

Campos elétricos na matéria.

Lembrar classificação materiais w.r.t. mobilidade de cargas
(veja pg. 48)

(1) condutores: cargas elétricas podem se movimentar
interior material (≠ cargas livres)
Ex.: metais Fe, Cu

(2) isolantes: cargas elétricas ligadas
(dielétricos) Ex.: vidro, plástico
Si, GaAs (semicondutores)

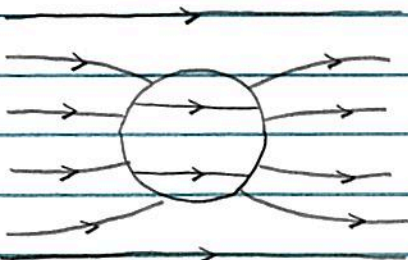
Dieletrico: meio que não blinda completamente seu interior
dos efeitos de um campo eletrostático externo.

- associado à ≠ cargas ligadas: movimento: NOT
apenas redistribuição espacial

$$\hookrightarrow \vec{E}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + \vec{E}_{SELF}(\vec{r}) \neq 0, \forall \vec{r} \quad (100.1)$$

campo elétrico externo ↙ ↘ campo elétrico
~ redistribuição de cargas

Ex.: consideramos esfera raio R, material dielétrico (constante
dielétrica κ), sob campo elétrico uniforme \vec{E}_0 ;
verifica-se que o campo elétrico p/ $|\vec{r}| < R$ é



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3}{2 + \kappa} \vec{E}_0$$

↳ $\kappa > 1$!

Lembrar: $\vec{E}(r < R) = 0$ p/ esfera metálica !

ideia: estudar resposta material dielétrico à campo elétrico externo.

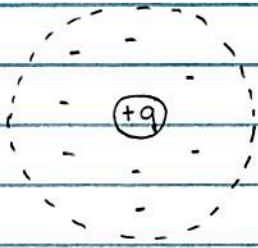
conceitos úteis: dipolo elétrico pontual, polarização

inicial: considerações microscópicas sobre

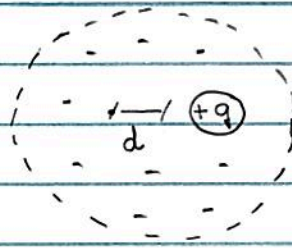
- átomos/moléculas apolares: momento dipolo induzido
- " " polares: " " permanente

(1) átomos/moléculas apolares,

considerar átomo neutro \oplus \vec{E} externo



(A) $\vec{E} = 0$



$\vec{E} \neq 0$ (B)

- em princípio, ~~há~~ resposta pois átomo neutro (Fig. A)

- entretanto, considerando átomo = núcleo: carga $+q$
(modelo) elétrons: carga $-q$

$\hookrightarrow \oplus \vec{E} \rightarrow$ separação espacial: formação de um momento de dipolo induzido = átomo polarizado

(Fig. B)

em particular, considerando:

(i) elétrons = distribuição esféricamente simétrica, uniforme, raio \underline{a} , não deslocada por \vec{E} externo;

(ii) núcleo: deslocamento \underline{d} (w campo \vec{E}_{ext}) w.r.t. posição equilíbrio.

$\hookrightarrow \vec{E}$ sob núcleo \sim elétrons (veja pg. 32)

$$E(r=d) = \frac{\rho d}{3\epsilon_0} = \frac{1}{3} \cdot \frac{q}{4\pi a^3} d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qd}{a^3}$$

em equilíbrio: $E = E_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3} qd$

$$\hookrightarrow p = qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E_{ext} \quad (102.1)$$

notar Eq. (102.1): momento dipolo induzido $p \propto E_{ext}$!

De fato, caso geral, p/ campos elétricos "pequenos", verifica-se que

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (102.2)$$

\hookrightarrow polarizabilidade atômica (propriedade material)

Ex. (experimento):

	H	He	C	Na	
$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}$	0,67	0,20	1,76	24,1	$\cdot 10^{-30} \text{ m}^3$

Eq. (102.1) : modelo p/ cálculo α .

Eq. (102.2) : resposta \vec{p} e perturbação \vec{E} : direções =
caso geral : " " : " \neq !

↳ generalização (102.2) :

$$\vec{p} = \underline{\alpha} \vec{E} \quad (103.1)$$

↘ tensor de polarizabilidade

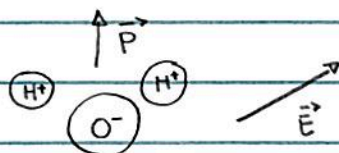
$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}$$

Obs. : $\alpha_{ij} \sim$ escolha sistema de referência,
se eixos principais : tensor diagonal !

(2) átomos/moléculas polares,

considerar molécula polar $\oplus \vec{E}$ externo = considerar dipolo
 $\oplus \vec{E}_{ext}$!

Ex.: H_2O



Vimos que (pg. 99)

$$\vec{F}(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F} \longrightarrow \vec{p} \nparallel \vec{E}_{ext} !$$

pr os dois casos discutidos acima:

(1) átomos/moléculas apolares $\oplus \vec{E}_{ext}$

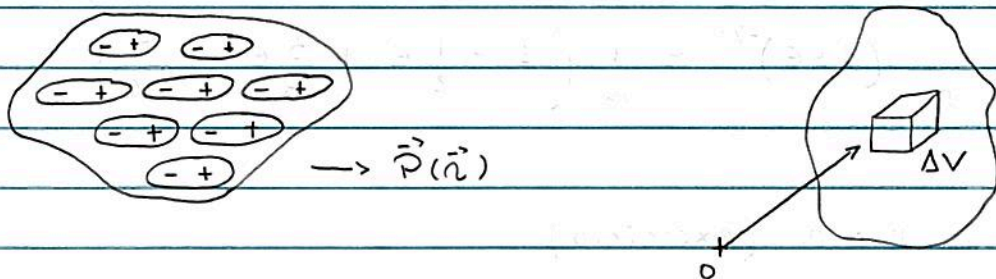
$\hookrightarrow \vec{p}$ induzido e $\vec{p} \parallel \vec{E}_{ext}$

(2) átomos/moléculas polares $\oplus \vec{E}_{ext}$

$\hookrightarrow \vec{p}$ permanente e $\vec{p} \parallel \vec{E}_{ext}$

\hookrightarrow descrição material dielétrico sob $\vec{E} =$

= conjunto dipolos (pontuais) $\parallel \vec{E} =$ material polarizado



\hookrightarrow é interessante introduzirmos o vetor polarização $\vec{P}(\vec{r})$:
quantidade macroscópica que descreve o material
dielétrico polarizado

