem
$V(r \to +\infty, \theta) \to 0$

$$\hookrightarrow \quad V(r,\theta) = \begin{cases} \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta), & r < a \\ \sum_\ell B_\ell \frac{1}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta), & r \geq a \end{cases}$$

determinação coefs A_ℓ e B_ℓ, 2 possibilidades:

(1) Lembrar condições de contorno $\vec{E}(\vec{r})$ e $V(\vec{r})$, Eqs. (42.1)

- continuidade $V(\vec{r})$ em $r=a$:

$$\sum_\ell A_\ell a^\ell P_\ell(\cos\theta) = \sum_\ell B_\ell \frac{1}{a^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \longrightarrow B_\ell = A_\ell a^{2\ell+1}$$

se $A_\ell = C_\ell / a^\ell$

$$\hookrightarrow \quad V(r,\theta) = \begin{cases} \sum_\ell C_\ell \left(\frac{r}{a}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta), & r < a \\ \sum_\ell C_\ell \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} P_\ell(\cos\theta), & r > a \end{cases} \qquad (82.12)$$

- sobre $E_\perp$ @ $r=a$:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a^+} - \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a^-} = -\frac{1}{\epsilon_0}\sigma(\theta) = \frac{Q}{2\pi a^2}\delta(\cos\theta)$$

verificar !

$\longrightarrow$ exercício $\quad \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell (2\ell+1) \frac{1}{a} P_\ell(\cos\theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \quad \cdot P_m(\cos\theta)\sin\theta$

$$\hookrightarrow \sum_\ell \frac{C_\ell}{a}(2\ell+1) \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta\, P_\ell(\cos\theta) P_m(\cos\theta)}_{\frac{2}{2m+1}\delta_{\ell,m}} = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} P_m(\cos\theta)$$

$$\hookrightarrow C_\ell = \frac{a}{2\epsilon_0}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \left(\frac{Q}{2\pi a^2}\delta(\cos\theta)\right) P_\ell(\cos\theta)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\int_{-1}^{+1} dx\, P_\ell(x)\,\delta(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} P_\ell(0)$$

(2) Como a solução da Eq. de Laplace é única, podemos utilizar o caso particular (82.11) p/ determinar os coeficientes C_ℓ.

Lembrar que : $\quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(x), \quad |x|<1, \quad 0<t<1$

Função geradora $P_\ell(x)$!

$x = 0$

$t = z/a$

Eq. (82.11) :

$$V(0,0,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z^2/a^2}} =$$

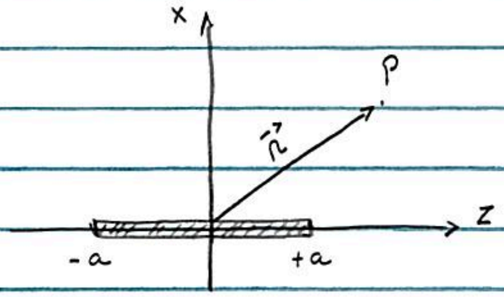
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^\ell \cdot P_\ell(0) \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$= \sum_\ell C_\ell \left(\frac{z}{a}\right)^\ell \underbrace{P_\ell(1)}_{1}, \quad z<a$$

Eq. (82.12)

$\hookrightarrow C_\ell = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} P_\ell(0)$!

Ex.: P. 3-38, G.: Considerar carga Q uniformemente distribuída ao longo eixo z p/ $|z| \leq a$; determinar $V(\vec{r})$ em termos de $P_\ell(\cos\theta)$.



vimos que, pg. 34

$$V(\vec{r}) = V(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{+a} \frac{\lambda\, dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{(L-z)^2+\rho^2} + L - z}{\sqrt{(L+z)^2+\rho^2} - (L+z)}$$

ideia: utilizar a função geradora $P_\ell(x)$ e expandir o integrando.

notar:

$$\left(\rho^2 + (z-z')^2\right)^{-1/2} = \left(\underbrace{\rho^2 + z^2}_{r^2} + z'^2 - 2zz'\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{z'^2}{r^2} - 2\frac{z'}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{z'}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta) \quad , \; r > a \text{ pois}$$

$x = \cos\theta$,

$\dfrac{z'}{r} = t < 1$!

$$\hookrightarrow V(r,\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_\ell \frac{P_\ell(\cos\theta)}{r^\ell}\underbrace{\int_{-a}^{+a} z'^\ell\, d\ell}_{a^{\ell+1}/\ell+1,\ \ell \text{ par}!}$$

$\ell \to 2\ell$

$$\hookrightarrow V(r,\theta) = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0 r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos\theta) \quad , \; r > a$$

Equação de Poisson

Lembrar pg. 63 : $V(\vec{r})$ pode ser determinado via solução eq. diferencial

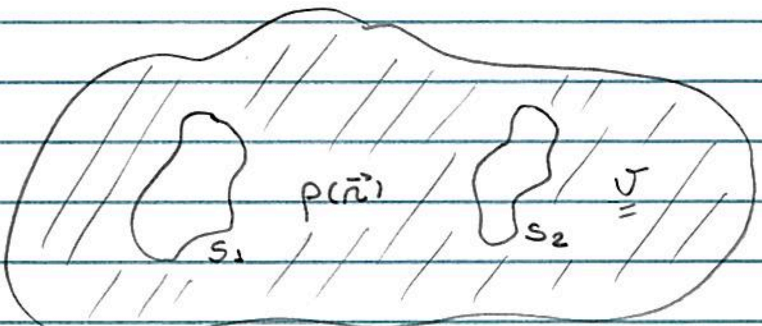
$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \qquad (83.1)$$

⊕ condições de contorno apropriadas

De modo análogo à Eq. de Laplace, verifica-se que a solução de (83.1) é <u>única</u> !

