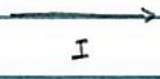
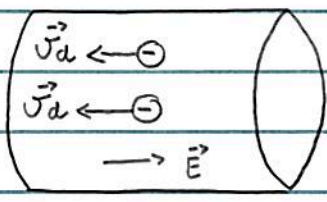
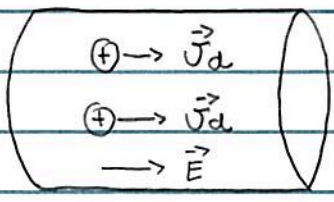


• corrente elétrica ~ movimento cargas positivas e/ou negativas



\vec{v}_d : velocidade de deriva das cargas livres

notas (A) e (B) : movimento cargas positivas esquerda p/ direita

↳ Definição:

(i) corrente elétrica I : mov. cargas positivas (convenção)

(ii) intensidade I : carga elétrica (positiva) líquida que atravessa seção transversal área A / tempo, i.e.,

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{140.1}$$

unidade (SI) : $[I] = \frac{1C}{1s} = 1A$ (ampère)

• Densidade de corrente,

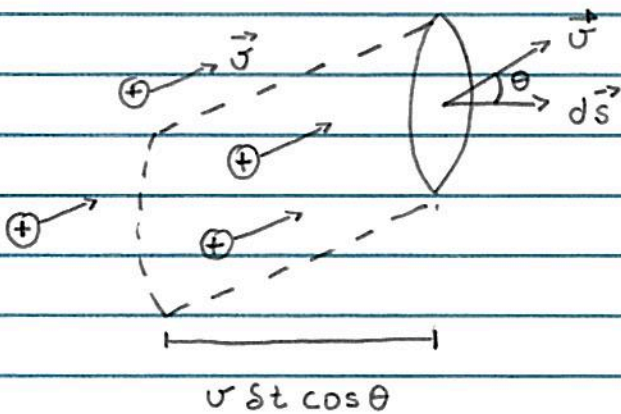
considerar corrente elétrica em um condutor

~ 1 único tipo de carga livre = 1 único tipo de portador de carga

seja N : concentração de portadores = # cargas livres/volume

$\vec{v}_d \equiv \vec{v}$: velocidade de deriva dos portadores

ideia: determinar a quantidade de carga δQ que atravessa área $d\vec{s}$ no intervalo de tempo δt :



δQ = carga q volume do cilindro

$$\hookrightarrow \delta Q = q \cdot N \cdot (v \delta t \cos \theta ds)$$

↳ carga portador

$$\hookrightarrow dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = q N \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (141.1)$$

Definindo:

$$\vec{J} = q N \vec{v} : \text{(vetor) densidade de corrente elétrica} \quad (142.1)$$

$$\hookrightarrow dI = \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

pt/ uma superfície S arbitrária, temos que

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (142.2)$$

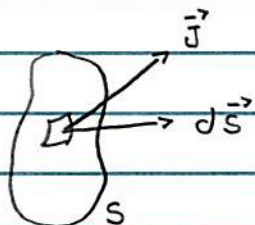
Alternativa: se $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$: campo (vetorial) de velocidades que descreve o movimento da densidade de cargas $\rho(\vec{r}, t)$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (142.1)} : \vec{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (142.3)$$

notas:

- interpretação (142.3): $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$: campo vetorial

- " (142.2): intensidade da corrente elétrica
 $I = \text{fluxo } \vec{J} \text{ através sup. } S$



- J : corrente / área!

caso geral: se $i=1, 2, \dots, M$ tipos de portadores

$$\hookrightarrow \text{Eq. (141.1)} : dI = \sum_{i=1}^M q_i N_i \vec{v}_i \cdot d\vec{s}$$

$$\text{Eq. (142.1)}: \quad \vec{J} = \sum_{i=1}^M q_i N_i \vec{v}_i \quad (142.1)$$

• Eq. (142.2): permite expressar princípio de conservação da carga elétrica:

considerar superfície S fechada e volume V definido por S :

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

↑
Teorema de Gauss

por outro lado, como a carga é conservada

$$I = - \frac{dQ}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\vec{r}, t) = - \int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

