Eletrodinâmica,

ideia : considerar $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

duas etapas :

(1) indução eletromagnética : Lei de Faraday

ideia : $\partial \vec{B}/\partial t \xrightarrow{\text{FONTE}} \vec{E}$

(2) Lei de Ampère-Maxwell : $\partial \vec{E}/\partial t \xrightarrow{\text{FONTE}} \vec{B}$

(1) indução EM

Definição : força eletromotriz (emf) em um circuito Γ :

$$\mathcal{E} = \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad (213.1)$$

notar : p/ campo eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{E} = 0$$

↳ campo $\vec{E}$ em (213.1) : origem não eletrostática
ou não pode ser obtido
a partir Lei de Coulomb.

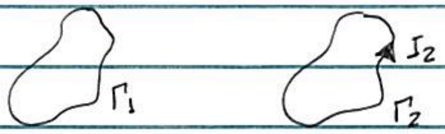
nesse caso, lembrar que Lei de Lorentz sempre válida
↳ $\vec{E}$ pode ser determinado a partir $\vec{F}$ sob carga q :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

· trabalhos Faraday e Henry ~ 1830.

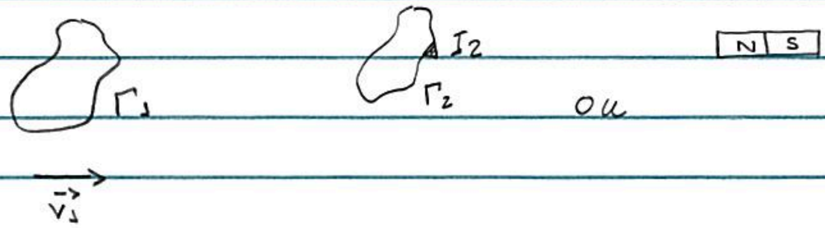
considerar o seguinte conjunto de experimentos:

- circuito Γ_1 e circuito Γ_2 ⊕ $I_2 = I_2(t)$,



- circuito Γ_1 (repouso) ⊕ magneto permanente $\vec{v} \neq 0$,

- circuito Γ_1, $\vec{v}_1 \neq 0$ ⊕ circuito Γ_2 (repouso)
ou mag. permanente (repouso)



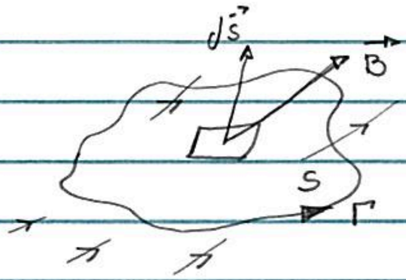
↳ em todos os casos, verifica-se <u>experimentalmente</u> que $I_1 \neq 0$!

notar: p/ todos os casos, $\Phi_B(t) \neq 0$ através Γ_1.

↳ Lei de Faraday:

variação temporal do fluxo campo $\vec{B}$ através Γ_1 $\longrightarrow$ ∃ força eletromotriz/ <u>corrente</u> <u>induzida</u> em Γ_1

em detalhes : considerar circuito orientado Γ e superfície S cujo contorno é definido por Γ, sob campo magnético $\vec{B}$



notar: relação entre orientação Γ e sentido $d\vec{S}$ = = "regra mão direita"

como

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \quad : \text{fluxo campo } \vec{B} \text{ através sup. } S \qquad (215.1)$$

e se $\mathcal{E}$ é a emf induzida em Γ :

$$\mathcal{E} = -k\frac{d\Phi_B}{dt} \quad : \text{Lei de Faraday} \qquad (215.2)$$

k → cte, depende sistema de unidades, entretanto módulo k ~ invariância de Galileu !

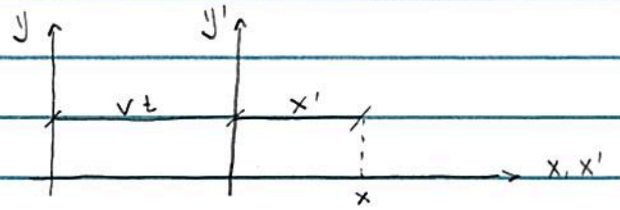
· sobre sinal "-" em (215.2) : indica que a corrente induzida em Γ está no sentido oposto à variação de Φ_B

~ Lei de Lenz : o sentido da força eletromotriz induzida $\mathcal{E}$ é tal que a corrente induzida I gera um campo magnético $\vec{B}_{IND}$ que se opõe à mudança do fluxo magnético.

(215.3)

· vamos verificar que $k = 1$ (SI) ~ invariância Galileu
(Jackson) $k = 1/c$ (Gaussiano) Eq. (215.1)

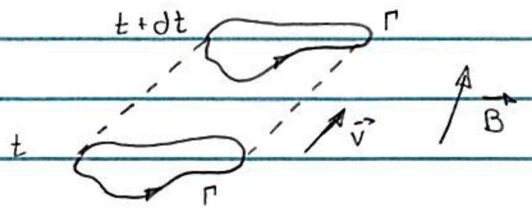
- Lembrar : transformação de Galileu :
considerar REF. O', velocidade v w.r.t. REF O



↳ $x' = x - vt$
$y' = y$ (216.1)
$z' = z$
$t' = t$

caso geral (216.1) : $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$: transf. de Galileu (216.2)
$t' = t$; $\vec{v} = cte$

considerar circuito Γ, velocidade $\vec{v}$ w.r.t. LAB = REF O



Γ = REF O'

duas análises :

(i) Eqs. (213.1), (215.1), (215.2)

$$\oint_\Gamma \vec{E}' \cdot d\vec{\ell} = -k \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

↳ campo elétrico p/ REF tal que $d\vec{\ell}$ em repouso =
= REF O'

notar : variação temporal Φ_B pode ocorrer devido

- $\partial \vec{B}/\partial t \neq 0$ e circuito Γ fixo

- $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ e velocidade Γ $\vec{v} \neq 0$

como

$$\frac{d\vec{B}(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{B}}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}}_{= \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})}$$

pois

$$\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \underbrace{(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}_{0} + \vec{B}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}_{0} - \vec{v}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{0}$$

$\hookrightarrow$ $$\oint_\Gamma \vec{E}'\cdot d\vec{\ell} = -\kappa\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \kappa \underbrace{\int_S \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}}_{\oint_\Gamma (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}}$$

$\hookrightarrow$ $$\oint_\Gamma \left(\vec{E}' - \kappa(\vec{v}\times\vec{B})\right)\cdot d\vec{\ell} = -\kappa\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (217.1)$$

(ii) p/ REF O. = LAB , p/ instante t fixo , podemos escrever

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\kappa\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (217.2)$$

$\hookrightarrow$ campo elétrico LAB

notar : instantaneamente circuito Γ em repouso w.r.t. LAB.

invariância de Galileu $\rightarrow$ LHS (217.1) = LHS (217.2)

$\hookrightarrow$ $\vec{E}' = \vec{E} + \kappa(\vec{v} \times \vec{B})$: transf. campo elétrico (218.1)

considerar carga q, velocidade $\vec{v}$ w.r.t. REF O = LAB

p/ REF O' : carga q em repouso : $\vec{F} = q\vec{E}'$

p/ REF O : " " " movimento : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ (218.2)

Eqs. (218.1) e (218.2) consistentes se $\kappa = 1$!

Obs. : - procedimento acima ou p/ $\frac{v}{c} \ll 1$; útil p/ calcular κ

- Eq. (215.2) é sempre válida!

- Eq. (218.1) : transformação campo $\vec{E}$ p/ $\frac{v}{c} \ll 1$.

· Lei de Faraday, Γ fixo, campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ w.r.t. mesmo REF.