Definição: $\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V}$: polarização (107.1)
 $\vec{r} \in \Delta V$

onde $\Delta \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$; $\vec{p}_i \in \Delta V$

Lembrar: momento dipolo $\vec{p} \rightarrow \vec{E}_{dip}(\vec{r})$

\hookrightarrow material polarizado $\rightarrow \vec{E}(\vec{r})!$

notas: $\vec{E}_{ext} \rightarrow \vec{P}(\vec{r}) \rightarrow \vec{E}_{SELF}(\vec{r})$: veja Eq. (100.1)

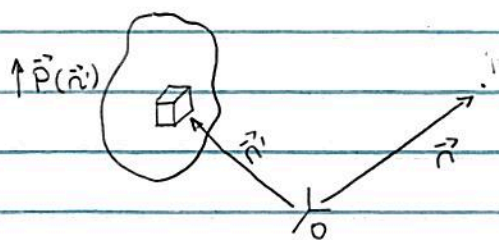
próxima etapa: consideramos dielétrico polarizado, descrito por um vetor de polarização $\vec{P}(\vec{r})$ e determinamos:

• Campo elétrico de um dielétrico polarizado

consideramos dielétrico polarizado, vetor de polarização $\vec{P}(\vec{r})$

ideia: determinamos $V = V(\vec{r})$ p/ $\vec{r} \in$ volume dielétrico





pt. dv' em \vec{r}' , temos que $\vec{p}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}) dv'$;

Lembrando Eq. (97.1), $V(\vec{r})$ associado a dipolo pontual:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

$$\hookrightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (108.1)$$

Obs.: como $(dv')^{1/3} \ll |\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow$ aproximação dipolo pontual OK.

em princípio, se $\vec{P}(\vec{r})$ é conhecido \rightarrow Eq. (108.1) $\rightarrow V(\vec{r})$!

entretanto, é possível reescrever (108.1) de forma alternativa,

$$\text{como } \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rightarrow \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = + \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (108.2)$$

$$\hookrightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Como

$$\vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}) + (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}') \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad : \text{ veja pg. } \underline{\underline{164}}$$

integrando por partes, temos que

$$\hookrightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot (\vec{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{P})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\int_S \frac{P(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ; \text{ sup. } S = \text{fronteira volume } V.$$

se $d\vec{S}' = \hat{n} ds'$

$$\hookrightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\hat{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{(-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (109.1)$$

<p>similar $V(\vec{r})$ \sim dist. superficial de carga $\sigma_b = \hat{n} \cdot \vec{P}$</p>	<p>similar $V(\vec{r})$ \sim dist. volumétrica de carga $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$</p>
--	--

definindo:

$\sigma_b(\vec{r}) = \sigma_p(\vec{r})$: densidade superficial de cargas ligadas/polarização
 $\rho_b(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r})$: " volumétrica " " " " "

interpretação (109.1): $V(\vec{r}) \sim$ material polarizado =
 $= V(\vec{r}) \sim$ distribuição de cargas ligadas/polarização
 σ_p e ρ_p !

como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, Eqs. (108.2) \oplus (109.1)

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho_p(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (109.2)$$

Eq. (109.2): campo elétrico devido material polarizado.

Obs.: Eq. (109.2) derivada p/ $\vec{r} \notin$ material;
 verifica-se Eq. (109.2) ou p/ $\vec{r} \in$ material!

Ex.: exemplo 4.2 G.; consideran esfera raio R , uniformemente polarizada; determinan $\vec{E}(\vec{r})$

hipótese: $\vec{P} = P\hat{z}$

$$\text{nesse caso } \sigma_p(\vec{r}) = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{r} = P \cos \theta$$

$$\rho_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

como sistema apresenta simetria azimutal $\rightarrow V = V(r, \theta)$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (80.2)}: V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{2l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

como $V(0, \theta) < +\infty$ e $V(\vec{r} \rightarrow +\infty, \theta) \rightarrow 0$

$$\hookrightarrow V(r, \theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r < R$$

$$\sum_l \frac{B_l}{r^{2l+1}} P_l(\cos \theta), \quad r > R$$

- continuidade $V(\vec{r})$ em $r = R \rightarrow B_l = A_l R^{2l+1}$, veja pg. 82.7

- E_{\perp} em $r = R$:

$$\frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^+} - \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R^-} = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_p(\theta)$$

$$\hookrightarrow A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{2l+1}} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \sigma_p(\theta) P_l(\cos \theta), \text{ veja pg. } \underline{82.8}$$

como $\sigma_p(\theta) = P \cos \theta = P P_1(\cos \theta)$

$$\hookrightarrow A_e = \frac{P}{2\epsilon_0 R^{2.1}} \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_1(\cos\theta) P_1(\cos\theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} \delta_{e,1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2/3 \delta_{e,1}}$

$$\hookrightarrow B_e = \frac{P}{3\epsilon_0} R^3 \delta_{e,1}$$

$$\hookrightarrow V(n, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} n \cos\theta, & n < R \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{n^2} \cos\theta, & n > R \end{cases}$$

Como $\vec{\nabla} = \hat{n} \partial_n + \frac{\hat{\theta}}{n} \partial_\theta + \hat{\phi} \frac{1}{n \sin\theta} \partial_\phi$

\hookrightarrow (i) $n < R,$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{P}{3\epsilon_0} (\underbrace{\hat{n} \cos\theta - \hat{\theta} \sin\theta}_{\hat{z}}) = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}, \text{ veja pg. 21M}$$

\hookrightarrow uniforme, sentido $\neq \vec{E}$!

(ii) $n > R,$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{n^3} (2\hat{n} \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{3(\hat{z} \cdot \hat{n})\hat{n} - \hat{z}}$

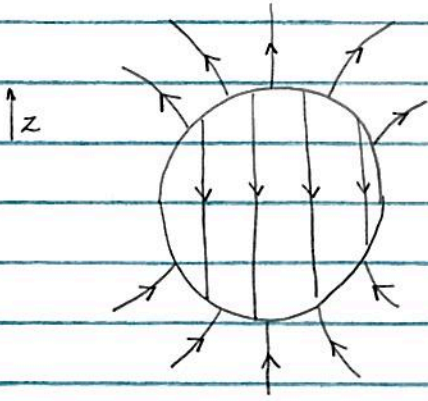
como $\vec{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}$: momento dipolo esfera

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{n}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{n^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{p}) : \vec{E} \text{ dipolo } \vec{p}$$

em $\vec{n} = 0!$

(veja Eq. (92.3))

veja Fig. 4.10, G.