↑ quantidade de carga que sai volume V

↑ ρ / volume V fixo

$$\hookrightarrow \int_V d^3r (\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}) = 0$$

como volume V é arbitrário

$$\hookrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad : \text{ equação de continuidade} \quad (143.1)$$

caso particular: se $\rho = \rho(\vec{r})$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad : \text{ condição } \rho \text{ } \underline{\text{constante}} \text{ } \underline{\text{estacionária}} \quad \vec{J} \neq \vec{J}(t) \quad (143.2)$$

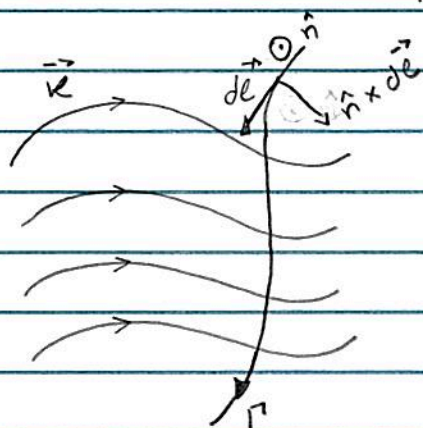
Obs.: se o movimento dos portadores restrito superficie, e interessante introduzir uma densidade superficial de corrente \vec{k} :

$$\text{Eq. (142.3)} \rightarrow \vec{k} = \sigma \vec{U}$$

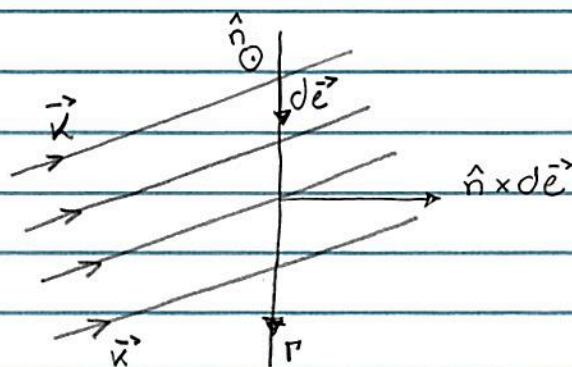
\hookrightarrow densidade superficial de cargas

(144.1)

$$\text{Eq. (142.2)} \rightarrow I = \int_{\Gamma} \vec{k} \cdot (\hat{n} \times d\vec{e}) = \int_{\Gamma} d\vec{e} \cdot (\vec{k} \times \hat{n})$$



ou



Ex.: consideramos N cargas pontuais q_α cujas trajetórias são dadas por $\vec{r}_\alpha(t)$.

Determinar $\rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

pr/ cargas pontuais, temos que

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha(t))$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{\alpha} q_\alpha \frac{\partial \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)}{\partial t}$$

$$\text{pr/ } \alpha \text{ fixo: } \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r_{\alpha,i}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha,i}} = \vec{v}_\alpha \cdot \vec{\nabla}_\alpha$$

Como $\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) = -\vec{v}_\alpha \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$$

$$= - \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \right)$$

pois $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{J}(\vec{r}, t)$$

• Lei de Ohm: condutividade e resistividade,

verifica-se que p/ certos materiais, em um certo intervalo de campos elétricos:

$$\vec{J} \propto \vec{E}$$

ou

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad : \text{Lei de Ohm} \quad (145.1)$$

→ condutividade do material (propriedade do material)

σ depende: material,
temperatura,
but not \vec{E} !

interpretação (145.1): a resposta do material (movimento de cargas $\sim \vec{J}$) é linearmente proporcional à perturbação externa (campo elétrico)

Obs. (145.1): $\sigma =$ escalar, ok p/ materiais isotrópicos
 $\sigma =$ etc, " " " homogêneos

p/ condutores $\sigma \gg 1$

p/ isolantes $\sigma \ll 1$

↳ meio/material descrito pela relação constitutiva (145.1):
meio ôhmico ou meio linear isotrópico.