· Generalização teorema de unicidade I :

Considerar volume $\mathcal{V}$ = volume exterior conjunto de superficies S_i
↳ A solução $V(\vec{r})$, $\vec{r} \in \mathcal{V}$, da Eq. de Poisson é única se $V(\vec{r})$ p/ $\vec{r} \in S_i$ é conhecida.



Demonstração :

hipótese : V_I e V_{II} são soluções da Eq. de Poisson, que satisfazem as mesmas condições de contorno, i.e.,

$$\nabla^2 V_I = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}), \quad \nabla^2 V_{II} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \quad \text{e} \quad V_I(\vec{r}) = V_{II}(\vec{r}), \ \vec{r} \in S_i$$

Se $\Phi \equiv V_I - V_{II}$

↳ $\nabla^2\Phi = \nabla^2 V_I - \nabla^2 V_{II} = 0$ e $\underbrace{\Phi(\vec{r}) = 0 \text{ p/ } \vec{r} \in S_i}_{\text{c.c. } (*)}$

i.e., Φ satisfaz a Eq. de Laplace ⊕ condições contorno (*)
↳ teorema unicidade Eq. de Laplace!

· Método das imagens,

- procedimento que permite a determinação da solução da Eq. de Poisson p/ certo conjunto sistemas.

- ideia: considerar sistema constituído por uma superfície que separa o volume total em duas partes $\underline{\underline{v}}$ e $\underline{\underline{v'}}$, i.e., $v_{TOT} = v + v'$

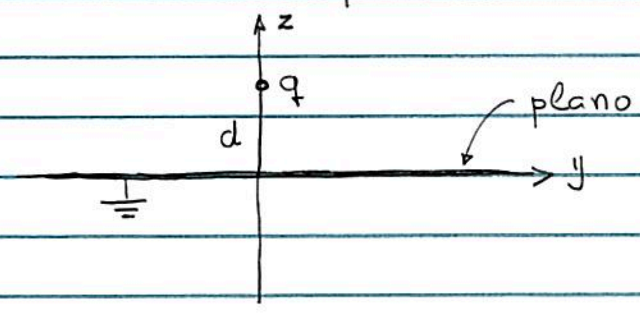
↳ $V(\vec{r})$, $\vec{r} \in \underline{\underline{v}}$, é determinado introduzindo-se <u>cargas</u> <u>fictícias</u> (<u>imagens</u>) em $\underline{\underline{v'}}$.

Vamos considerar 2 exemplos a fim de ilustrar o método.

Ex. 1: considerar carga pontual $q > 0$ em $\vec{r} = d\hat{z}$

⊕ plano metálico ∞ em $z = 0$, $V = 0$ (aterrado)

↳ Determinar potencial $V(\vec{r})$ p/ região $z > 0$.



: CONFIGURAÇÃO $\underline{\underline{A}}$

notar: $V(\vec{r}) \propto$ carga pontual $\oplus$ carga induzida plano

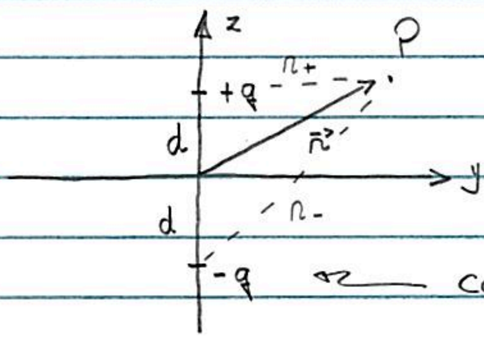
nesse caso $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r} - d\hat{z}) + \underbrace{\sigma_{IND}(\vec{r})\,\delta(z)}_{\text{não conhecida inicialmente}}$

condições de contorno: $\begin{cases} V(x,y,0) = 0 \\ V(\vec{r}) \to 0 \quad p/\ |\vec{r}| \gg d \end{cases}$

Ao invés de resolver diretamente Eq. (83.1), vamos considerar sistema que apresenta as mesmas características da CONF. A.

considerar: carga pontual $+q$ em $\vec{r} = d\hat{z}$

" " $-q$ " $\vec{r} = -d\hat{z}$



: CONFIGURAÇÃO B

carga imagem

nesse caso,

$$V(\vec{r}) = V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right) \qquad (85.1)$$

Eq. (84.1): $V(x,y,0) = 0$

$V(\vec{r}) \to 0 \quad p/\ |\vec{r}| \gg d$!

como condições contorno e $\rho(\vec{r})$, $z > 0$ CONF. B =

= " " " " " CONF. A

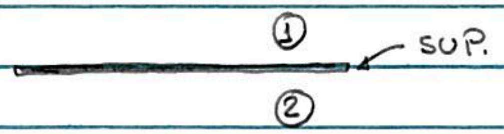
$\xrightarrow[\text{Teorema unicidade}]{}$ $V(\vec{r})$ CONF. A = (85.1) !