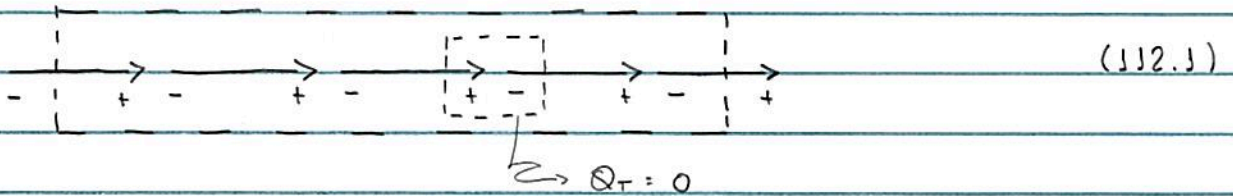
notas: sentido \vec{E}
 p/ $r < R$ e $r > R$!

• sobre as cargas ligadas/polarização,

ideia: verificar que σ_p e ρ_p correspondem à distribuição de cargas, i.e. não são apenas funções auxiliares definidas através de (109.1).

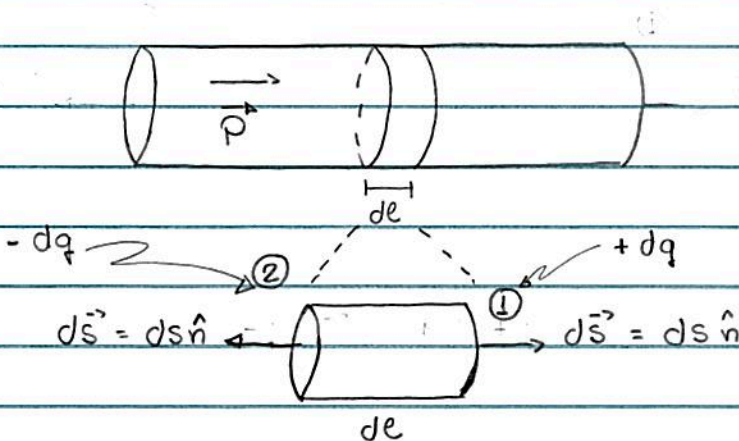
(i) sobre σ_p ,

considerar distribuições 1-D de dipolos idênticos \vec{p} :



notas: localmente, $q = 0$
 entretanto, nos extremos do sistema, $q \neq 0 \sim \sigma_p$!

em detalhes: considerar cilindro dielétrico polarizado, tal que $\vec{P} \parallel$ eixo do cilindro



pr um cilindro infinitesimal de altura de, temos que

$$\vec{p} = \vec{P}(dsde) : \text{momento de dipolo cilindro}$$

se dq é a carga acumulada nas bases do cilindro, temos que,

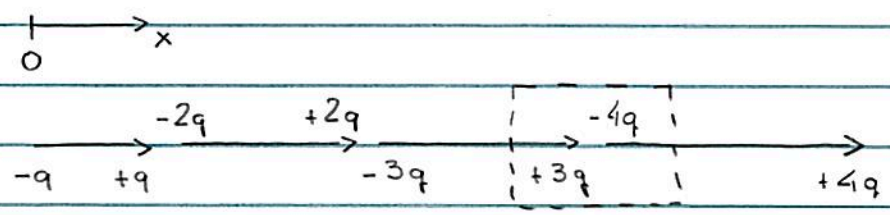
$$p = dqde = P(dsde) \rightarrow \frac{dq}{ds} = \sigma_p = P!$$

notas: base ① : $dq > 0 : \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} > 0$
" ② : $dq < 0 : \sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} < 0$

(ii) sobre P_p ,

notas Fig. (112.1) : conjunto dipolos idênticos \vec{p} em 1-D
 $\hookrightarrow \vec{P} = \text{cte} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_p = 0!$

considerar a seguinte distribuição 1-D de dipolos:



notas: localmente $q < 0$ $\sim \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
além disso, \vec{P} é não uniforme e $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} > 0$

De fato, para um dielétrico neutro, temos que

$$Q_{TOTAL} = \int_V d^3r \rho_p(\vec{r}) + \int_S \sigma_p(\vec{r}) dS = 0$$

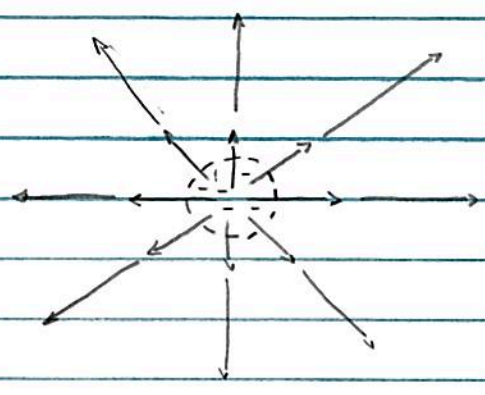
$$\hookrightarrow \int_V d^3n \rho_b(\vec{n}) = - \oint_S \vec{P} \cdot \underbrace{(\hat{n} ds)}_{d\vec{s}} = - \int_V d^3n \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Teorema de Gauss

$$\hookrightarrow \rho_p(\vec{n}) = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Ex.: consideramos $\vec{P} = \kappa \vec{n}$, $\kappa > 0$

$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} > 0$: nota-se acumulação de cargas negativas na origem!



(p/ detalhes, veja P 4.10, G.)

• Vetor deslocamento elétrico,

p/ um material dielétrico polarizado, polarização $\vec{P}(\vec{n})$:

$$\exists \text{ cargas ligadas/polarização tal que } \sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{P}$$

$$\rho_p = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

\hookrightarrow podemos escrever:

$$\rho(\vec{n}) = \rho_p(\vec{n}) + \rho_f(\vec{n}), \quad n \in \text{interior} \quad \text{densidade total de carga}$$

dielétrico

densidade de cargas livres = todas as cargas, exceto as cargas ligadas

(119.1)

Eq. (114.1) \oplus Lei de Gauss :

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \rho_p + \rho_f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \rho_f$$

$\vec{E}_{TOTAL}!$ $\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$

Definindo : $\vec{D}(\vec{r}) \equiv \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$: deslocamento elétrico (115.1)

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f(\vec{r}) : \text{Lei de Gauss} \quad (115.2)$$

pr meios dielétricos

Eq. (115.2) na forma integral :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \quad (115.3)$$

\hookrightarrow carga livre \subset volume V
total \quad definido por S .

i.e., o fluxo \vec{D} através superfície fechada \sim apenas cargas elétricas livres.