Obs.: caso geral, meio isotrópico, não linear:

$$\vec{J} = \sigma(E) \vec{E}$$

é interessante definir a resistividade do material:

$$\rho = 1/\sigma \quad (145.2)$$

$$\text{Eq. (145.1)} \rightarrow \vec{E} = \rho \vec{J} \quad (145.3)$$

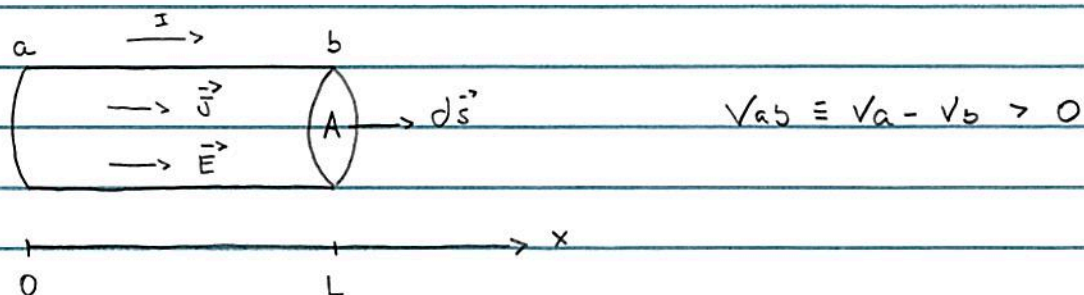
unidades (SI):

$$[\rho] = \frac{[E]}{[J]} = \frac{V}{m} \cdot \frac{m^2}{A} = \frac{V \cdot m}{A} = \Omega \cdot m \quad L \sim \text{ohm}$$

$$\hookrightarrow [\sigma] = (\Omega \cdot m)^{-1}$$

	Al, Cu, Fe	Ge	Si	Quartz (SiO ₂)	
$[\rho]$	$\sim 10^{-8}$	0.46	$\sim 10^3$	$\sim 10^{13}$	$\Omega \cdot m$
(T = 20°C)					

Ex. 1: consideramos cilindro condutor ôhmico, área A, comprimento L ⊕ corrente estacionária I; determinamos relação entre V e I.



$$\text{como } \vec{J} = J \hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E} \propto \hat{x}$$

⊕ geometria: $\vec{E} = E \hat{x}$: uniforme!

$$\hookrightarrow V_{ab} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_0^L (E \hat{x}) \cdot (dx \hat{x}) = EL$$

por outro lado,

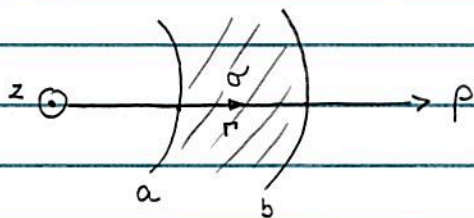
$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_s (J \hat{x}) \cdot (ds \hat{x}) = JA$$

$$\hookrightarrow V_{ab} = EL = \frac{1}{\sigma} J L = \frac{1}{\sigma} \frac{I}{A} L = \left(\frac{\rho L}{A} \right) I \equiv RI$$

\hookrightarrow resistência do dispositivo

unidade (SI) : [R] : Ohm

Ex. 2: consideran 2 cilindros metálicos concêntricos, raios a e b , comprimento L e meio ôhmico σ



hipóteses : - $V_{ab} = V_a - V_b = cte$

- corrente I

cil. $a \rightarrow$ cil. b

Determinan R dispositivo

Lembran que : $\vec{E}(p) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 p} \hat{p}$; $a < p < b$
 Q : carga cilindro a

$$\hookrightarrow V_{ab} = \int_{a,r}^b \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_a^b \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 p} \hat{p} \cdot (dp \hat{p}) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

por outro lado,

$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sigma \int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma \int \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 p} \hat{p} \cdot (p dt dz \hat{p})$$

\hookrightarrow cilindro raio p , comp. L

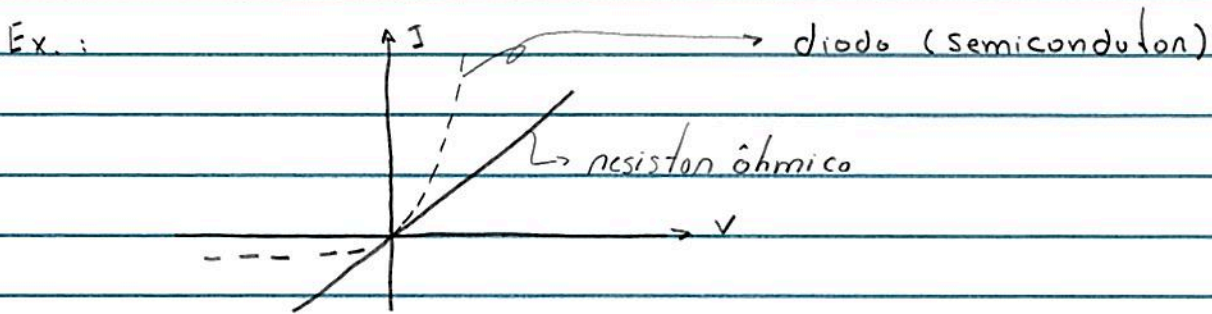
$$I = \frac{\sigma Q/L}{2\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz = \frac{\sigma Q}{\epsilon_0}$$