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Teorema Stokes

curva Γ fixa

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\hookrightarrow \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

Como a superfície S definida por Γ é arbitrária

↳ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: Lei de Faraday (forma diferencial) (219.1)

notar:

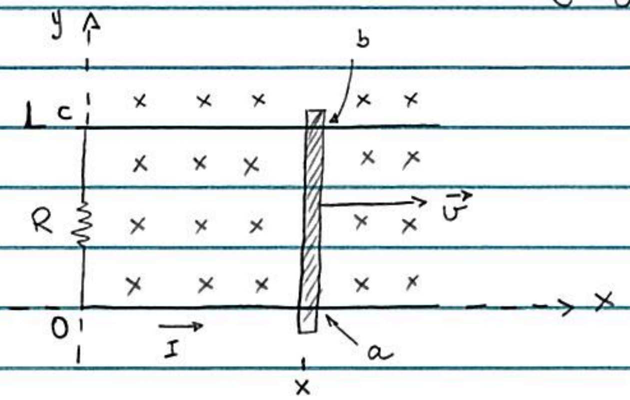
(i) curva Γ considerada acima é arbitrária, não necessariamente corresponde circuito elétrico (fio)

↳ (219.1) : relação geral entre $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$; campo magnético que varia temporalmente $\rightarrow \vec{E}$!

(ii) (219.1) : generalização $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ p/ $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$

Obs. : Eq. (219.1), sistema gaussiano : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

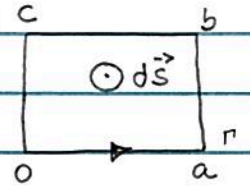
Ex. 1 : Circuito forma "U" ⊕ barra metálica, velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ ⊕ $\vec{B}$ uniforme ; determinar emf induzida.



$\vec{B} = -B\hat{z}$

$\vec{v} = v\hat{x}$

nesse caso Γ = retângulo Oabc :



↳ $\Phi_B = \displaystyle\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int (-B\hat{z}) \cdot (ds\,\hat{z}) = -BLx$

Eq. (215.2) : $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt} = BLv > 0$ (219.2) como $\mathcal{E} > 0$ → sentido I induzida anti horário = sentido orientação Γ !

ou via Lei de Lenz: $\vec{B}$ fixo ⊕ área aumentando → aumento Φ_B (sentido $-\hat{z}$) → $\vec{B}_{IND} \propto \hat{z}$
↳ I sentido antihorário.

↳ $\mathcal{E} = IR$ → $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = \dfrac{BLv}{R}$

↳ $P = \mathcal{E} I = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} = \dfrac{(BLv)^2}{R}$: potência dissipada resistor.

(220.1)

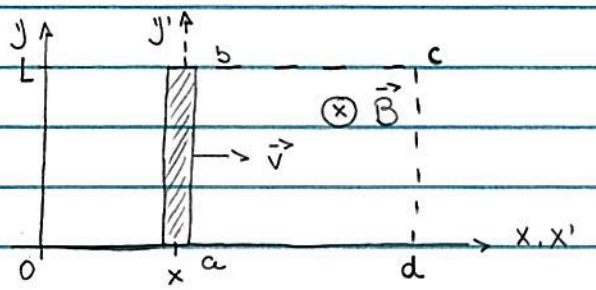
notar: força $\vec{F}_B$ sob barra móvel devido $\vec{B}$

$$\vec{F}_B = I \int_{ab} d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{BLv}{R} \int_0^L (dy\,\hat{y}) \times (-B\hat{z}) = -\frac{B^2L^2v}{R}\,\hat{x}$$

como $\vec{v} = cte$ → $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_B = \dfrac{B^2L^2v}{R}\,\hat{x}$

↳ $P_{ext} = \dfrac{dW_{ext}}{dt} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = \dfrac{(BLv)^2}{R}$ = Eq. (220.1) !

Ex. 2: considerar barra metálica, comprimento L, velocidade $\vec{v}$ ⊕ $\vec{B}$ uniforme; determinar V_{ba}.



$\vec{B} = -B\hat{z}$

$\vec{v} = v\hat{x}$

REF. O = LAB

REF. O' = BARRA

duas análises:

(i) REF. O = LAB

se $\vec{v}_q$: velocidade cargas $q > 0$:

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v}_q \times \vec{B})$$

↳ campo magnético externo

↳ campo elétrico ~ cargas acumuladas extremidades a e b

p/ situação de equilíbrio: $\vec{v}_q = \vec{v}$ e $\vec{F} = 0$

↳ $\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v} = (-B\hat{z}) \times (v\hat{x}) = -Bv\hat{y}$

Como $\vec{E}$ uniforme, podemos escrever:

$$V_{ba} = V_b - V_a = \underbrace{-\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{} = -\int_0^L (-Bv\hat{j})\cdot(dy\,\hat{j}) = BvL \qquad (221.1)$$

comparar c/ Eq. (219.2)!

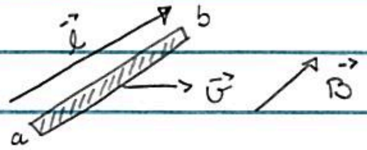
lembrar: ok apenas p/ $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$

notar: (221.1) pode ser obtida de forma análoga ao Ex. 1 se considerarmos a curva fechada abcda sendo a linha tracejada bcda fixa ⊕ barra ab móvel.

Obs.: Eq. (221.1) é um caso particular de (219.1) que pode ser obtido via Lei de Lorentz. Nesse caso, emf é denominada motional emf

É possível analisar o caso geral,

considerar barra metálica, comprimento ℓ, velocidade $\vec{v}$ e campo magnético $\vec{B}$



$\vec{v}_q = \vec{v} + \vec{v}_d$: vel. carga $q > 0$

$\hookrightarrow$ vel. de deriva

$\hookrightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_q \times \vec{B}) = 0 \rightarrow \vec{E} = -\vec{v}_q \times \vec{B}$

$$\hookrightarrow V_{ba} = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b (\vec{v}_q \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \underset{\vec{v}_d \,//\, d\vec{\ell}}{=} \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

hipótese : $\vec{B}$ uniforme

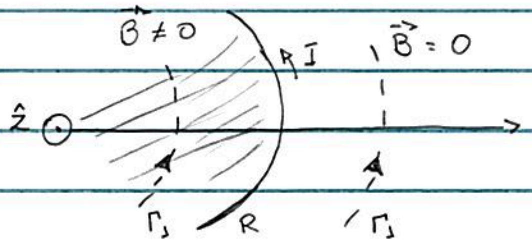
$$\hookrightarrow V_{ba} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \int_a^b d\vec{\ell} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} = \vec{B} \cdot (\vec{v} \times \vec{\ell})$$

Obs.: p/ um circuito fixo Γ, podemos escrever:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

$\hookrightarrow$ sup fronteira $= \Gamma$

Ex. 3: considerar solenóide, comprimento $L \to +\infty$, raio R,
n = # voltas fio / comprimento ⊕ $I = I(t)$;
determinar $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$.



hipótese: sentido I: $\hat{\varphi}$

vimos p/ corrente estacionária I, pg. 173:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z}, & \rho < R \\ 0, & \rho > R \end{cases}$$

hipótese: $I = I(t)$ "variação lente": limite quasi estático

nesse caso, a Lei de Biot-Savart é aproximadamente ok, de modo que, p/ solenóide:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \simeq \begin{cases} \mu_0 n I(t) \hat{z}, & \rho < R \\ 0, & \rho > R \end{cases}, \quad \text{ok p/ limite quasi estático}$$

como $\vec{B} \propto \hat{z} \to \vec{E} \propto \hat{\varphi} \to$ curva Γ = círculo raio ρ
sup. S: disco raio ρ

Eq. (215.2):

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

dois casos:

(i) $\rho < R$

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} (E\hat{\varphi})\cdot(\rho\, d\varphi\, \hat{\varphi}) = -\frac{d}{dt}\int (\mu_0 n I\, \hat{z})\cdot(ds\, \hat{z})$$

notar orientação Γ_1 e $d\vec{s}$!