\hookrightarrow eq. fundamentais eletrostática pr meios dielétricos :

$$- \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f(\vec{r}) \quad (115.4)$$

$$- \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Obs. : vetor deslocamento elétrico = campo vetorial auxiliar

notas :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \vec{P} \quad (115.5)$$

Eqs. (115.1), (115.5) \oplus Teorema de Helmholtz (38.1):

$$\hookrightarrow \vec{D}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_f(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \vec{P}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \right) \quad (116.1)$$

notas:

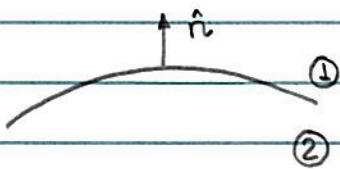
Eq. (115.3) indica que, em princípio, apenas cargas livres são fontes p/ \vec{D} .

entretanto, teorema de Helmholtz mostra que $\vec{\nabla} \times \vec{P} \neq 0$ também contribui p/ \vec{D} .

\hookrightarrow Comparar Eqs. (38.3) e (116.1) e notar \neq entre \vec{E} e \vec{D} .

• condições de contorno p/ vetor auxiliar \vec{D} .

considerar superfície $S =$ interface entre regiões 1 e 2



Lembrar condições de contorno p/ $\vec{E}(\vec{r})$, Eq. (42.1)

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \sigma_f(\vec{r}) / \epsilon_0 \quad (1)$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (2)$$

de modo análogo à discussão p/ $\vec{E}(\vec{r})$, verifica-se que

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f(\vec{r}) \quad : \quad \text{equivalente (1)}$$

(116.2)

$$\hat{n} \times (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \hat{n} \times (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) \quad : \quad \text{" (2)}$$

• Dielétricos lineares.

Lembrar considerações microscópicas iniciais:

momento de dipolo induzido $\vec{p} \propto \vec{E}$

como a polarização $\vec{P}(\vec{r}) = \Delta\vec{p} / \Delta v$

$\hookrightarrow \vec{P} \propto \vec{E}$

De fato, p/ campos elétricos "pequenos", temos que

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (117.1)$$

\hookrightarrow susceptibilidade
elétrica do material :-cte adimensional;
- propriedade do material.

Dielétrico descrito pela relação constitutiva (117.1): dielétrico
linear

importante: \vec{E} em (117.1): $\vec{E}_{TOTAL} \sim$ cargas livres e ligadas.

\hookrightarrow interessante utilizar vetor auxiliar \vec{D} .

p/ dielétrico linear, temos que

$$\text{Eq. (115.1)}: \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

definindo:

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) : \text{permissividade} \quad (117.2)$$

material

$\hookrightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r})$: p/ meios lineares (118.1)

podemos definir

$\kappa \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1 + \chi_e)$: permissividade relativa ou cte dielétrica (118.2)

Ex.:	vácuo	He	Ar	Si
κ	1	1.000065	1.00054	11.8

Obs.: cte dielétrica κ : quantidade macroscópica característica do material.

generalização (117.1) p/ caso direções perturbacões \vec{E} e resposta $\vec{P} \neq s$:

$\vec{P} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi} \vec{E}$ (118.3)

\searrow tensor de susceptibilidade

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

Obs.: p/ meios não-lineares, a eq. constitutiva (117.1) assume, c.g., a forma

$P_i = \epsilon_0 (\chi_{ij} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots)$

Ex.: considerar carga pontual q em um meio dielétrico linear; determinar $\vec{E}(\vec{r})$.

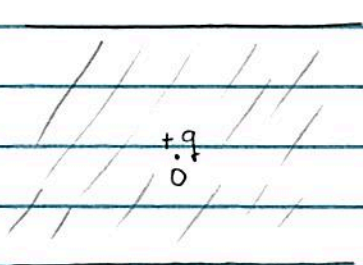


Fig. A

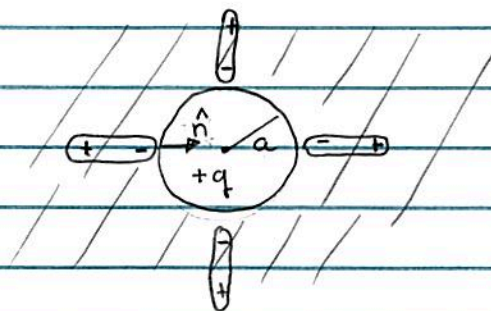


Fig. B

hipótese: $+q$ @ origem

como p/ q e vácuo $\vec{E} = E(r) \hat{n}$ e \vec{D}, \vec{P} e \vec{E} saõ $\parallel \rightarrow \vec{D} = D(r) \hat{n}$

Eq. (115.3):
$$\oint_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = q_f$$

simetria sistema $\rightarrow S =$ esfera raio r , centro = origem

$\hookrightarrow \oint_S D(r) \hat{n} \cdot (ds \hat{n}) = 4\pi r^2 D(r) = q_f = q$

$\hookrightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} q \hat{n}$

Como $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon} \frac{q \hat{n}}{r^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \kappa} \frac{\hat{n}}{r^2}$ (119.1)

além disso, como $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \rightarrow \vec{P}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \frac{\hat{n}}{r^2}$

notas:

$E = \frac{1}{\kappa} E_{vac} < E_{vac} !$ (*)

É fácil verificar que (*) \sim polarização do meio. (Reitz)

notas: $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -q \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \delta(\vec{r}) = 0, \vec{r} \neq 0$

entretanto, \exists cargas superficiais de polarizaçã na "superfície" da carga pontual.

Se $a =$ "raio da carga pontual", temos que

$$Q_{\text{bound}} = Q_p = \lim_{a \rightarrow 0} 4\pi a^2 \left(\hat{n} \cdot \vec{P} \right) \Big|_{r=a} = \lim_{a \rightarrow 0} 4\pi a^2 \frac{(-q)}{4\pi a^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

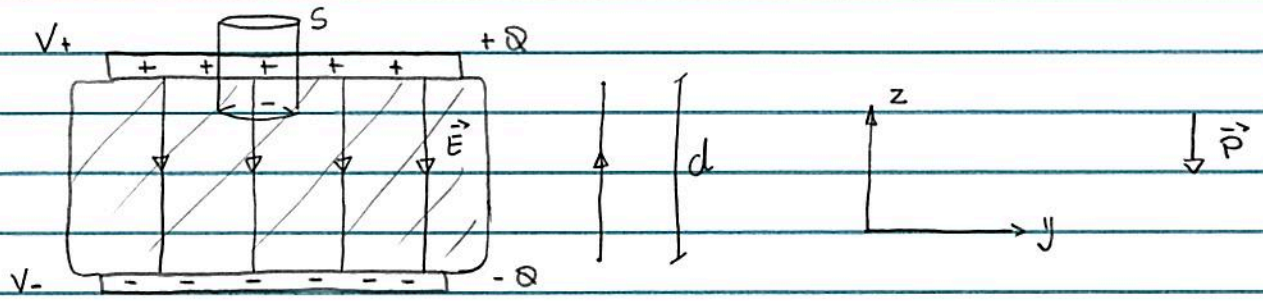
notas sentido \hat{n} em Fig. 3

$$\hookrightarrow Q_p = -q \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

$$\hookrightarrow Q_p + q = \frac{1}{\kappa} q$$

notas (119.1) = campo elétrico carga pontual q/κ em $\vec{r} = 0$!