$$\hookrightarrow V_{ab} = V = \frac{I}{2\pi \sigma L} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{\sigma Q}{\epsilon_0}\right)}_I \quad \text{ou} \quad R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

notas Exs. 1 e 2: $R \propto$ material \oplus geometria dispositivo

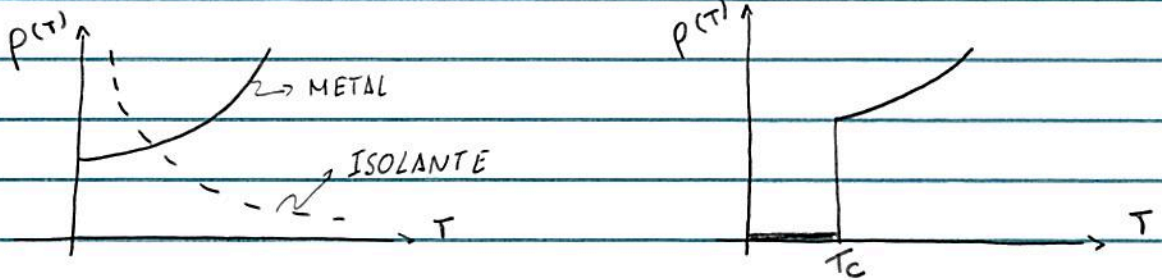
$\hookrightarrow R = \frac{V}{I}$: definição geral resistência (inclui materiais não-lineares)

\hookrightarrow Definição resistor: dispositivo c/ R bem definido!



Obs.: a resistividade de um material $\rho = \rho(T)$.

Ex.:



superconductor: $\rho = 0, T < T_c$
 T_c : temperatura crítica

• Considerar carga dq se movimentando através $V_{ab} = V$

↳ $dW = dq V$: trabalho feito pelo campo \vec{E} sob dq

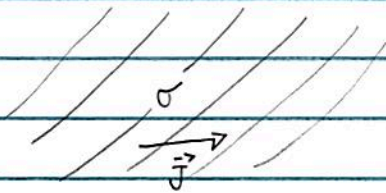
pr intervalo de tempo dt :

↳ $P = \frac{dW}{dt} = V \frac{dq}{dt} = VI$: potência dissipada calor
(veja modelo microsc. pg. 145.9)

↳

• correntes estacionárias em meios lineares,

considerar meio linear (ôhmico) ⊕ corrente estacionária \vec{j}



temos que : $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$: eq. constitutiva meio

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

↳ $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \sigma(\vec{r}) = 0$

se $\sigma = \text{cte}$ $\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ } $\rightarrow \nabla^2 \phi = 0$: Eq. de Laplace (145.4)

como $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$

notar analogia c/ eletrostática : métodos cap. 3

↳ determinação $\phi \rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{j}$!

nesse caso : sol. Eq. (145.4) ⊕ condições de contorno:

c.c. p/ vetor auxiliar \vec{D} :

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f \xrightarrow[\text{LINEAR}]{\text{MEIO}} \hat{n} \cdot (\epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_2 \vec{E}_2) = \sigma_f$$

c.c. p/ densidade de corrente \vec{J} :

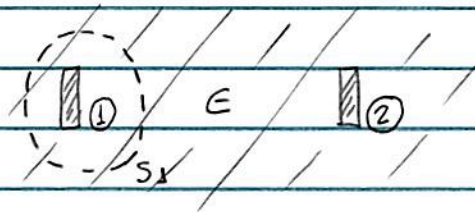
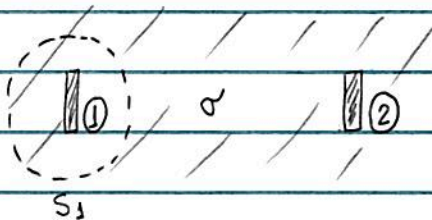
$$\hat{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \rightarrow \hat{n} \cdot \vec{J}_1 = \hat{n} \cdot \vec{J}_2 = \hat{n} \cdot \vec{J}$$

$$\xrightarrow[\text{LINEAR}]{\text{MEIO}} \hat{n} \cdot \vec{J} = \sigma_1 \hat{n} \cdot \vec{E}_1 - \sigma_2 \hat{n} \cdot \vec{E}_2$$

$$\hookrightarrow \hat{n} \cdot \vec{J} \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) = \sigma_f$$