$\hookrightarrow$ $2\pi\rho E = -\dfrac{d}{dt}\left(\mu_0 n I \cdot \pi\rho^2\right)$ $\rightarrow$ $\vec{E}(\rho,t) = -\dfrac{1}{2}\mu_0 n \dot{I} \rho\, \hat{\varphi}$

(ii) $\rho > R$

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 2\pi\rho E = -\frac{d}{dt}\int_{\substack{\text{DISCO}\\ \text{RAIO } R}} (\mu_0 n I\, \hat{z})\cdot(ds\, \hat{z}) = -\mu_0 n \dot{I}\,(\pi R^2)$$

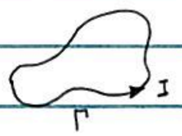
$\hookrightarrow$ $\vec{E}(\rho,t) = -\dfrac{1}{2}\mu_0 n \dot{I} \dfrac{R^2}{\rho}\hat{\varphi}$

$\hookrightarrow$ $\vec{E}(\rho,t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\mu_0 n \dot{I} \rho\, \hat{\varphi}, & \rho < R \\ -\dfrac{1}{2}\mu_0 n \dot{I} \dfrac{R^2}{\rho}\hat{\varphi}, & \rho > R \end{cases}$: p/ limite quasi estático

notar : sentido $\vec{E}$ ~ $\dfrac{dI}{dt} > 0$ ou $\dfrac{dI}{dt} < 0$

· Indutância,

considerar circuito ⊕ corrente I



notar $I \longrightarrow B \longrightarrow \Phi_B$ através do circuito Γ

Lei de Biot-Savart (152.2) $\rightarrow$ $\Phi_B \propto I$

p/ circuito formato fixo : $\Delta\Phi \sim \Delta I$, i.e.,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} \equiv L \frac{dI}{dt} \qquad (224.1)$$

$L \rightarrow$ (auto-) indutância

em particular, se $\Phi \propto I$

$$\hookrightarrow \quad L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\Phi}{I}$$

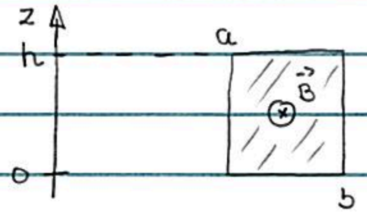
Eq. (224.1) ⊕ Lei de Faraday (215.2) :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad : \text{ emf induzida} \qquad (224.2)$$

unidade (SI) :

$$[L] = \frac{Wb}{A} = \frac{N \cdot m}{A} \cdot \frac{1}{A} = \left(\frac{C \cdot V}{m}\right) \cdot \frac{m}{A^2} = \frac{V \cdot s}{A} = 1\,H \text{ (henry)}$$

Ex.: considerar toróide, raio interno $\underline{\underline{a}}$, raio externo $\underline{\underline{b}}$, área seção transversal retangular ⊕ corrente estacionária I; determinar L.



Vimos que, Eq. (165.1): $\vec{B}(\rho) = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$, $a \leq \rho \leq b$

↳ $\Phi_B = N\displaystyle\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$: fluxo total através toróide

\# voltas ← N

↳ S: área secção transversal toróide

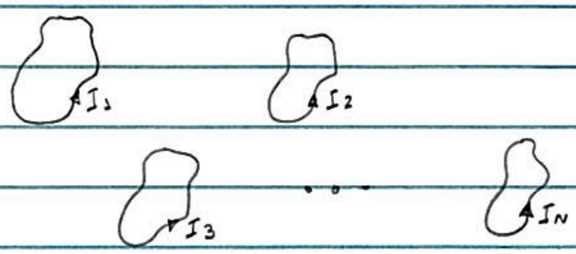
↳ $\Phi_B = N\displaystyle\int \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}\cdot(d\rho dz\,\hat{\varphi}) = \dfrac{\mu_0 N^2 I}{2\pi}\int_a^b \dfrac{d\rho}{\rho}\int_0^h dz$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}_{L}\cdot I \qquad (225.1)$$

notar: - $L \propto \mu_0 * \underbrace{(\text{geometria})}_{\text{similar capacitância, resistência}}$

- $[\mu_0] = \dfrac{T\cdot m}{A} = \dfrac{H}{m}$

considerar sistema : N circuitos Γ_i



$\hookrightarrow$ $\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \dots + \Phi_{ii} + \dots + \Phi_{iN} = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{ij}$: Fluxo total através circuito Γ_i

fluxo através circuito Γ_i devido Γ_j

$\hookrightarrow$ $\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} \dfrac{d\Phi_{ij}}{dt}$: emf induzida no circuito Γ_i

novamente: considerando formato do circuito fixo -> $\Delta\Phi_i \sim \Delta I_j$

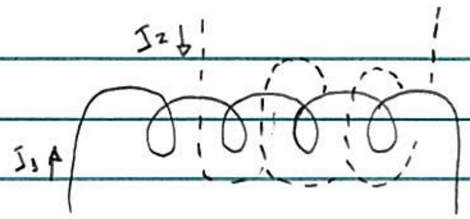
$$\hookrightarrow \frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}\frac{dI_j}{dt} \equiv M_{ij}\frac{dI_j}{dt} \qquad (226.1)$$

indutância mútua entre circuitos Γ_i e Γ_j

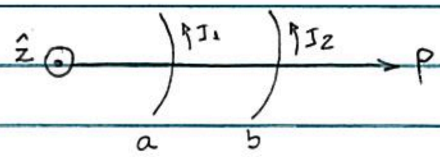
Verifica-se que (veja abaixo) $M_{ij} = M_{ji}$

notar: $M_{ii} = L_i$!

Ex.: considerar 2 solenóides, raios $a<b$, $L \gg 1$, eixo solenóide 1 = = eixo solenóide 2 ⊕ correntes estacionárias I_1 e I_2; determinar L_i e M_{ij}.



ou



solenóide $\underline{1}$, $n_1 = \frac{N_1}{L}$: # espiras/comprimento, corrente I_1

" $\underline{2}$, $n_2 = \frac{N_2}{L}$: " " , " I_2

p/ solenóide $L \gg 1$, vimos que Eq. (173.1):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & , \rho < R \\ 0 & , \rho > R \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $\Phi_{11} = N_1 \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = N_1 \int_{S_1} (\mu_0 n_1 I_1 \hat{z}) \cdot (ds\,\hat{z}) = \mu_0 n_1 N_1 \pi a^2 I_1$

$$\Phi_{22} = N_2 \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \mu_0 n_2 N_2 \pi b^2 I_2$$

$$\Phi_{12} = N_1 \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = N_1 \int_{S_1} (\mu_0 n_2 I_2 \hat{z}) \cdot (ds\,\hat{z}) = \mu_0 n_2 N_1 \pi a^2 I_2$$

$$\Phi_{21} = N_2 \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = N_2 \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = \mu_0 n_1 N_2 \pi a^2 I_1$$

$\hookrightarrow$ $L_1 = \frac{d\Phi_{11}}{dI_1} = \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} \pi a^2$

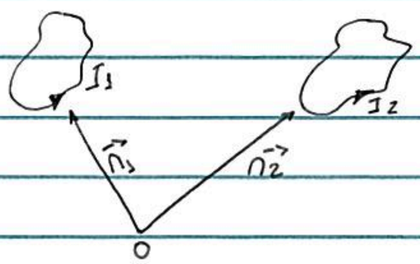
$$L_2 = \frac{d\Phi_{22}}{dI_2} = \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \mu_0 \frac{N_2^2}{L} \pi b^2$$

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} = \frac{\Phi_{12}}{I_2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi a^2$$

$$M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{L} \pi a^2 = M_{12} \qquad (228.1)$$

vamos verificar que (228.1) é válida p/ $\forall$ caso.

considerar 2 circuitos Γ_1 e Γ_2, formato fixo ⊕ correntes estacionárias I_1 e I_2



teorema de Stokes

$$\hookrightarrow \Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma_2} \vec{A}_1(\vec{r}_2) \cdot d\vec{l}_2$$

Como $\vec{A}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{l}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$: Eq. (170.1)

$$\hookrightarrow \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = M_{21} \qquad (228.2)$$

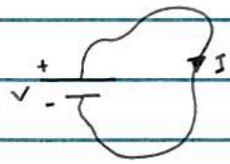
: Fórmula de Neumann

notar: $1 \leftrightarrow 2 \rightarrow M_{21} = M_{12}$!