Ex. 2: capacitor placas planas e $\epsilon = \epsilon_0 \oplus$ dielétrico linear, cte dielétrico κ ; determinar capacitância.



Lei de Gauss (115.3) p/ sup. S = cilindro:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{BASE}} (-D\hat{z}) \cdot (-dS\hat{z}) = S \cdot D = q_f = \sigma_f S \rightarrow \vec{D} = -\sigma_f \hat{z}$$

Como $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_f}{\epsilon} \hat{z}$

$V \equiv V_+ - V_- = -\int_{-d}^+ \vec{E} \cdot d\vec{e} = +\frac{\sigma_f}{\epsilon} \int_0^d \hat{z} \cdot (dz \hat{z}) = \frac{\sigma_f d}{\epsilon}$

se $A = \text{área placa capacitor} \rightarrow V = \frac{1}{\epsilon} \frac{Q_f d}{A}$

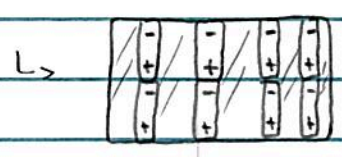
$\hookrightarrow Q = \frac{\epsilon A}{d} V \rightarrow C = \frac{\epsilon A}{d} = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d} = \kappa C_{\text{v\u00e1cuo}}$

notas : capacit\u00e2ncia aumenta fctm κ w.r.t. $C_{\text{v\u00e1cuo}}$

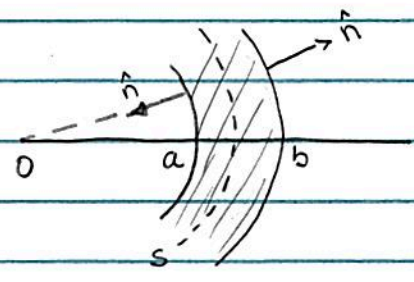
como $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = -\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \sigma_f \hat{z}$

$\hookrightarrow \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad \sigma_p(z=0) = (-\hat{z}) \cdot \vec{P} = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \sigma_f > 0$

$\sigma_p(z=d) = (+\hat{z}) \cdot \vec{P} = -\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \sigma_f < 0$



Ex. 3 : exemplo 4.5.6. : esfera met\u00e1lica, raio a , carga Q
 \oplus camada esf\u00e9rica, raios a e b , $a < b$,
material diel\u00e9trico linear, cte diel\u00e9trica κ .
Determinar polariza\u00e7\u00e3o $\vec{P}(\vec{r})$ da
camada



por simetria, $\vec{E} = E(r) \hat{n}$, $\vec{D} = D(r) \hat{n}$ e $\vec{P} = P(r) \hat{n}$

Lei de Gauss (115.3) p/ sup S. = esfera raio r, centro = 0

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 D(r) = Q_f = Q, \text{ p/ } a < r < b$$

$$\hookrightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\text{Como } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}$$

Como esfera metálica $\rightarrow \vec{E} = \vec{D} = \vec{P}(\vec{r}) = 0, r < a$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}, & a < r < b \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > b \end{cases} \quad (122.1)$$

$$\text{Eq. (117.1)} : \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\hookrightarrow \vec{P}(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}, \quad a < r < b$$

$$\hookrightarrow \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{\epsilon} \delta(\vec{r}) = 0 \text{ p/ } a < r < b$$

$$\sigma_p(r=a) = \hat{n} \cdot \vec{P} = (-\hat{n}) \cdot \vec{P} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon a^2} = -\chi_e Q \frac{1}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_p(r=b) = \hat{n} \cdot \vec{P} = (+\hat{n}) \cdot \vec{P} = +\frac{\epsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \epsilon b^2} = +\chi_e Q \frac{1}{4\pi b^2}$$

notar sinais σ_p em $r=a$ e $r=b$!

Problemas de valores de contorno na presença de dielétricos,

Lembrar eqs. da eletrostática p/ dielétricos, Eq. (115.4):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0,$$

em particular, p/ meios lineares $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\epsilon \nabla^2 V$$

$$\uparrow$$

pois $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$$\hookrightarrow \nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon} \rho_f(\vec{r})$$

em particular, na ausência de cargas livres:

$$\nabla^2 V = 0,$$

(123.1)

i.e., $V = V(\vec{r})$ satisfaz a Eq. de Laplace,

\hookrightarrow procedimentos utilizados no cap. anterior podem ser empregados p/ determinar $V = V(\vec{r})$. \oplus
condições de contorno (116.2), i.e.,

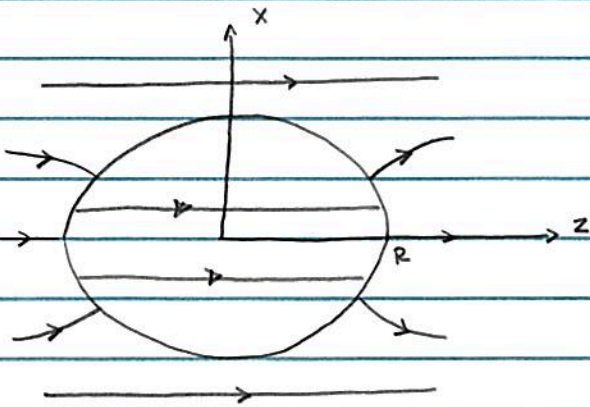
$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \quad \rightarrow \quad \hat{n} \cdot (\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2) = \sigma_f$$

$$\text{ou} \quad \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = -\sigma_f$$

$$\text{e Eq. (42.1)} : \quad V_1 = V_2$$

Ex.: Exemplo 4.7 G. : consideramos esfera, raio R , material dielétrico linear, centro = origem, sob campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{z}$.