Obs.: ingrediente importante do método: teorema de unicidade.

↳ Q.: Qual a densidade de carga $\sigma_{IND}(x,y)$ induzida no plano?

Lembrar condições contorno $\vec{E}$ em uma superfície:

Eq. (42.1): $\hat{n} \cdot \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r})$



↳ $\hat{n} \cdot \left(\vec{\nabla} V_1 - \vec{\nabla} V_2 \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma$ ou $\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma$

onde $\frac{\partial V}{\partial n} \equiv \hat{n} \cdot \vec{\nabla} V$

Aqui: $\hat{n} = \hat{z}$ e $\vec{E}_2 = 0$

↳ $$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(z-d)}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}} - \frac{(z+d)}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}} \right)$$

↳ $$\sigma_{IND}(x,y) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{-qd}{2\pi (x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-qd}{2\pi (\rho^2+d^2)^{3/2}}$$ (coord. polares)

(veja problema adicional, cap. 2)

↳ $$Q = \int \sigma(\rho) ds = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2+d^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = -q$$

$ds = \rho d\rho d\varphi$

notar posição da carga imagem : $-q$ em $\vec{r} = -d\hat{z} \in \mathcal{V}'$!

• como ∃ carga induzida no plano → ∃ interação entre carga pontual q e o plano

devido à analogia entre as CONFs. A e B

↳ $\vec{F} = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} q^2 \dfrac{1}{(2d)^2} \hat{z}$: força plano sob carga pontual q.

• além disso, podemos determinar a energia potencial eletrostática armazenada no sistema carga-plano,

Eq. (44.1) p/ CONF. B :

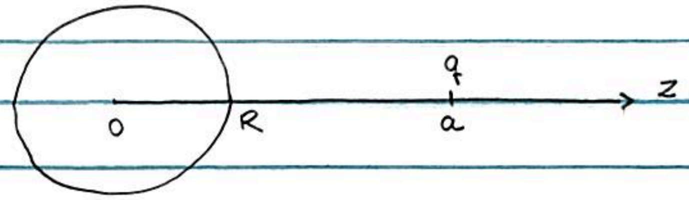
$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j = 1,2} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = -2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d}$$

como

$$U_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int d^3r\, E^2(\vec{r}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p/ simetria} \\ \vec{E}(\vec{r})}}{=} 2 \cdot \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{z>0} d^3r\, E^2(r) = 2 \cdot U_A$$

↳ $U_A = \dfrac{1}{2} U_B = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q^2}{4d}$

Ex. 2 : considerar esfera metálica, raio R, centro = origem
⊕ carga pontual q em $\vec{r} = a\hat{z}$, $a > R$.
Determinar $V(\vec{r})$ p/ $|\vec{r}| > R$.



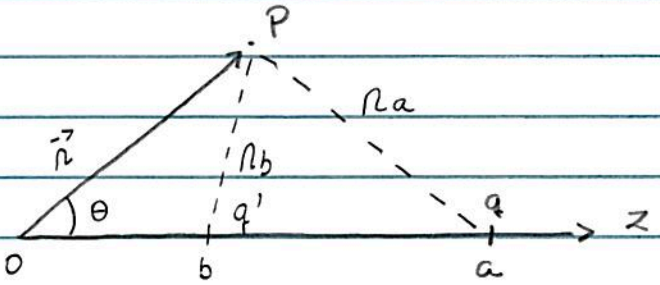
: CONF. A

ideia método das imagens : determinar posição carga $q' \in$ interior esfera, ok c/ condições de contorno.

Vamos analisar 2 casos distintos :

(i) $V(r = R) = 0$

nesse caso, uma única carga imagem q' é necessária



: CONF. B

$$r_a = |\vec{r} - a\hat{z}| = (r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{1/2}$$
$$r_b = |\vec{r} - b\hat{z}| = (r^2 + b^2 - 2br\cos\theta)^{1/2}$$

temos que : $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_a} + \frac{q'}{r_b}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + b^2 - 2br\cos\theta)^{1/2}}\right)$$

condição de contorno $V(r=R)=0$

$$\hookrightarrow \quad \frac{q/(R^2+a^2)^{1/2}}{\left(1-\frac{2Ra}{R^2+a^2}\cos\theta\right)^{1/2}} = \frac{-q'/(R^2+b^2)^{1/2}}{\left(1-\frac{2Rb}{R^2+b^2}\cos\theta\right)^{1/2}}, \ \forall\theta!$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{2Ra}{R^2+a^2} = \frac{2Rb}{R^2+b^2} \longrightarrow b=a \quad \text{(NO GOOD!)}$$

$$b = R^2/a$$

$$\hookrightarrow \quad q' = -q\frac{(R^2+b^2)^{1/2}}{(R^2+a^2)^{1/2}} = -\frac{R}{a}q \qquad (89.1)$$