· Energia magnética.

ideia: determinar a energia necessária p/ estabelecer campo magnético $\vec{B}$.

considerar circuito, resistência R ⊕ fonte externa V



↳ $V + \mathcal{E} = RI$

$\mathcal{E}$ → emf induzida

V → emf fonte externa (e.g., bateria)

trabalho feito por V sob $dq = I\,dt$:

$$dW = V\,dq = V(I\,dt) = (RI - \mathcal{E})(I\,dt)$$

$$= \underbrace{-\mathcal{E} I\,dt}_{-(-d\Phi/dt)\,I\,dt} + RI^2\,dt = I\,d\Phi + RI^2\,dt$$

↳ energia liberada, efeito Joule (irreversível!)

Definindo:

$dW_b = I\,d\Phi$: trabalho realizado pela fonte externa, contrário emf induzida : energia necessária p/ estabelecer B! (229.1)

notar:

$$-\frac{dW}{dt} = RI^2 \quad \text{somente se } d\Phi = 0$$

caso geral: sistema N circuitos (acoplados) Γ_i,

Eq. (229.1) $\rightarrow$ $$dW_b = \sum_{i=1}^{N} I_i \, d\Phi_i \qquad (230.1)$$

hipótese: $d\Phi_i$ ~ somente dI_j

$$\hookrightarrow dW_b = \sum_i I_i \left(\sum_j d\Phi_{ij} \right) = \sum_{ij} I_i \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{ij} M_{ij} I_i dI_j \qquad (230.2)$$

p/ circuitos Γ_i formato fixo
e em repouso: $dW_b = dU$: variação energia magnética

hipótese: circuitos $\Gamma_i \subset$ meio magnético linear

a fim de determinar U, vamos considerar que

$I_i : 0 \longrightarrow I_i$

$\hookrightarrow$ valor final corrente circuito Γ_i

da seguinte forma: $I'_i = \alpha I_i$; $0 \leq \alpha \leq 1$

$\hookrightarrow dI_i = I_i \, d\alpha$

$\xrightarrow[\text{linear}]{\text{meio}} d\Phi_i = \Phi_i \, d\alpha$ (meio magnético linear)

$$\hookrightarrow U = \int dW_b = \sum_{i=1}^{N} \int I'_i \, d\Phi_i = \sum_i I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i \qquad (230.3)$$

ou

$$U = \int \sum_{ij} M_{ij} I'_i dI_j = \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j \int_0^1 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j \qquad (230.4)$$

Eqs. (230.3) e (230.4): <u>energia magnética</u>, N circuitos $\subset$ <u>meio mag. linear</u>

notar:

(i) p/ 1 circuito: $U = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} L I^2$ (231.1)

(ii) p/ 2 circuitos:

$$U = \frac{1}{2} \underbrace{M_{11}}_{L_1} I_1^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} M_{12} + \frac{1}{2} M_{21} \right)}_{M} I_1 I_2 + \frac{1}{2} \underbrace{M_{22}}_{L_2} I_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 = \frac{1}{2} I_2^2 \left(L_1 x^2 + L_2 + 2Mx \right) ; \; x = \frac{I_1}{I_2}$$

- vamos determinar x tal que U máximo ou mínimo

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} I_2^2 \left(2L_1 x + 2M \right) = 0 \rightarrow x = -M/L_1$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = I_2^2 L_1 > 0 \rightarrow x = -M/L_1 \sim U_{MIN}$$

como $U \geq 0 \rightarrow U_{MIN} = \frac{1}{2} I_2^2 \left(L_1 \left(\frac{M}{L_1}\right)^2 + L_2 + 2M \left(-\frac{M}{L_1}\right) \right) \geq 0$

$\hookrightarrow L_1 L_2 \geq M^2$: relação entre indutâncias e indutância mútua sistema 2 circuitos.

· de modo análogo à energia eletrostática, é possível escrever (230.3) em termos de $\vec{B}$ e $\vec{H}$,

temos que

$$\Phi_i = \int_{S_i} \vec{B}_i \cdot d\vec{S} = \int_{S_i} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_i) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma_i} \vec{A}_i \cdot d\vec{\ell} \qquad (231.2)$$

(230.3) ⊕ (231.2) :

$$U = \frac{1}{2}\sum_i I_i \Phi_i = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{\Gamma_i} \vec{A}_i \cdot (I d\vec{\ell})$$

↳ p/ uma distribuição volumétrica de correntes:

$I d\vec{\ell} \rightarrow \vec{J} d^3r$ e $\sum_i \oint_{\Gamma_i} \rightarrow \int_V$, podemos escrever:

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) \quad \text{: energia magnética} \tag{232.1}$$

distribuição de correntes $\vec{J}$ estacionárias

Obs.: comparar Eqs. (45.2) e (232.1)

· no gauge de Coulomb ($\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$), (232.1) pode ser escrita como (veja Eq. (169.1)):

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r\, d^3r' \frac{J(\vec{r}) \cdot J(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{(vácuo)} \tag{232.2}$$

· Eq. (232.1) ⊕ lei de Ampère (199.3) :

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_f(\vec{r}) = \frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

como : $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$, veja pg. 16M

$\hookrightarrow \quad U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V d^3r\ \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \;-\; \dfrac{1}{2}\underbrace{\displaystyle\int_V d^3r\ \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{H})}$

$$\oint_S \underbrace{(\vec{A}\times\vec{H})\cdot d\vec{s}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot r^2 \sim 1/r}_{\hookrightarrow 0}$$

: OK p/ distribuição localizadas de correntes!

p/ volume "suficientemente grande"

$\hookrightarrow \quad U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\text{ALL SPACE}} d^3r\ \vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r})$: energia magnética (meios lineares) (233.1)

p/ meio magnético linear e isotrópico $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$\hookrightarrow \quad U = \dfrac{1}{2\mu}\displaystyle\int d^3r\ B^2(\vec{r})$ (233.2)

notar: $u = \dfrac{1}{2\mu} B^2(\vec{r})$: densidade energia magnética (233.3)

notar p/ vácuo: $U = \dfrac{1}{2\mu_0}\displaystyle\int d^3r\ B^2(\vec{r})$

Obs.: p/ Δt tal que $I_i : 0 \rightarrow I_i$, temos que $I_i = I_i(t)$

nesse caso consideramos limite quasi estático

Resumo energia magnética p/ campos magnéticos estáticos (vácuo)

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{J}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})}_{\text{energia armazenada na distribuição de correntes}} = \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}\int d^3r\, B^2(\vec{r})}_{\text{Energia armazenada no campo magnético}} \qquad (234.1)$$

Obs.: comparar Eqs. (46.3) e (234.1)
" " (131.2) e (233.1)

Eqs. (131.2) e (233.1): energia armazenada, campos <u>estáticos</u> ⊕ meios lineares:

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r \left(\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r}) + \vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{H}(\vec{r}) \right) \qquad (234.2)$$

Ex.: considerar solenoide, raio a, comprimento $\ell >> 1$ ⊕ corrente estacionária I; determinar energia magnética armazenada.

(i) vimos que (pg. 227): $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell}\pi a^2 = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A$: indutância solenoide

↳ Eq. (231.1): $U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{\ell} A I^2$

alternativa: (ii)

Eq. (233.2): $U = \frac{1}{2\mu_0}\int d^3r\, B^2(\vec{r}) \underset{\text{Eq. (173.1)}}{=} \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{VOL. SOL.}} d^3r\, (\mu_0 n I)^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{\ell} A I^2$

(2) Lei de Ampère-Maxwell : corrente de deslocamento

Até o momento, eqs. fundamentais do eletromagnetismo (vácuo), forma diferencial (S.I.)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$: Lei de Gauss (19.2)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$: ausência monopolo magnético (159.1)

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$: Lei de Faraday (219.1)

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$: Lei de Ampère (161.1)

Lembrar : Eqs. (19.2), (159.1) e (161.1) : determinadas p/ campos estáticos
Eq. (219.1) : " " " dependentes t

notar :

assumindo que (159.1) ok p/ $\vec{B}=\vec{B}(\vec{r},t)$

$\nabla\cdot$ Eq. (219.1) : $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0$

ok c/ propriedade (16M.11) : $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ p/ $\forall\ \vec{A}=\vec{A}(\vec{r},t)$.