• relação entre resistência e capacitância,

vamos considerar os dois sistemas abaixo



(I) 1 e 2 : eletrodos

V_1 e V_2 : cte

⊕ meio ôhmico σ

(II) 1 e 2 : eletrodos

V_1 e V_2 : cte

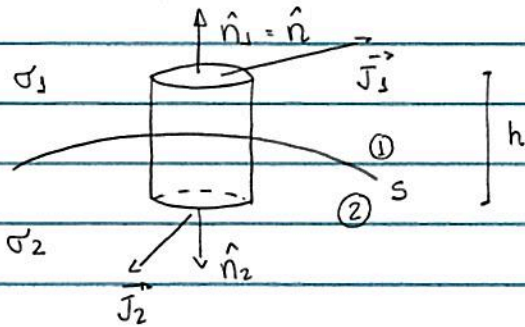
⊕ dielétrico linear ϵ

geométrica (I) = (II)

$$(I) : I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sigma \oint_S \vec{E}_I \cdot d\vec{S} = \frac{1}{R} (V_1 - V_2)$$

$$(II) : Q_f = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon \oint_S \vec{E}_{II} \cdot d\vec{S} = C (V_1 - V_2)$$

pr/ superfície arbitrária $S \subseteq \oplus$ meios lineares σ_1 e σ_2



$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \int_{\text{CILINDRO}} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\hookrightarrow \int_{\text{CILINDRO}} \vec{J} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \hat{n} \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0$$

$$\hookrightarrow \hat{n} \cdot (\sigma_1 \vec{E}_1 - \sigma_2 \vec{E}_2) = 0 \rightarrow \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \Big|_S = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \Big|_S$$

(145.5)

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \phi_1|_S = \phi_2|_S, \text{ como visto anteriormente}$$

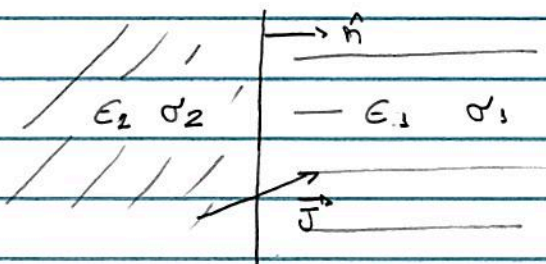
notas similaridades (145.5) e c.c. problemas de contorno

\oplus meio dielétrico linear, pg. 123

\hookrightarrow veja verso pg. 145.5

Ex.: consideram 2 meios lineares ϵ_1, σ_1 e ϵ_2, σ_2

\oplus corrente estacionária \vec{J} ; determinam σ_f na interface entre meios



hipótese : $\vec{E}_I = \vec{E}_{II}$

$$\hookrightarrow \frac{1}{R\sigma} (V_1 - V_2) = \frac{C}{\epsilon} (V_1 - V_2) \rightarrow RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (145.6)$$

Exercício : verifiquem (145.6) p/ dispositivo, Ex. 2, pg. 145.3.

notas :

(i) considerem dispositivo cuja capacitância C é conhecida

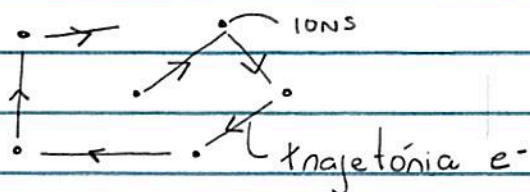
\hookrightarrow resistência = geometria : $R = \epsilon / C\sigma$!

(ii) considerem capacitor \oplus dielétrico ϵ e σ

\hookrightarrow dispositivo apresenta resistência $R = \epsilon / C\sigma$!