(ii) $V(r=R)=V_0$

nesse caso, uma segunda carga imagem q'' em $\vec{r}=0$ é suficiente;

o valor q'' ~ condições de contorno do sistema!

$$\hookrightarrow \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_a}+\frac{q'}{r_b}+\frac{q''}{r}\right) \quad ; \quad |\vec{r}|>R.$$

Exercício:

(1) Determinar $\sigma_{IND}(\theta,\varphi)$ induzida na superfície da esfera, i.e,

$$\sigma_{IND}(\theta,\varphi) = -\epsilon_0\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=R}$$

(2) Mostrar que a carga total da esfera é

$$Q = q' + q''$$

casos particulares:

(i) esfera aterrazada: $V(r=R)=0 \rightarrow Q=q'\ ,\ q''=0$

(ii) esfera neutra: $q'=-q''$

p/ o caso (i): como $\exists$ carga induzida na esfera

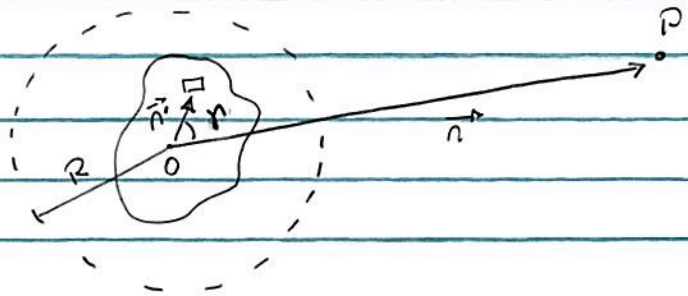
↳ $\exists$ interação esfera - carga pontual

devido à analogia entre as CONFs. A e B

↳ $\vec{F} = +\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{qq'}{(a-b)^2}\hat{z} = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\dfrac{q^2 aR}{(a^2-R^2)^2}\hat{z}$: Força esfera sob carga q !

· Expansão multipolar,

considerar uma distribuição localizada de cargas, i.e.,
$\rho(\vec{r}\,') = 0$ p/ $r > R$



vimos que o potencial $V(\vec{r})$ associado a essa distribuição é dado pela Eq. (30.2):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (91.1)$$

em particular, se $r \gg R$, temos que

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \qquad (91.2)$$

: potencial carga pontual Q @ origem!

onde $Q = \int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,')$

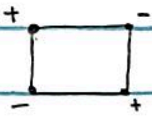
notar: (91.2) é uma 1ª aproximação p/ (91.1) qdo $r \gg R$.

ideia expansão multipolar: determinar expansão sistemática $V(\vec{r})$ em termos de n-polos elétricos p/ $r \gg R$.

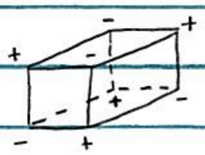
Lembrar :

⊕q : monopolo $V(r) \sim 1/r$

⊖——⊕ : dipolo $V(r) \sim 1/r^2$



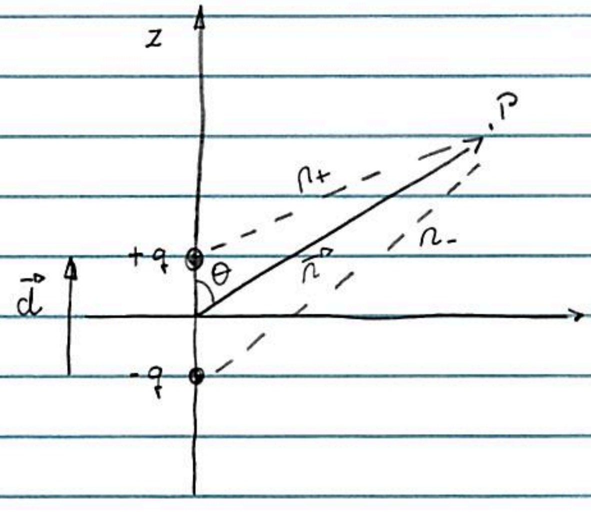
: quadrupolo $V(r) \sim 1/r^3$ (92.1)



: octopolo $V(r) \sim 1/r^4$

coefs. expansão : momentos de n-polo elétrico !

· inicie : Lembrar $V(\vec{r})$ dipolo elétrico



$\vec{p} = q\vec{d}$

$r_\pm$: distância carga $\pm q$ — pto P

temos que :

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$$

hipótese : $r \gg d$

notar: $\vec{r}_- = \vec{d} + \vec{r}_+$ $\longrightarrow$ $\vec{r}_+ = \vec{r} - \vec{d}/2$

$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{d} + \vec{r}_+$

$\vec{r}_- = \vec{r} + \vec{d}/2$

$\hookrightarrow \; r_+ = \left(r^2 - \vec{r}\cdot\vec{d} + \frac{d^2}{4} \right)^{1/2} = r\left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{1/2} \simeq r - \frac{1}{2} d\cos\theta$

e $r_- \simeq r + \frac{1}{2} d\cos\theta$

$$\hookrightarrow \; V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \; , \; r \gg d \qquad (92.1)$$

notar : $V(r) \sim 1/r^2$!