p/ detalhes veja pg. 235.1

entretanto,

$\vec{\nabla}\cdot$ Eq. (161.1) : $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}) = 0$ apenas p/ correntes estacionárias

(235.1)

↳ é necessário modificar/generalizar (161.1) p/ campos/correntes dependentes do tempo! (*)

notar :

· como $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ p/ $\forall \vec{A}$ (*)

em princípio $\rightarrow \partial_t(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = cte$

p/ $t = t_0$ tal que $\vec{B}(r, t_0) = 0 \rightarrow cte = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}, t) = 0$
(instante inicial)

· sobre a lei de Gauss p/ $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$,

Lei de Ampère - Maxwell :

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \mu_0\left(\nabla\cdot\vec{J} + \epsilon_0\partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = 0 \text{ pois } (*)$$

⊕ eq. de continuidade

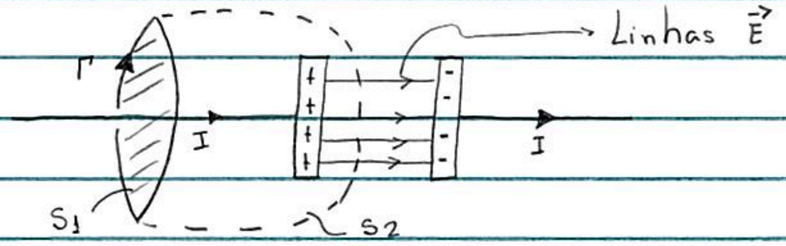
$\hookrightarrow \partial_t\left(\rho + \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = 0 \longrightarrow \rho + \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = cte$

novamente, p/ instante inicial $t = t_0$ tal que

$\rho(\vec{r}, t_0) = \vec{E}(\vec{r}, t_0) = 0 \rightarrow cte = 0$

o exemplo abaixo ilustra (*)

Ex.: considerar capacitor placas planas e $/\!/$, processo de carga



S_1 : superfície plana $\perp$ fio;
S_2 : " curva; fronteira sup. S_1 =
" " S_2 = curva Γ

Lei de Ampère (162.1):

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

por outro lado : contradição!

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$$

· Maxwell: correção Lei de Ampère,

Lembrar: caso geral $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$ ~ eq. de continuidade (143.1)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(+) Lei de Gauss (19.2):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0$$

notar hipótese: Eq. (19.2) ok p/ $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, veja pg. 235.

$\hookrightarrow \quad \vec{J} \to \vec{J} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ em (161.1)

$\hookrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$: Lei de Ampère-Maxwell (237.1)

notar:

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \right) = 0$, ok

- se $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$: (237.1) → (161.1), ok p/ correntes estacionárias

Eq. (237.1) : campo $\vec{E}$ dependente $\underline{\underline{t}}$ ⟶ campo $\vec{B}$

notar similaridade c/ Lei de Faraday (219.1) :

campo $\vec{B}$ dependente $\underline{\underline{t}}$ ⟶ campo $\vec{E}$

Obs.: (273.1), sistema Gaussiano:

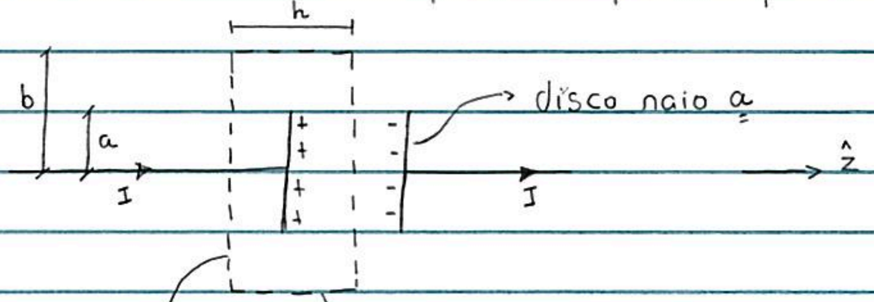
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Eq. (237.1), forma integral,

$$\underbrace{\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}}_{\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell}} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}_{I} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$\hookrightarrow \quad \displaystyle\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$: Lei Ampère-Maxwell (237.2)

Ex.: novamente, capacitor placas planas e ∥, processo de carga



$\rightarrow$ cilindro altura h, base disco raio $b > a$

superfície cilindro $S = S_1 \cup S_2$

$\hookrightarrow$ base cilindro: fronteira = curva Γ =

= círculo raio $\underline{\underline{b}}$

campo elétrico interior placas capacitor:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\hat{z}$$

$A \rightarrow$ área placa capacitor

Eq. (237.2):

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{s} + \mu_0\epsilon_0 \int_{S_1} \partial_t \vec{E}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I + 0 = \mu_0 I$$

$$= \mu_0 \underbrace{\int_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{s}}_{0} = \mu_0\epsilon_0 \underbrace{\int_{S_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{\epsilon_0 A}\right)\hat{z}\cdot ds\,\hat{z}}_{1/\epsilon_0 \frac{dQ}{dt} = 1/\epsilon_0 I} = \mu_0 I \quad !$$

Definindo:

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad : \text{corrente de deslocamento} \qquad (238.1)$$

Obs.:

- motivação p/ introduzir $\vec{J}_D$ é teórica, Eq. (235.1):
  verificação experimental ∃ ondas eletromagnéticas
  (Hertz, após trabalhos Maxwell)
  ↳ introdução $\vec{J}_D$ na Lei de Ampère OK.

- p/ campos $\vec{E}$ estáticos: $\vec{J}_D = 0$

- p/ condutores: $J_f >> J_D$

  condutividade (bons) condutores: $\sigma \sim 10^8 (\Omega \cdot m)^{-1} \rightarrow J_f \sim 10^8 E$

  $J_D \sim \epsilon_0 \omega E \sim 10^{-12} \omega E \rightarrow \omega >> 10^{12}$ p/ $J_D \sim J_f$!

· Equações de Maxwell,

Eqs. fundamentais EM, forma diferencial, vácuo (SI):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \qquad \text{: Lei de Gauss} \qquad (239.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{: ausência monopolo magnético} \qquad (239.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{: Lei de Faraday} \qquad (239.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) \qquad \text{: Lei de Ampère-Maxwell} \qquad (239.4)$$

onde $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$
$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

Eqs. (239.1) - (239.4) : Eqs. de Maxwell

: Eqs. fundamentais EM !

⊕ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$: Lei de Lorentz

Obs. :

(i) Eqs. (239.1) e (239.2) derivadas inicialmente p/ campos estáticos. Entretanto, verifica-se que elas também são válidas p/ campos dependentes tempo.

(ii) Eqs. (239.1) - (239.4) : conjunto eqs. diferenciais. Para se determinar $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ é necessário ⊕ condições contorno (veja abaixo)

(iii) Lembrar : $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$: densidades de carga e corrente totais

(iv) Eqs. (239.1) - (239.4) : em alguns casos denominadas eqs. microscópicas de Maxwell (veja abaixo)

· Equações de Maxwell na matéria,

Vimos que, na presença de meios dielétricos e/ou magnéticos, é interessante escrever as Leis de Gauss e Ampère em termos dos campos auxiliares $\vec{D}$ e $\vec{H}$, i.e.,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \qquad (115.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f \qquad (199.3)$$

vamos adicionar a corrente de deslocamento à Eq. (199.3) de modo análogo ao procedimento pg. 236.

como : $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_f + \partial_t \rho_f = 0$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_f + \partial_t \rho_f \underset{\uparrow}{=} \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_f + \partial_t\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{J}_f + \partial_t \vec{D}\right) = 0$$

Eq. (115.2)

$$\hookrightarrow \vec{J}_f \rightarrow \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (241.1)$$

: Lei de Ampère-Maxwell p/ meios materiais

aqui, de modo análogo à eletrostática e magnetostática, definimos os campos vetoriais auxiliares

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{r},t) - \vec{M}(\vec{r},t) \quad (241.2)$$

notar : Eq. (241.1) em termos $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J}_f + \vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

comparando a eq acima c/ Eq. (239.4), vemos que a densidade de corrente total $\vec{J}(\vec{r},t)$ apresenta 3 termos :