- sobre a condutividade em metais,
primeiro modelo microscópico (clássico): modelo de Drude
- elétrons livres: gás de elétrons ~ teoria cinética dos gases
- processos de espalhamento ~ colisões elétrons-íons

$\vec{E} = 0$: movimento aleatório elétrons ~ colisões íons



$\vec{E} \neq 0$: movimento aleatório $\oplus \vec{F} = q\vec{E}$

definição τ : intervalo de tempo médio entre colisões

$$\hookrightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\tau = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}\tau}{m}$$

\vec{v}_0 ← velocidade inicial m → massa elétron

$$\hookrightarrow \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\underbrace{\vec{v}_{0,i}}_{=0 \sim \text{mov. aleatório}} + \frac{q\vec{E}\tau}{m}) = \frac{q\vec{E}\tau}{m} = \vec{v}_d$$

\vec{v}_d : velocidade média elétron
 = vel. deriva

$$\text{Como } \vec{j} = nq\vec{v}_d = nq \left(\frac{q\tau\vec{E}}{m} \right) = \left(\frac{nq^2\tau}{m} \right) \vec{E}$$

$$\hookrightarrow \rho = \frac{m}{ne^2\tau}$$

: resistividade metal em termos
 quantidades microscópicas m, e, τ !

Magnetismo.

• 1^{as} observações (Grécia antiga):

- ∃ magnetos permanentes (ímãs)

- atração / repulsão entre magnetos permanentes

↳ ~ ∃ polos magnéticos : polo norte (N)
polo sul (S)

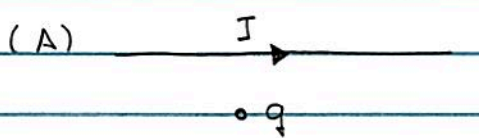
• Oersted (1820).

Observação : deflexão agulha bússola por fio c/ corrente I

↳ relação entre cargas em movimento e magnetismo

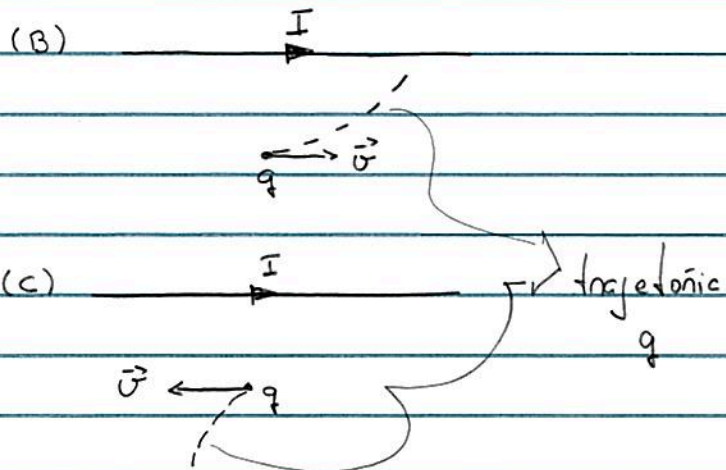
• Considerar sistema : fio ⊕ corrente elétrica I
⊕ carga pontual q > 0

3 experimentos : verifica-se que



Carga q em repouso

∄ interação



\vec{v} : velocidade q

notas:

(A) : ok c/ eletrostática

(B) e (C) : not ok " " \rightarrow \exists outro tipo de campo:
Campo magnético \vec{B}

• Lembrao eletrostática:

Carga Q em repouso
 ou distribuição de
 cargas (repouso) \rightarrow campo
 elétrico \vec{E} \rightarrow força $\vec{F}_E = q\vec{E}$
 sob carga q

• magnetostática:

corrente elétrica:
estacionária
 $(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0)$ \rightarrow campo
 magnético \vec{B} \rightarrow força \vec{F}_B sob
 carga q em
movimento /
 corrente I'

* notas: relação campo magnético
 força magnética $\underline{=}$ cargas em
 movimento

• Definição campo magnético \vec{B} ,

Lembrao
 eletrostática: campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ pode ser
 determinado através da força \vec{F}_E
 que atua sob carga q , pois $\vec{F}_E = q\vec{E}$

campo magnético \vec{B} : procedimento similar.

consideram carga q , velocidade \vec{v} , sob campo magnético \vec{B} ;
verifica-se que (experimento)

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} \quad : \text{força magnética sob} \quad (148.1)$$

carga q em movimento

ou
campo magnético $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ e tal que força sob carga q ,
posição \vec{r} , velocidade \vec{v} e dada por (148.1).

unidade B (SI):