como $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$\hookrightarrow \; \vec{E}(\vec{r}) = -\hat{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) - \frac{\hat{\theta}}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta} \right) \; , \; r \gg d \qquad (92.2)$$

como $\vec{p} = p\hat{z} \longrightarrow \vec{p}\cdot\hat{r} = p\cos\theta$

$\vec{p}\cdot\hat{\theta} = -p\sin\theta$ (veja pg. 21M)

$\vec{p}\cdot\hat{\varphi} = 0$

$$\hookrightarrow \; V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(3(\vec{p}\cdot\hat{r})\,\hat{r} - \vec{p} \right) \; ; \; r \gg d \qquad (92.3)$$

sobre a expansão multipolar,

como $r \gg R$ (veja Fig. pg. 91) $\rightarrow$ $r \gg r'$

↳ expansão de $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ em termos de $\frac{r'}{r}$!

notar:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{1/2} = r\Big(1 + \underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma}_{\equiv\,\epsilon}\Big)^{1/2}$$

↳ série de Taylor !

alternativa: utilizar função geradora $P_\ell(x)$ (79.3),

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r}\Big(1 - 2\underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)}_{t}\underbrace{\cos\gamma}_{x} + \underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)^2}_{\equiv t^2}\Big)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) \qquad (93.1)$$

Eq. (93.1) em (91.1):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int d^3r'\, r'^n P_n(\cos\gamma)\rho(\vec{r}\,') \qquad (93.2)$$

↳ ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$!

Eq. (93.2): expansão multipolar

$V(\vec{r})$ ~ expansão em potencias de $\frac{1}{r}$!

Vamos analisar os primeiros termos da série (93.2),

· $n=0$ (monopolo):

$$V_{MON}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}')}_{=Q} \quad : V(r) \text{ carga pontual } Q \text{ @ origem!} \tag{94.1}$$

· $n=1$ (dipolo):

$$V_{DIP}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \int d^3r' \, r' P_1(\cos\theta') \rho(\vec{r}')$$

como

$$r' P_1(\cos\theta') = r'\cos\theta' = \hat{r}\cdot\vec{r}' = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}$$

$$\hookrightarrow V_{DIP}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \underbrace{\left(\int d^3r' \, \vec{r}' \rho(\vec{r}') \right)}_{= \vec{p} \text{ : momento de dipolo elétrico}} \tag{94.2}$$

$$\hookrightarrow V_{DIP}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} \quad : (92.3) \tag{94.3}$$

· $n=2$ (quadrupolo):

$$V_{QUAD}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \int d^3r' \, r'^2 P_2(\cos\gamma) \rho(\vec{r}')$$

como

$$r' P_2(\cos\gamma') = \frac{1}{2} r'^2 \left(3\cos^2\gamma' - 1\right) = \frac{1}{2}\left(3(\hat{n}\cdot\vec{r}')^2 - r'^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\,\hat{n}_i r'_i \hat{n}_j r'_j - r'^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j \left(3\, r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2\right)$$

$$\hookrightarrow V_{QUAD}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2r^3}\sum_{ij=1}^{3}\hat{n}_i\hat{n}_j \underbrace{\int d^3r' \left(3 r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2\right)\rho(\vec{r}')}_{\equiv Q_{ij}} \qquad (95.1)$$

Q_{ij} : momento de quadrupolo elétrico : tensor ordem 2 !

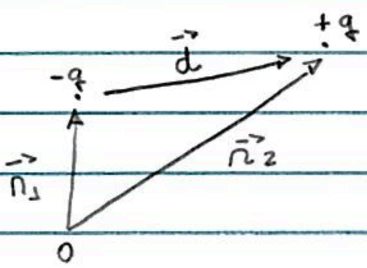
Obs.: comparar Eqs. (92.1) e (94.1), (94.2), (95.1)

Obs. 1: sobre o momento de dipolo elétrico $\vec{p}$.

se $\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha)$

$$\hookrightarrow \vec{p} = \int d^3r'\, \vec{r}'\rho(\vec{r}') = \sum_\alpha q_\alpha \int d^3r'\, \vec{r}'\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha q_\alpha \vec{r}_\alpha$$

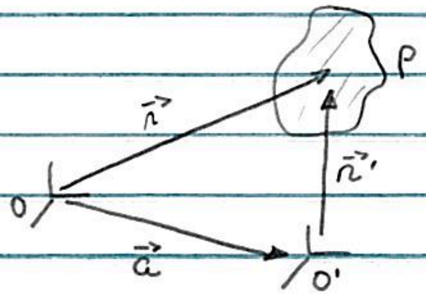
em particular ($N=2$):



$q_1 = -q_2 = -q$

$$\hookrightarrow \vec{p} = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{d}$$

Obs. 2: considerar 2 referenciais O e O'



p/ REF. O : $\vec{p} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}$

" " O' : $\vec{p}\,' = \int d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,'$

Como $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$ e $d^3r = d^3r'$, $\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}\,')$