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}_f + \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{M}}_{\vec{J}_M} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{\equiv \vec{J}_P} \tag{242.1}$$

~ elétrons livres (transporte)

$\equiv \vec{J}_P$: densidade de corrente de polarização

↳ corrente magnetização ~ $\vec{M}$

Lembrar caso estático:

$\sigma_b(\vec{r}) \equiv \sigma_P(\vec{r}) = \vec{P}\cdot\hat{n}$: densidade superficial cargas ligadas/polarização
$\rho_b(\vec{r}) \equiv \rho_P(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$: " volumétrica " " "

$\vec{K}_M(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r})\times\hat{n}$: densidade superficial corrente magnetização
$\vec{J}_M(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{r})$: " " "

Se $\rho_P = \rho_P(\vec{r},t)$ $\longrightarrow$ eq. de continuidade:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_P = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right)$$

↳ $\vec{J}_P(\vec{r},t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\vec{P}(\vec{r},t)$: densidade de corrente de polarização (242.2)

Eqs. fundamentais EM, forma diferencial, p/ meios materiais:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f(\vec{r},t) \qquad (243.1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (243.2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (243.3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_f(\vec{r},t) \qquad (243.4)$$

onde $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$ $\quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$

$\vec{D} = \vec{D}(\vec{r},t)$ $\quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{r},t)$

notar: além das condições de contorno (veja abaixo), é necessário considerar as relações constitutivas, i.e.,

$$\vec{D} = \vec{D}\left(\vec{E},\vec{B}\right) \quad \text{e} \quad \vec{H} = \vec{H}\left(\vec{E},\vec{B}\right) \qquad (243.5)$$

p/ determinação de $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$.

caso particular: meio linear descrito por permissividade ϵ e permeabilidade μ:

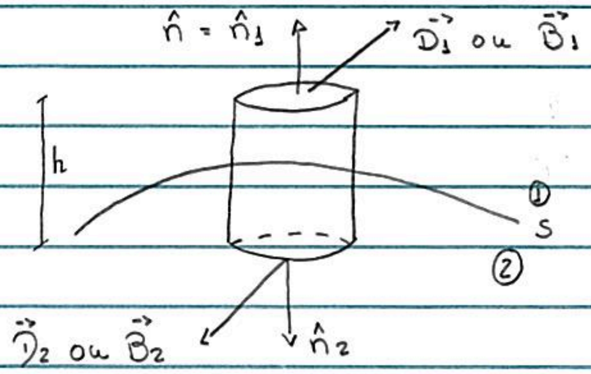
$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ e $\vec{B} = \mu\vec{H}$: relações constitutivas.

Obs. Eqs. (243.1) - (243.4) : em alguns casos denominadas eqs. macroscópicas de Maxwell (veja abaixo)

· Condições de contorno.

De modo análogo ao caso estático, vamos derivar as condições de contorno p/ $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}$ e $\vec{H}$ dependentes do tempo, considerando as formas integrais das Eqs. (243.1) - (243.4)

(i) considerar: superfície arbitrária S ⊕ $\sigma_f(\vec{r},t)$ ⊕ $\vec{K}_f(\vec{r},t)$
⊕ cilindro infinitesimal



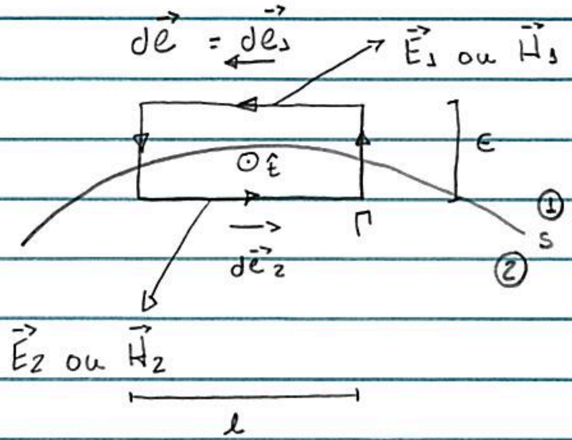
Eq. (243.1) : $\displaystyle\oint_{\text{CILINDRO}} \vec{D}\cdot d\vec{s} \xrightarrow[h\to 0]{} (\hat{n}_1\cdot\vec{D}_1 + \hat{n}_2\cdot\vec{D}_2)\,A = Q_f = \sigma_f A$

↳ $D_1^{\perp} - D_2^{\perp} = \sigma_f$ ou $\hat{n}\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f$

Eq. (243.2) : $\displaystyle\oint_{\text{CILINDRO}} \vec{B}\cdot d\vec{s} \xrightarrow[h\to 0]{} (\hat{n}_1\cdot\vec{B}_1 + \hat{n}_2\cdot\vec{B}_2)\,A = 0$

↳ $B_1^{\perp} = B_2^{\perp}$ ou $\hat{n}\cdot(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

(ii) considerar: superfície arbitrária S ⊕ $\sigma_f(\vec{r},t)$ ⊕ $\vec{K}_f(\vec{r},t)$
⊕ curva fechada Γ



$\hat{n}_1 = \hat{n}$

Eq. (243.3) : $$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot (ds\,\hat{t})$$

↳ sup. fronteira = Γ

notar : Área sup. S $\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 0$

$$\xrightarrow[\epsilon \to 0]{} (\vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}_2) \cdot \ell = 0 \quad \to \quad E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$$

ou $\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

De modo análogo, temos que :

Eq. (243.4) : $$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} (\vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{H}_2 \cdot d\vec{\ell}_2) \cdot \ell = I_f = d\vec{\ell}_1 \cdot (\vec{K}_f \times \hat{n})\,\ell$$

↳ $\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}_f$

Resumo condições de contorno:

$$\hat{n}\cdot(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \qquad \hat{n}\times(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \qquad \hat{n}\times(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}_f \tag{246.1}$$

caso particular meio linear: $\vec{D}_i = \epsilon_i \vec{E}_i$

$\vec{B}_i = \mu_i \vec{H}_i \quad ; \; i = 1,2$

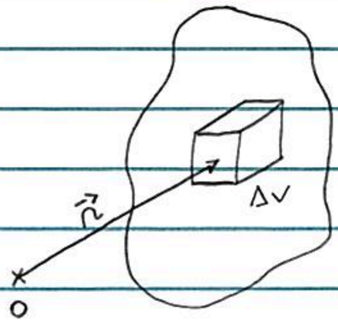
$$\hat{n}\cdot(\epsilon_1\vec{E}_1 - \epsilon_2\vec{E}_2) = \sigma_f \qquad \hat{n}\times(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \qquad \hat{n}\times(\vec{B}_1/\mu_1 - \vec{B}_2/\mu_2) = K_f \tag{246.2}$$

-> pg. 246.1

· Campos microscópicos × campos macroscópicos,

Lembrar definição polarização:



$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \vec{r} \in \Delta V}} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \tag{246.3}$$

onde $\vec{p}_i \in \Delta V$

e volume $\Delta V << V_{AMOSTRA}$ porém

infinitesimal $\Delta V >> V_{ÁTOMO/MOLÉCULA}$

podemos escrever (246.3) como

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{N}{\Delta V} \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}_{\langle \vec{p}(\vec{r})\rangle} = n(\vec{r})\langle\vec{p}(\vec{r})\rangle$$

valor médio $\vec{p}$ no volume ΔV!

↳ densidade átomos/moléculas

Ex.: considerar solenóide ⊕ $I = I(t)$, pgs. 222-223.