Determinar $v(\vec{r})$.



notas interior esfera:
 \vec{E} uniforme

condições de contorno: $V_{in}(R, \theta) = V_{out}(R, \theta)$

$$\epsilon \frac{\partial V_{in}}{\partial r} \Big|_R = \epsilon_0 \frac{\partial V_{out}}{\partial r} \Big|_R$$

$$V_{out}(r \gg R, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$$

Como o sistema apresenta simetria azimutal
 a solução geral = Eq. (80.2).

temos que: $V_{in}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} A_l r^l P_l(\cos \theta)$

$$V_{out}(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

- notas:

$$V(r \gg R, \theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta)$$

$$\hookrightarrow A_1 = -E_0 \quad \text{e} \quad A_l = 0, \quad l \neq 1$$

$$\hookrightarrow V_{out}(r, \theta) = -E_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_{l \geq 0} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$- V_{in}(R, \theta) = \sum_{l \geq 0} A'_l R^l P_l(\cos\theta) = V_{out}(R, \theta) = -E_0 R P_1(\cos\theta)$$

$$+ \sum_{l \geq 0} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$\hookrightarrow A'_l = -E_0 + \frac{B_l}{R^3} \quad \text{e} \quad A'_l = \frac{B_l}{R^{2l+1}}, \quad l \neq 1. \quad (125.1)$$

$$- \frac{\partial V_{in}}{\partial n} = \sum_{l \geq 1} l A'_l r^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{\partial V_{out}}{\partial n} = -E_0 P_1(\cos\theta) + \sum_{l \geq 1} (l+1) \frac{B_l}{r^{l+2}} P_l(\cos\theta)$$

$$\epsilon \left. \frac{\partial V_{in}}{\partial n} \right|_R = \epsilon_0 \left. \frac{\partial V_{out}}{\partial n} \right|_R$$

$$\hookrightarrow \epsilon A'_l = -\epsilon_0 \left(E_0 + \frac{2B_l}{R^3} \right) \rightarrow -\kappa A'_l = E_0 + \frac{2B_l}{R^3}$$

$$\kappa l A'_l = (l+1) \frac{B_l}{R^{2l-1}}, \quad l \neq 1 \quad (125.2)$$

$$(125.1) \text{ e } (125.2) \xrightarrow{\text{(exercício)}} A'_l = B_l = 0, \quad l \neq 1$$

$$A'_1 = -\frac{3}{\kappa+2} E_0$$

$$B_1 = E_0 R^3 \frac{\kappa-1}{\kappa+2}$$

$$\hookrightarrow V_{in}(r, \theta) = - \frac{3E_0 r \cos \theta}{\kappa+2} = - \frac{3E_0 z}{\kappa+2}$$

(126.1)

$$V_{out}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{(\kappa-1) R^3 E_0 \cos \theta}{\kappa+2 r^2}$$

- p/ $r < R$:

$$\vec{E}_{in} = -\vec{\nabla} V_{in} = - \frac{\partial V_{in}}{\partial z} \hat{z} = + \frac{3E_0 z}{\kappa+2} = \frac{3E_0}{\kappa+2} \hat{z} : \text{UNIFORME!}$$

como $\kappa > 1 \rightarrow E_{in} < E_0$

$$\vec{D}_{in} = \epsilon \vec{E}_{in} = \frac{3\epsilon}{\kappa+2} \vec{E}_0$$

$$\hookrightarrow \vec{P} = \vec{D}_{in} - \epsilon_0 \vec{E}_{in} = \frac{3\epsilon_0 (\kappa-1)}{\kappa+2} \vec{E}_0 : \text{uniforme}$$

$$\hookrightarrow \rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_p(\theta) = \hat{n} \cdot \vec{P} \\ = \hat{n} \cdot \vec{P} = \frac{3\epsilon_0 (\kappa-1)}{\kappa+2} E_0 \cos \theta$$

como a polarização é uniforme

$$\hookrightarrow \vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{P} = \frac{4\pi\epsilon_0 (\kappa-1)}{\kappa+2} R^3 \vec{E}_0 : \text{momento de dipolo esfera} \quad (126.2)$$

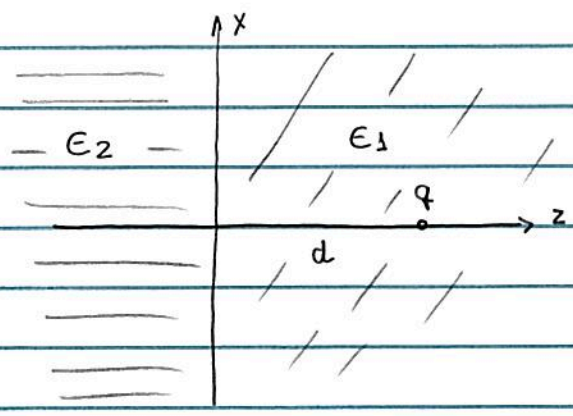
Comparando-se Eqs. (126.1) e (126.2), vemos que

$$V_{out}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$\underbrace{\quad}_{V \sim \text{campo externo } \vec{E}_0} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{V \sim \text{dipolo } \vec{p} \text{ em } \vec{r} = 0!}$

Ex.: Exemplo 4.8.6. modificado (veja Sec. 4.4, Jackson):

carga pontual q em $\vec{r} = d\hat{z}$ \oplus
 meio dieletrico linear ϵ_1 $p/ z > 0$
 " " " ϵ_2 $p/ z < 0$. Determinar $V = V(\vec{r})$.



$$\rho_f(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - d\hat{z})$$

temos que: $\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_1} \rho_f(\vec{r})$, $z > 0$

$$\nabla^2 V = 0, \quad z < 0$$

(127.1)

\oplus condições de contorno: $V_1(\rho, \phi, z=0) = V_2(\rho, \phi, z=0)$

$$\epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Sol. (127.1) via método de imagens.
 notas similitudes sistema $q \oplus$ plano condutor ∞ (veja pg. 84)
 entretanto, $\exists \neq s!$

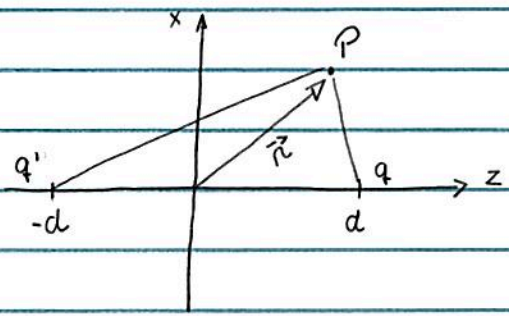
2 casos,

(i) $z > 0$,

ideia método de imagens: introduzir carga imagem q' em $\vec{r} = -d\hat{z}$

$$\hookrightarrow V_1(\vec{r}) = V_1(p, \rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{\rho^2 + (z+d)^2}} \right), z > 0 \quad (128.1)$$

↑
NOTAR!



notas: $q' \notin z > 0$: região de validade (128.1)

(ii) $z < 0$

simetria sistema \rightarrow carga imagem q'' em $\vec{r} = d\hat{z}$

$$\hookrightarrow V_2(\vec{r}) = V_2(p, \rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \cdot \frac{q''}{\sqrt{\rho^2 + (z-d)^2}}, z < 0 \quad (128.2)$$

↑
NOTAR!