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{N}{C \cdot m} = \frac{N}{A \cdot m} = 1 T \text{ (tesla)}$$

· caso geral, partícula carga q , velocidade \vec{v} , sob
campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} :

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad : \text{Lei de Lorentz} \quad (148.2)$$

notas: p/ deslocamento $d\vec{e} = \vec{v} dt$ da carga q , temos que

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{e} = q \vec{E} \cdot \vec{v} dt + q \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0} dt = q \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

↳ campo \vec{B} não realiza w sob $q \sim \vec{F}_B \perp \vec{v}$

Obs. 1: Eq. (148.2) no sistema gaussiano:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Obs. 2: campo magnético \vec{B} : vetor axial

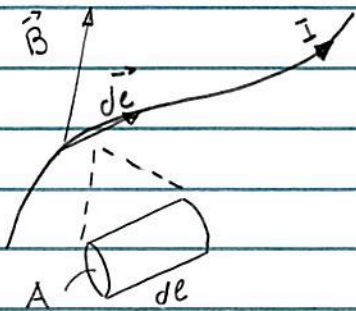
Lembrar pg. 114: (vetor polar) = (vetor polar) \times (vetor axial)

$$\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{n} = \vec{E}$$

next: determinar \vec{F}_B sob corrente elétrica I

considerar fio \oplus corrente elétrica I sob \vec{B} ;
determinar \vec{F}_B sob fio.



pr comprimento infinitesimal dl , área seção transversal A .

Eq. (148.1): $d\vec{F}_B = dq \vec{v} \times \vec{B}$
 \hookrightarrow velocidade deriva, $\vec{v} = \vec{v} dl$

como: $dq = Nq A dl$

\hookrightarrow densidade pontuões = # carga livre / volume

e $\vec{v} = v \hat{u}$

$$\hookrightarrow d\vec{F}_B = \underbrace{(Nq v) A}_{\substack{J \\ I}} \underbrace{(dl \hat{u})}_{\equiv d\vec{e}} \times \vec{B} = I d\vec{e} \times \vec{B} \quad (149.1)$$

Eq. (149.1): força devido \vec{B} sob segmento $d\vec{e}$ fio.

notar : p/ circuito fechado Γ (corrente estacionária) :

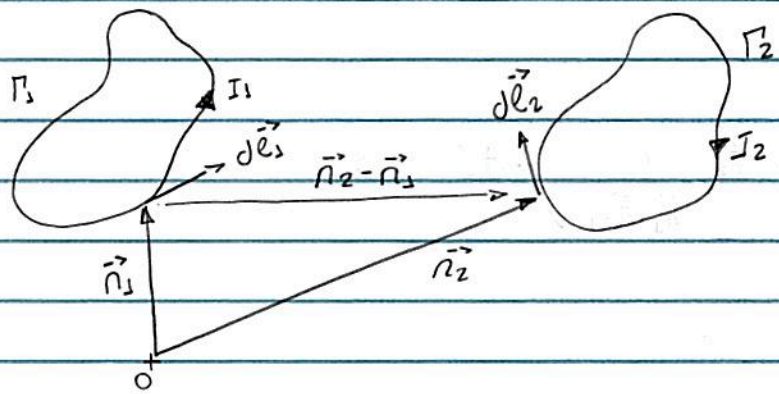
$$\vec{F}_B = I \oint_{\Gamma} d\vec{e} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (150.1)$$

⊕ hipótese : \vec{B} uniforme

$$\hookrightarrow \vec{F}_B = I \left(\oint_{\Gamma} d\vec{e} \right) \times \vec{B} = 0 : \vec{F}_B \text{ sob circuito fechado é nula.} \quad (150.1.1)$$

• Lei de Biot-Savart,

consideram 2 circuitos Γ_1 e Γ_2 percorridos por correntes estacionárias I_1 e I_2



verifica-se que (experimento) a força sob Γ_2 devido Γ_1 :

$$\vec{F}_{21} = \kappa I_1 I_2 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{e}_2 \times (d\vec{e}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (150.2)$$

$\kappa > 0$: cte,
valor numérico depende sistema de unidades

SI :

$$K \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

permeabilidade magnética do vácuo

Exercício : Mostre que Eq. (150.2) pode ser escrita como (P8.4, Reitz)

$$\vec{F}_{21} = - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1 \frac{(\vec{n}_2 - \vec{n}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

e verifiquem que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$!