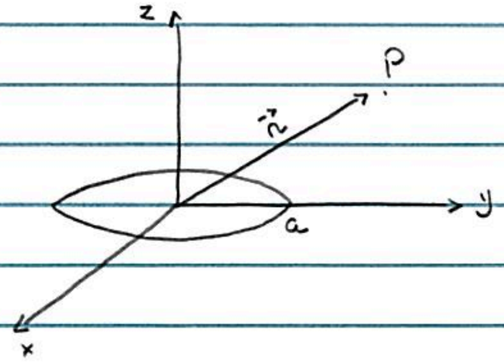
↳ $\vec{p}\,' = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\,(\vec{r} - \vec{a}) = \vec{p} - \vec{a}\,Q$

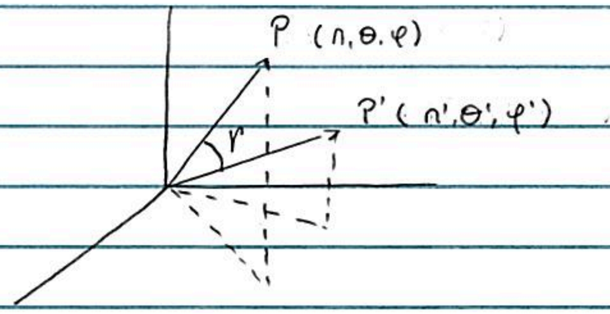
↳ se $Q = 0$ ⟶ momento dipolo $\vec{p}$ independe escolha origem O (*)

· p/ distribuição de cargas tal que $Q = 0$ → $V_{DIP}(\vec{r})$ é o 1º termo na expansão multipolar (93.2)

(*) → $V_{DIP}(\vec{r})$ é bem definido!

Ex.: P-3.28, G, 4ed. : considerar anel, raio = a, λ = cte; determinar termos n = 0, 1, 2, expansão multipolar de $V(\vec{r})$





Eq. (93.2) :
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int d^3r' \, r'^n P_n(\cos\gamma) \, \rho(\vec{r}')$$

densidade de carga:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r-a)\, \delta(\theta - \pi/2) = \frac{\lambda}{a} \delta(r-a)\, \delta(\theta-\pi/2)$$

notar:

$$\int d^3r \, \rho(\vec{r}) = \int \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(r-a)\, \delta(\theta-\pi/2)\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = Q \; !$$

relação entre ângulos γ e θ' : verifica-se que

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} (-1)^m \, Y_n^m(\theta, \varphi)\, Y_n^{-m}(\theta', \varphi')$$

ou $P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') +$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \cos(m(\varphi-\varphi')) \qquad (99.2)$$

Eq. (99.2) : Teorema de adição p/ harmônicos esféricos

$$\hookrightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int r'^{\,n+2} P_n(\cos\gamma) \frac{Q}{2\pi a^2} *$$

$$* \delta(r'-a)\,\delta(\theta'-\pi/2) \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

Como $\rho(\vec{r}') = \rho(r',\theta')$ $\longrightarrow$ segundo termo (99.2) $\neq 0$ se $m=0$

$$\hookrightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int r'^{\,n+2} P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') \frac{Q}{2\pi a^2} *$$

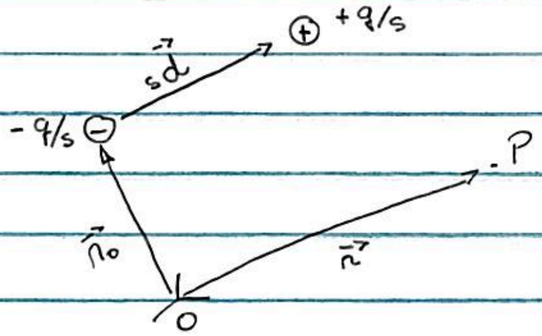
$$* \delta(r'-a)\,\delta(\theta'-\pi/2) \sin\theta'\, dr'\, d\theta'\, d\varphi'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_n \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \frac{Q}{a} P_n(0) P_n(\cos\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q P_n(0)}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \quad , \quad r \gg a$$

Obs. : se $\vec{r} \parallel \hat{z} \rightarrow \gamma = \theta'$!

· Dipolo elétrico pontual,



considerar dipolo elétrico : carga $-q/s$ em $\vec{r}_0$

" $+q/s$ em $\vec{r}_0 + s\vec{d}$, $s>0$

↳ $\vec{p} = \frac{q}{s} \cdot s\vec{d} = q\vec{d}$

↳ $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q/s}{|\vec{r}-\vec{r}_0-s\vec{d}|} - \frac{q/s}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right)$$

vamos considerar o lim $s \to 0$, i.e., $q/s \to +\infty$ (*)

$s\vec{d} \to 0$, mas $\vec{p} = $ cte

↳ $$V(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \quad (97.1)$$

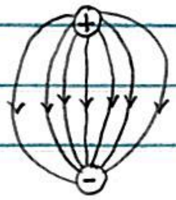
notar : Eq. (92.3) = Eq. (97.1) c/ $\vec{r}_0 = 0$, entretanto