novamente: $q'' \notin z < 0$: região de validade (128.2)

sobre as condições de contorno,

$$\cdot V_1(p, z=0) = V_2(p, z=0) \rightarrow \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q''$$

$$- \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q(d-z)}{(p^2 + (d-z)^2)^{3/2}} - \frac{q'(d+z)}{(p^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{(d-z)}{(p^2 + (d-z)^2)^{3/2}} q''$$

$$\hookrightarrow \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \rightarrow q - q' = q''$$

$$\hookrightarrow q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad \text{e} \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad (129.1)$$

caso particular (Griffiths) : $\epsilon_1 = \epsilon_0$
 $\epsilon_2 = \epsilon$

$$\text{Eq. (129.1)} : q' = - \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + \epsilon_0} q = q_b \quad \text{e} \quad q'' = \frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} q$$

$$= \frac{\epsilon}{\epsilon_0} (q + q_b)$$

notas:

$$(i) \sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{P} = \hat{z} \cdot (\epsilon_0 \chi_e \vec{E}(p, z=0)) = -\epsilon_0 \chi_e \frac{\partial V_2}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$= -\epsilon_0 \underbrace{\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0} \right)}_{\chi_e} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{d}{(p^2 + d^2)^{3/2}} \cdot \frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_0} q$$

$$\hookrightarrow \sigma_p(p) = - \frac{1}{2\pi} \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{q d}{(p^2 + d^2)^{3/2}} \quad ; \quad \text{densidade superficial de cargas ligadas}$$

(ii) Força dielétrica sob carga q .

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{(2d)^2} \hat{z} = \frac{(-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\epsilon - \epsilon_0) q^2}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{\hat{z}}{4d^2}$$

• Energia potencial eletrostática na presença meio dielétrico,

Lembrar definição energia potencial eletrostática:

trabalho realizado por uma força externa p movimentar carga q de ∞ até posição \vec{r} cujo potencial (associado a uma certa distribuição de cargas) é $V(\vec{r})$.

vamos proceder de forma análoga ao exemplo discutido na pg. 44 e consideramos o processo de montagem da distribuição de cargas livres (apenas) na presença meio dielétrico.

consideramos que $\rho_f(\vec{r}) \rightarrow \rho_f(\vec{r}) + \delta\rho_f(\vec{r})$ (*)

$$\hookrightarrow \delta W = \int d^3r \delta\rho_f(\vec{r}) V(\vec{r}) \quad : \quad W_{ext} \quad p/ (*) \quad (130.1)$$

$$\text{como } \delta\vec{D} = \vec{D} - \vec{D}_0 \rightarrow \nabla \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) = \nabla \cdot \vec{D} - \nabla \cdot \vec{D}_0 = \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \\ = \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D})$$

$$\text{e } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\hookrightarrow \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}) = \delta\rho_f$$

temos que

$$\delta W = \int d^3n \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) v(\vec{n})$$

como $\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D} v) = \delta \vec{D} \cdot \vec{\nabla} v + v \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D})$

$$\hookrightarrow \delta W = \underbrace{\int d^3n \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D} v)} - \underbrace{\int d^3n \delta \vec{D} \cdot \vec{\nabla} v}$$

Teorema de Gauss $\rightarrow \oint_S v \delta \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int d^3n \delta \vec{D} \cdot \vec{E}$

$$= 0, \text{ pois } v \sim 1/n$$

$$D \sim 1/n^2$$

$$\hookrightarrow \delta W = \int d^3n \delta \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (131.1)$$

caso particular: meio dielétrico linear:

$$\text{nesse caso: } \frac{1}{2} \delta(\vec{D} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \delta \vec{D} \cdot \vec{E} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \delta \vec{E}} = \delta \vec{D} \cdot \vec{E}$$

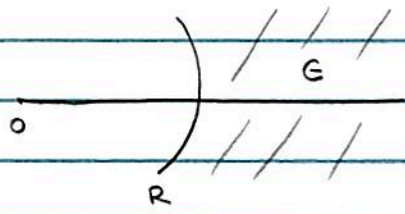
$$\frac{1}{2} \epsilon \vec{E} \cdot \frac{1}{\epsilon} \delta \vec{D}$$

$$\text{Eq. (131.1): } \delta W = \int d^3n \frac{1}{2} \delta(\vec{D} \cdot \vec{E}) = \delta \left(\frac{1}{2} \int d^3n \vec{D} \cdot \vec{E} \right)$$

$\hookrightarrow U = \frac{1}{2} \int d^3n \vec{D}(\vec{n}) \cdot \vec{E}(\vec{n})$: energia (potencial) eletrostática armazenada em um sistema de cargas livres em repouso em meio dielétrico linear (131.2)

Ex. 1: Considerar esfera metálica, raio R , centro = origem, em meio dielétrico linear ϵ .

Determinar a energia eletrostática do sistema



Q : carga esfera

nesse caso:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}, & r > R \end{cases} \quad \text{e} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}, & r > R \end{cases}$$

Eq. (131.2) :
$$U = \frac{1}{2} \int \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \right) \cdot \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r} \right) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{2\epsilon} \cdot \left(\frac{Q}{4\pi} \right)^2 \underbrace{\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}}_{+1/R} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta}_{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi$$

$\hookrightarrow U = \frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{Q^2}{R}$ (132.1)

Obs.: Em princípio, Eq. (46.1) poderia ser utilizada p/ determinar a energia eletrostática do sistema. Em particular, p/ o Ex. 1 acima, temos que

$$U' = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r E^2(\vec{r}) = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{Q^2}{R} < (132.1)$$

Diferença: (131.2) inclui efeitos de polarização do meio (notar $V(\vec{r})$ considerado em (130.1)).

Ex. 2: capacitor placas planas e \parallel \oplus dielétrico linear,
cte dielétrica κ

Vimos que (veja pg. 120)

$$\vec{D} = -\sigma_f \hat{z} \quad e \quad \vec{E} = -\frac{\sigma_f}{\epsilon} \hat{z}$$