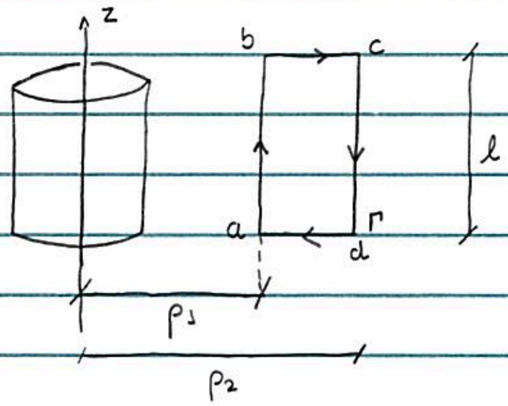
Vimos que

$$\vec{E}(\vec{r},t) \simeq \begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_0 n \dot{I} \rho \hat{\varphi} , & \rho < R \\ -\frac{1}{2}\mu_0 n \dot{I} \frac{R^2}{\rho} \hat{\varphi} , & \rho > R \end{cases}$$

: p/ limite quasi-estático

e $\vec{B}(\vec{r},t) \simeq \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} , & \rho < R \\ 0 , & \rho > R \end{cases}$

vamos determinar $\vec{B}_{out}(\vec{r},t)$ em 1ª aproximação



por simetria $\vec{E}_{out} \propto \hat{\varphi} \longrightarrow \vec{B}_{out} \propto \hat{z} \longrightarrow$ curva Γ = retângulo

Eq. (237.2) : $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\mu_0 I}_{=0} + \mu_0\epsilon_0 \int_S \partial_t \vec{E}\cdot d\vec{S}$

$$= \int_a^b B\hat{z}\cdot(dz\,\hat{z}) + \int_c^d (B\hat{z})\cdot(dz\,\hat{z}) = \mu_0\epsilon_0 \int \left(-\frac{1}{2}\mu_0 n \ddot{I} \frac{R^2}{\rho}\hat{\varphi}\right)\cdot(d\rho\, dz\, \hat{\varphi})$$

$$\hookrightarrow \left(B(\rho_1) - B(\rho_2)\right)\ell = -\frac{1}{2}\mu_0 n \ddot{I} R^2 \cdot \ell \cdot \underbrace{\mu_0\epsilon_0}_{1/c^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho}$$

$\hookrightarrow$ $B(\rho_1) - B(\rho_2) = -\frac{1}{2} \mu_0 n \ddot{I} \frac{R^2}{c^2} \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$

hipótese : $I(t) = I_0 \cos \omega t \rightarrow \ddot{I} = -\omega^2 I$

$\rho_2 = \frac{c}{\omega}$: comprimento característico

$\hookrightarrow$ $\vec{B}_{out}(\rho) = -\frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \ln\left(\frac{\rho\omega}{c}\right) \hat{z}$; $R < \rho < \omega/c$

↳ quantidade macroscópica $\vec{P}$ ~ valor médio (média espacial) quantidade microscópica $\vec{p}$

↳ considerações análogas p/ magnetização

↳ indica que $\vec{E}, \vec{D}$ ~ $\langle \vec{E}_{MICRO} \rangle$, etc.
$\vec{B}, \vec{H}$
$\vec{\rho}$ e $\vec{J}$ em (234.1) - (234.4)

Em detalhes,

Lembrar: Eqs. de Maxwell (239.1) - (239.4) obtidas a partir de Q e I macro

↳ Q.: Eqs. (239.1) - (239.4) válidas p/ sistemas microscópicos?
A.: Experimento → ok p/ $L_{MIN} \sim \lambda_{COMPTON} \sim 10^{-12}$ m

nessa escala: núcleos e elétrons descritos como cargas pontuais.

↳ sistema constituído por núcleos e elétrons pode ser descrito pelas eqs. microscópicas de Maxwell (239.1) - (239.4):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{1}{\epsilon_0} \eta \qquad \vec{\nabla} \times \vec{e} + \partial_t \vec{b} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{b} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{e} = \mu_0 \vec{j} \tag{247.1}$$

onde

$\vec{e} = \vec{e}(\vec{r}, t)$: campo elétrico microscópico
$\vec{b} = \vec{b}(\vec{r}, t)$: " magnético "
$\eta = \eta(\vec{r}, t)$: densidade " carga (total)
$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$: " , corrente "

idéia : $\vec{E}(\vec{r},t) = \langle \vec{e}(\vec{r},t) \rangle$
$\vec{B}(\vec{r},t) = \langle \vec{b}(\vec{r},t) \rangle$

campos macroscópicos

média espacial campos microscópicos

Obs.: não é necessário considerar média temporal

Verifica-se que (p/ detalhes veja Sec. 6.6, Jackson)

$$\langle \vec{\nabla}\cdot\vec{b} \rangle = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\langle \vec{\nabla}\times\vec{e} + \partial_t \vec{b} \rangle = 0 \longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$$

$$\langle \vec{\nabla}\cdot\vec{e} \rangle = \frac{1}{\epsilon_0}\langle \rho \rangle \longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\langle \rho \rangle \qquad (248.1)$$

$$\langle \vec{\nabla}\times\vec{b} - \mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{e} \rangle = \langle \vec{j} \rangle \mu_0 \longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E} = \mu_0\langle \vec{j} \rangle$$

além disso, temos que

$$\langle \rho(\vec{r},t) \rangle = \rho_f(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r},t) + \dots \qquad (248.2)$$

e a expressão correspondente p/ $\langle \vec{j}(\vec{r},t) \rangle$

notar : Eqs. (248.1) ⊕ (248.2) $\longrightarrow$ (243.1) !

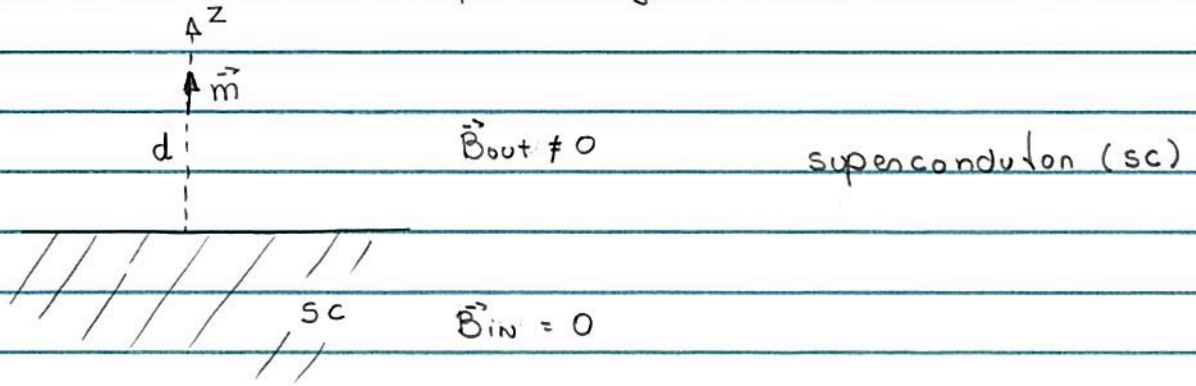
↳ Eqs. (243.1) - (243.4) : Eqs. macroscópicas de Maxwell

Obs. sobre média espacial : considera-se que a descrição macroscópica OK p/ $L > L_0 \sim 10^{-8}\,m = \lambda$ radiação UV, pois eqs. Maxwell podem ser utilizadas p/ descrever fenômenos ópticos : reflexão e refração!

Ex. P. 7.43, G. : ideia ilustrar observação: magneto permanente flutua sob a superfície material supercondutor.

considerar: momento de dipolo $\vec{m} = m\hat{z}$ em $\vec{r}_0 = d\hat{z}$
⊕ supercondutor em $z \leq 0$;

determinar: (a) força sc sob $\vec{m}$
(b) densidade superficial de corrente $\vec{K}$ induzida no plano xy.



o sistema pode ser analizado via método de imagens.