(92.3) válida p/ $r \gg d$

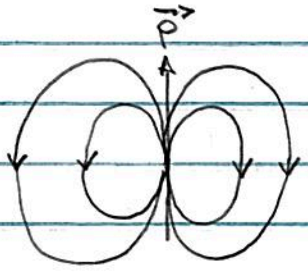
(97.1) " " $\forall \vec{r}$ pois $r \gg sd$!

lim $s \to 0$ ⟶ dipolo pontual

ideia dipolo pontual : representação p/ distribuição de carga neutra cuja raio << comprimento característico sistema comparar linhas de campo:



dipolo



dipolo pontual

em princípio, o campo elétrico de um dipolo pontual em $\vec{r}_0$ é dado pela Eq. (92.3), i.e.,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\left(3(\vec{p}\cdot\hat{n})\hat{n} - \vec{p}\right) \qquad (98.1)$$

onde $\hat{n} = \dfrac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

entretanto, (98.1) não está de acordo com Eq. (98.2) abaixo.

- Se $\vec{E}(\vec{r})$ é o campo elétrico associado a uma distribuição de carga $\rho(\vec{r}) \subset$ esfera raio R, volume $\underline{\underline{v}}$

$$\hookrightarrow \vec{p} = -3\epsilon_0 \int_v d^3r\, \vec{E}(\vec{r}) \quad : \text{momento de dipolo } \rho(\vec{r}) \qquad (98.2)$$

- Eq. (92.2)

$$\hookrightarrow \int d^3r\, \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int r\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = I$$

como $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ não são fixos, é necessário expressá-los em termos de $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ p/ determinar a integral como (veja pg. 21M)

$$\sin\theta\cos\theta\,\hat{n} = \sin\theta\cos\theta\left(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right)$$

$$\sin^2\theta\,\hat{\theta} = \sin^2\theta\left(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}\right)$$

↳ integral $I = 0$!

↳ campo elétrico dipolo pontual:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} - \frac{4\pi}{3}\vec{p}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\right) \qquad (99.1)$$

notar: Eq. (99.1) OK c/ (98.2) !

Obs.: veja Sec. 4.2, Zangwill p/ a demonstração Eq. (98.2).
ou P 3.42 G.

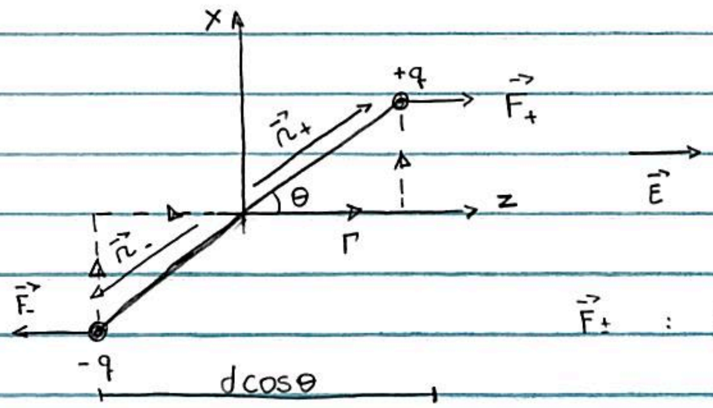
• Considerar dipolo $\vec{p}$ sob campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$;

vamos considerar 2 casos: (i) $\vec{E}$ uniforme

(ii) $\vec{E}$ não-uniforme

e determinar força e torque sob dipolo $\vec{p}$.

(i) $\vec{E}$ uniforme



$\vec{F}_\pm$: força sob carga $\pm q$

$\vec{F}_+ = q\vec{E} = +qE\hat{z}$

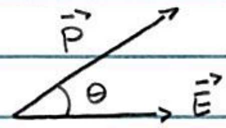
$\vec{F}_- = -q\vec{E} = -qE\hat{z} = -\vec{F}_+ \longrightarrow \vec{F}_T = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$: força total sob dipolo

Como $\vec{r}_+ = \frac{1}{2}d(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{j}) = \frac{1}{2}\vec{d} = -\vec{r}_-$

↳ $\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = (2\vec{r}_+) \times \vec{F}_+ = q\vec{d} \times \vec{E}$ (99.2)

$= \vec{p} \times \vec{E} = -qdE\sin\theta\,\hat{j}$: Torque total sob dipolo

notar:



como $\vec{\tau} \propto -\hat{j}$

↳ efeito $\vec{E}$ sob $\vec{p}$: $\vec{p} \parallel \vec{E}$!

- energia potencial total,

$U = +qV(\vec{r}_+) - qV(\vec{r}_-) = q\left(V(\vec{r}_+) - V(\vec{r}_-)\right)$

$= -q\int_{r_-,\Gamma}^{r_+} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -q\int_{r_-,\Gamma}^{r_+} (E\hat{z})\cdot(dz\,\hat{z}) = -qE\int_{r_-}^{r_+} dz$

veja figura acima

$= -qdE\cos\theta$

↳ $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ (99.3)

(ii) $\vec{E}$ não uniforme (Zangwill)

considerar um dipolo pontual $\vec{p}$ em $\vec{r} = 0$;
nesse caso, temos que Eq. (97.1):

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} \quad ; \forall\, \vec{r} \qquad (99.4)$$

⊕ Eq. de Poisson

$$\hookrightarrow \rho_D(\vec{r}) = -\epsilon_0 \nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\underbrace{\left(\nabla^2 \frac{1}{r}\right)}_{-4\pi\delta(\vec{r})} = -(\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\delta(\vec{r}) \qquad (99.5)$$

Eq. (105.2): - $\rho(\vec{r})$ tal que $V(\vec{r})$ correspondente = (99.5)
- $\rho_D(\vec{r}) \neq \rho(\vec{r})$ original
- função auxiliar!