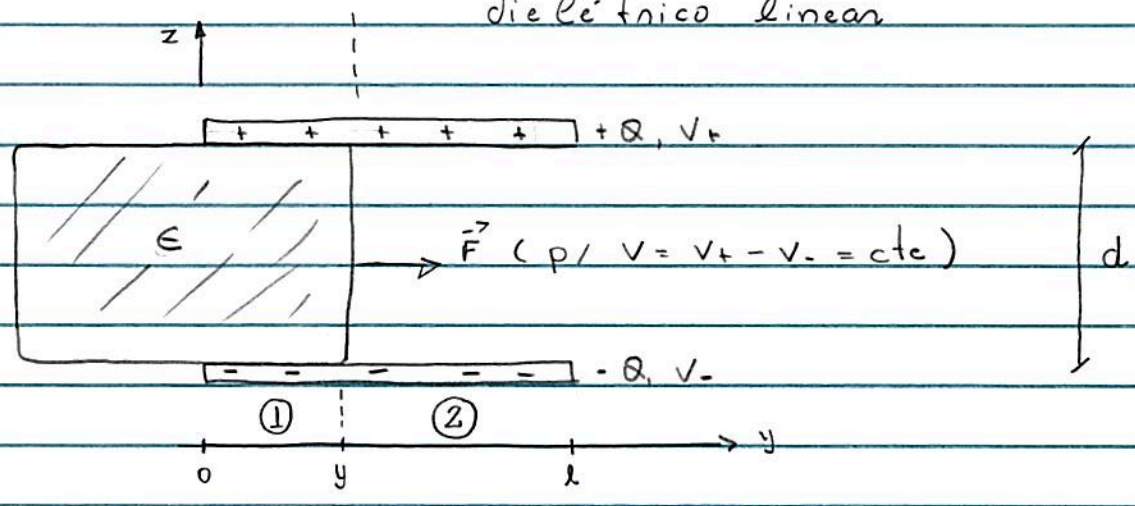
$$\text{Eq. (133.2)} : U = \frac{1}{2} \int d^3n \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \sigma_f^2 \frac{1}{\epsilon} \int d^3n$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A^2} \frac{Ad}{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon A/d} \quad (133.1)$$

notar: Eq. (133.1) similar Eq. (58.1) (capacitor \oplus vácuo)
se considerarmos a capacitância do
sistema $C = \frac{\epsilon A}{d}$

Força sob dielétricos (Reitz).

consideran sistema : capacitor placas planas e // \odot
dielétrico linear



hipótese : $V = V_+ - V_- = \text{cte.}$

nesse caso, verifica-se que $\exists \vec{F} = F_y \hat{j}$ que atua o dielétrico p/ interior do capacitor.

ideia : utilizam o conceito de energia potencial eletrostática p/ determinan força \vec{F} .

vamos consideran 2 casos distintos :

(i) sistema isolado

consideran sistema = condutores \odot cargas pontuais
 \odot dielétricos tal que
carga total = cte.

se parte / partes do sistema são deslocados de $d\vec{u}$

↳ $dW_{\text{mec}} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$: W mecânico feito pelo sistema

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

como o sistema está isolado:

$$dW_{\text{mec}} + dU = 0 \quad (135.1)$$

↳ variação energia eletrostática do sistema

$$\text{↳ } -dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\text{↳ } F_\alpha = - \left(\frac{\partial U}{\partial r_\alpha} \right)_Q ; \alpha = x, y, z \quad (135.2)$$

↳ indica sistema isolado,
i.e., $Q_{\text{TOTAL}} = \text{cte}!$

(ii) sistema \oplus fonte externa (e.g., bateria)

Ex.: condutores conectados bateria tal que $V_{\text{cond}} = \text{cte}$.

nesse caso, Eq. (135.1)

$$\text{↳ } dW_{\text{mec}} + dU = dW_{\text{ext}} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{energia fornecida} \\ \text{(e.g., bateria)} \end{array} \quad (135.3)$$

Lembrar Eq. (45.1):

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

o sistema é modificado, tal que $V_i = \text{cte}$

$$\hookrightarrow dU = \frac{1}{2} \sum_i v_i dq_i$$

por outro lado, fonte externa fornece energia p/
dq: $v=0 \rightarrow v=v_i$. Eq. (43.2)

$$\hookrightarrow dW_{ext} = \sum_i v_i dq_i \rightarrow dW_{ext} = 2dU$$

$$\text{Eq. (135.3)} : dW_{mec} = dU$$

de modo análogo ao caso (i): $F_\alpha = + \left(\frac{\partial U}{\partial n_\alpha} \right)_v$ (136.1)

índice $v_i = \text{cte!}$ ↗

Ex. 1: Considerar sistema pg. 134

hipóteses: dimensão placa direção y: l

" " " " x: w

$$v = v_+ - v_- = \text{cte}$$

$$\sigma_f \equiv \sigma$$

Vimos que:

$$\vec{D} = -\sigma \hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{E} = \begin{cases} -\sigma/\epsilon \hat{z}, & \text{região 1} \\ -\sigma/\epsilon_0 \hat{z}, & \text{" 2} \end{cases}$$

Eqs. (46.1) e (131.2):

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{D} \cdot \vec{E} d^3r + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{V_2} E^2 d^3r$$

como $v = \text{cte}$, temos que $v = Ed$ p/ ① e ②

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow U &= \frac{1}{2} \epsilon \int_{V_1} E^2 d^3r + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{V_2} E^2 d^3r \\
 &= \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 \underbrace{(wyd)}_{V_1} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2 \underbrace{(wd(l-y))}_{V_2} \\
 &= \frac{1}{2} wd \left(\frac{V}{d}\right)^2 (\epsilon y + \epsilon_0(l-y))
 \end{aligned}$$

$$\text{Eq. (136.1)} : F_y = + \frac{dU}{dy} = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) wd \left(\frac{V}{d}\right)^2 > 0 !$$

Ex. 2 : considerar sistema pg. 134 \oplus hipótese $Q = \text{cte} !$

nesse caso :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{D} \cdot \vec{E} d^3r + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{V_2} E^2 d^3r \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sigma \cdot \sigma}{\epsilon} (wyd) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 (wd(l-y)) \\
 &= \frac{1}{2} \sigma^2 wd \left(\frac{1}{\epsilon} y + \frac{1}{\epsilon_0} (l-y)\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Eq. (135.2)} : F_y = - \left(\frac{dU}{dy}\right)_Q = -\frac{1}{2} \sigma^2 wd \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma^2 wd \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon \epsilon_0} > 0$$

Obs. : \vec{F} sob dielétrico \sim campo elétrico nas bordas placas capacitor, veja discussão Sec. 4.4, Griffiths.

Alternativa determinação força sob dielétrico:

considerar dielétrico polarização $\vec{P}(\vec{r})$ sob campo elétrico $\vec{E}_0(\vec{r})$.

como dielétrico pode ser descrito como um conjunto de dipolos, Eq. (105.3) indica que

$$\vec{F} = \int d^3r (\rho_f(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_0(\vec{r}) \quad (138.1)$$

\hookrightarrow ~ cargas livres eventualmente presentes.

pr Exs. 1 e 2 acima,

$$\vec{F} = \underbrace{\int_{\text{VOLUME CAPACITOR}} d^3r (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_0}_{= 0, \text{ pois } \vec{E}_0 \text{ uniforme}} + \underbrace{\int_{\text{VOLUME BORDA}} d^3r (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_0}_{\neq 0!}$$