Lembrar: sc diamagneto perfeito $\rightarrow \vec{B}(x,y,z<0) = 0$

condição de contorno : $\hat{z} \cdot (\vec{B}_{OUT} - \vec{B}_{IN})\Big|_{z=0} = 0$

$\hookrightarrow B_{OUT,z}(x,y,0) = B_{OUT,z}(\rho,0) = 0$

campo magnético dipolo em $\vec{r}_0$; Eq. (182.2) :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \left(3\hat{n}(\vec{m}\cdot\hat{n}) - \vec{m} \right)$$

onde $\hat{n} = \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

notar: $\hat{n} = \dfrac{x\hat{x} + y\hat{y} + (z-d)\hat{z}}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{1/2}} = \dfrac{\rho\hat{\rho} + (z-d)\hat{z}}{(\rho^2+(z-d)^2)^{1/2}}$ p/ $\vec{n}_0 = d\hat{z}$

$$\vec{m}\cdot\hat{n} = (m\hat{z})\cdot\hat{n} = \frac{m(z-d)}{(\rho^2+(z-d)^2)^{1/2}}$$

pela simetria do sistema, o dipolo imagem $\vec{m}'$ está localizado em $\vec{n}_0' = -\hat{z}d$, de modo que o campo magnético é dado por

$$\vec{B}(\rho,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3m(z-d)(\rho\hat{\rho} + (z-d)\hat{z})}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{5/2}} - \frac{m\hat{z}}{(x^2+y^2+(z-d)^2)^{3/2}}\right) +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3m'(z+d)(\rho\hat{\rho} + (z+d)\hat{z})}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{5/2}} - \frac{m'\hat{z}}{(x^2+y^2+(z+d)^2)^{3/2}}\right)$$

$$\equiv \vec{B}_m(\rho,z) + \vec{B}_{m'}(\rho,z) \;, \quad z \geq 0$$

notar: $B_z(\rho,0) = 0 \to m' = -m$ ou $\vec{m}' = -m\hat{z}$

↳ força SC sob dipolo, Eq. (188.2):

$$\vec{F}(\vec{n}) = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}_{m'}(\rho,z)) = \vec{\nabla}\left(m B_{m',z}(\rho,z)\right)$$

$$= +\vec{\nabla}\left(-\frac{\mu_0 m^2}{4\pi}\left(\frac{3(z+d)^2}{(\rho^2+(z+d)^2)^{5/2}} - \frac{1}{(\rho^2+(z+d)^2)^{3/2}}\right)\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 m^2}{4\pi}\cdot\frac{1}{(\rho^2+(z+d)^2)^{7/2}}\Big(3\rho\left(\rho^2 - 4(z+d)^2\right)\hat{\rho} +$$

$$+ 3(z+d)\left(3\rho^2 - 2(z+d)^2\right)\hat{z}\Big)$$

$\hookrightarrow \vec{F}(0,z) = + \dfrac{\mu_0 m^2}{4\pi} \dfrac{6}{(2d)^4} \hat{z}$

se M : massa magneto

$\hookrightarrow$ posição equilíbrio : $\dfrac{\mu_0 m^2}{4\pi} \cdot \dfrac{6}{(2d)^4} = Mg$.

sobre a corrente induzida na superfície sc,

Lembrar condição de contorno (177.1) :

$$\hat{z} \times (\vec{B}_{out} - \vec{B}_{in})\Big|_{z=0} = \mu_0 \vec{K} = \hat{z} \times \vec{B}_{out}\Big|_{z=0} = B\rho(\rho,0)\,(\hat{z} \times \hat{\rho})$$

$$\hookrightarrow \vec{K}(\rho) = \frac{1}{\mu_0} B\rho(\rho,0)\,\hat{\varphi} = - \frac{3m\rho d}{2\pi(\rho^2+d^2)^{5/2}} \hat{\varphi}$$

Ex. P-7.47 G. : vimos que

Eq. (152.4) : $\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int d^3r' \, \dfrac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad e \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (251.1)$$

e

Eq. (169.1) : $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int d^3r' \, \dfrac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ p/ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$!

(a) hipótese $\rho(\vec{r},t) = 0$

↳ $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

dada a analogia c/ (251.1), temos que

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\partial_t\vec{B}(\vec{r}',t)\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad (252.1)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int d^3r' \, \frac{\vec{B}(\vec{r}',t)\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

(b) considerar gauge de Coulomb

↳ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ e $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$

↳ $$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{B}(\vec{r}',t)\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad (252.2)$$

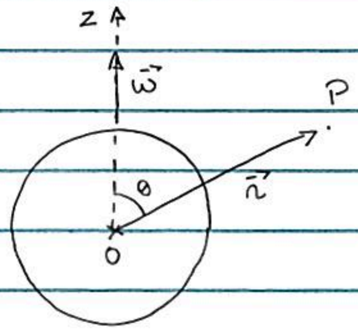
notar: p/ caso particular $\rho = 0$ temos que

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\partial_t\vec{A}(\vec{r},t)$$

↳ $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times(-\partial_t\vec{A}) = -\partial_t\,\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\partial_t\vec{B}$

(c) considerar uma casca esférica raio R ⊕ densidade superficial de carga σ = cte ⊕ rotação $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$; determinar $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$.

hipótese : $\vec{\omega} = \omega(t)\,\hat{z}$



↳ $\vec{K}(\vec{r}) = \vec{K}(r,\theta) = \sigma \vec{v} = \sigma(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \sigma \omega r \sin\theta\, \hat{\varphi}$

de fato : $\vec{K}(\theta) = \sigma \omega R \sin\theta\, \hat{\varphi}$

como as condições dos itens (a) e (b) são válidas

↳ determinar $\vec{A}(\vec{r},t)$.

hipótese : "variação lenta" $\omega(t)$ = aproximação quasi estática

↳ $$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}';t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, ds$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\sigma \omega(t) R \sin\theta' \; (R^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \hat{\varphi}'$$ NOTAR !

como $$|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{r} \displaystyle\sum_{\ell \geq 0} \left(\dfrac{R}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\gamma) & , \; r > R \\ \dfrac{1}{R} \displaystyle\sum_{\ell \geq 0} \left(\dfrac{r}{R}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\gamma) & , \; r > R \end{cases}$$

veja pg. 198.2

↳ ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$!

e $\hat{\varphi}' = -\sin\varphi'\,\hat{x} + \cos\varphi'\,\hat{y}$

(i) $r > R$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3}{4\pi} \frac{1}{r} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{R}{r}\right)^l \int P_l(\cos\gamma) \sin^2\theta' \, *$$

$$* \left(-\sin\varphi' \hat{x} + \cos\varphi' \hat{y}\right) d\theta' d\varphi'$$

como (teorema de adição harmônicos esféricos)

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta') +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta') \cos\big(m(\varphi-\varphi')\big)$$

notar

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \cos\big(m(\varphi-\varphi')\big) \sin\varphi' = \pi \delta_{m,1} \sin\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \cos\big(m(\varphi-\varphi')\big) \cos\varphi' = \pi \delta_{m,1} \cos\varphi$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3}{4} \cdot \frac{1}{r} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{R}{r}\right)^l \frac{(l-1)!}{(l+1)!} P_l^1(\cos\theta) \, *$$

$$* \, 2 \, * \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \underbrace{\sin\theta'}_{P_1^1(\cos\theta')} P_l^1(\cos\theta')}_{\frac{2}{2l+1} \cdot \frac{(l+1)!}{(l-1)!} \delta_{l,1}} * \underbrace{\left(-\sin\varphi \hat{x} + \cos\varphi \hat{y}\right)}_{\hat{\varphi}}$$

$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{3r^2} P_1^1(\cos\theta)\,\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{3} \frac{\sin\theta}{r^2}\,\hat{\varphi}\ , \quad r > R$

(ii) $r < R$

de modo analogo, temos que:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R^3}{4} \cdot \frac{1}{R} \sum_{l \geq 0} \left(\frac{r}{R}\right)^l \frac{(l-1)!}{(l+1)!} P_l^1(\cos\theta) \,\cdot$$

$$\cdot\, 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' P_1^1(\cos\theta') P_l^1(\cos\theta')}_{2/3 \ \frac{(l+1)!}{(l-1)!}} \ \hat{\varphi}$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{3} r \sin\theta\,\hat{\varphi}\ , \quad r < R$$

$\hookrightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{cases} -\partial_t \vec{A} = -\frac{\mu_0 \sigma \dot{\omega} R}{3} r \sin\theta\,\hat{\varphi}\ , & r < R \\ -\partial_t \vec{A} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = -\frac{\mu_0 \sigma \dot{\omega} R^4}{3} \sin\theta\,\hat{\varphi} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\ , & r > R \end{cases}$$

REF.: Classical eletricity and magnetism
Panofsky and Phillips