- Considerar dipolo pontual em $\vec{r}$ ⊕ $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$.

$$\vec{F} = \int d^3r'\, \vec{E}(\vec{r}')\,\rho_D(\vec{r}') \quad : \text{ força total sob dipolo pontual}$$

$$= -\int d^3r'\, \vec{E}(\vec{r}')\left((\vec{p}\cdot\vec{\nabla}')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right)$$

$$= \underbrace{-\oint ds\, \vec{E}(\vec{r}')\left(\sum_i p_i\right)\delta(r-r')}_{0} + \int d^3r'\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}')\,\vec{E}(\vec{r}')$$

integração por partes!

$$= (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{E}(\vec{r}) \qquad (99.6)$$

- de modo análogo, torque sob o dipolo pontual,

$$\vec{N} = \int d^3r' \, \vec{r}' \times \left(\vec{E}(\vec{r}') \rho_D(\vec{r}') \right) = - \int d^3r' \, \vec{r}' \times \left(\vec{E}(\vec{r}') (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \right)$$

$$= \int d^3r' \, \delta(\vec{r} - \vec{r}') (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}') \left(\vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r}') \right) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{r} \times \vec{E}(\vec{r}))$$

notar:

$$N_k = (p_i \partial_i) \left(\epsilon_{k\ell m} r_\ell E_m(\vec{r}) \right) = \epsilon_{k\ell m} p_i \left(E_m \underbrace{\partial_i r_\ell}_{\delta_{i\ell}} + r_\ell \partial_i E_m \right)$$

$$= \epsilon_{k\ell m} p_\ell E_m + \epsilon_{k\ell m} r_\ell (p_i \partial_i) E_m$$

$$\hookrightarrow \vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \underbrace{\left((\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \right)}_{\vec{F}} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F} \qquad (99.7)$$

notar: se dipolo pontual em $\vec{r} = 0$ $\rightarrow$ Eq. (99.7) = (99.2)

novamente efeito $\vec{E}(\vec{r})$ sob $\vec{p}$: $\vec{p} \parallel \vec{E}$!

- sobre a energia potencial total,

$$U = \int d^3r' \, \underbrace{V(\vec{r}')}_{\text{associado } \vec{E}\,\text{ext}!} \rho_D(\vec{r}')$$

$$= - \int d^3r' \, V(\vec{r}') (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \int d^3r' \, \delta(\vec{r} - \vec{r}') (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}') V(\vec{r}')$$

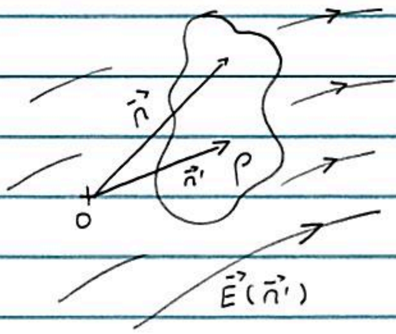
$$\hookrightarrow U = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \qquad (99.8)$$

· Alternativa (ii) $\vec{E}$ não uniforme

considerar $\rho(\vec{r})$ sob campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$

hipóteses : (1) ρ ~ distribuição neutra de cargas

(2) $\vec{E}(\vec{r}')$: "variação espacial lenta"



· lembrar : série de Taylor função <u>escalar</u> várias variáveis

$$\psi(\vec{r}+\vec{a}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^n \psi(\vec{r})$$

se $\vec{a} = \vec{r}' - \vec{r} \longrightarrow \psi(\vec{r}') = \psi(\vec{r}) + [(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\nabla}]\psi(\vec{r}) + \dots$

p/ função <u>vetorial</u> $\vec{F}(\vec{r})$, temos que

$$F_i(\vec{r}') = F_i(\vec{r}) + \left[(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\right] F_i(\vec{r}) + \dots \quad ; \quad i = x,y,z$$

ou $\vec{F}(\vec{r}') = \vec{F}(\vec{r}) + \left[(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\nabla}\right]\vec{F}(\vec{r}) + \dots$

notar :

(2) $\rightarrow$ expansão Taylor $\vec{E}$ em torno pto de referência $\vec{r}$, i.e.,

$$\vec{E}(\vec{r}') = \vec{E}(\vec{r}) + \left[(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}\right] \vec{E}(\vec{r}) + \dots$$

↳ $\vec{F} = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}')$: força sob ρ devido $\vec{E}$

$$\simeq \left[\vec{E}(\vec{r}) - (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})\right] \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}')}_{=0, \text{ hipótese } (1)} +$$

$$+ \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec{r}')(\vec{r}'}_{\vec{p}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \quad : \text{Eq. } (99.6) \,!$$