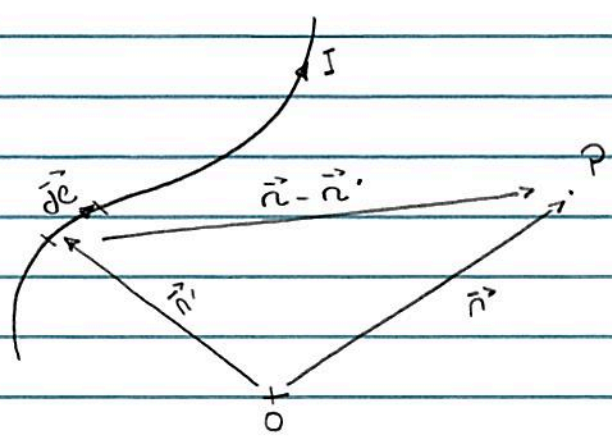
• Eq. (150.2) pode ser escrita como

$$\vec{F}_{21} = I_2 \oint_{\Gamma_2} d\vec{\ell}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{n}_2 - \vec{n}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right)$$

comparando c/ Eq. (150.1)

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{n}_2 - \vec{n}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad : \text{ campo magnético } \sim \text{ circuito } \Gamma_1 !$$

Alternativa :



$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (152.1)$$

ou

: Lei de

Biot-Savart

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (152.2)$$

Eq. (152.1) : campo magnético $d\vec{B}$ no plo P devido ao elemento de corrente estacionária $I d\vec{e}$

Eq. (152.2) : campo magnético \vec{B} no plo P devido ao circuito Γ percorrido pela corrente estacionária I

Generalização (152.2) p/ correntes superficiais e volumétricas :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \quad (152.3)$$

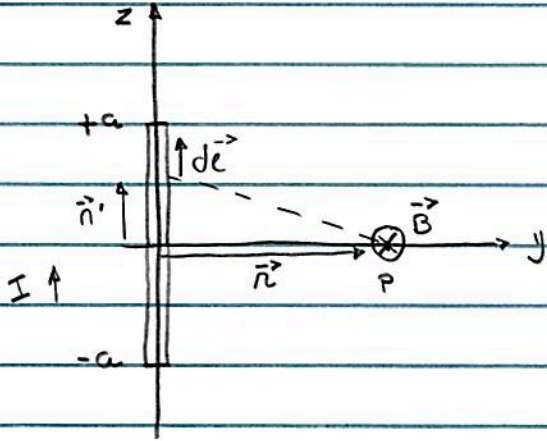
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (152.4)$$

Obs. : como $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \frac{C^2}{Nm^2}$ (veja pg. 5)

↳ apenas valor numérico vel. luz!

$$\hookrightarrow \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

Ex. 1: considerar fio retilíneo \odot corrente estacionária I ; determinar campo magnético \vec{B} .



Hipótese: comprimento fio = $2a$

caso particular: $\vec{B} = \vec{B}(0, y, 0)$

nesse caso: $d\vec{e} = dz' \hat{z}$ $\vec{r} = y \hat{y}$ $\vec{r}' = z' \hat{z}$

$$\hookrightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{y^2 + z'^2}$$

$$d\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}') = (dz' \hat{z}) \times (y \hat{y} - z' \hat{z}) = -y dz' \hat{x}$$

Eq. (152.2):

$$\vec{B}(0, y, 0) = \frac{\mu_0 I (-y)}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{dz'}{(z'^2 + y^2)^{3/2}} \hat{x} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y} \frac{2a}{(y^2 + a^2)^{1/2}} \hat{x} \quad (153.1)$$

$$\frac{z'}{y(z'^2 + y^2)^{1/2}} \Big|_{z'=-a}^{z'=a}$$

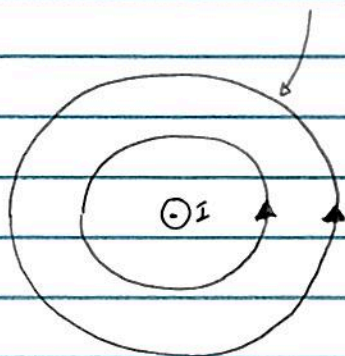
caso particular, fio ∞

$$(153.1) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

devido à simetria do sistema, podemos escrever (coordenadas cilíndricas):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi} \quad (154.1)$$

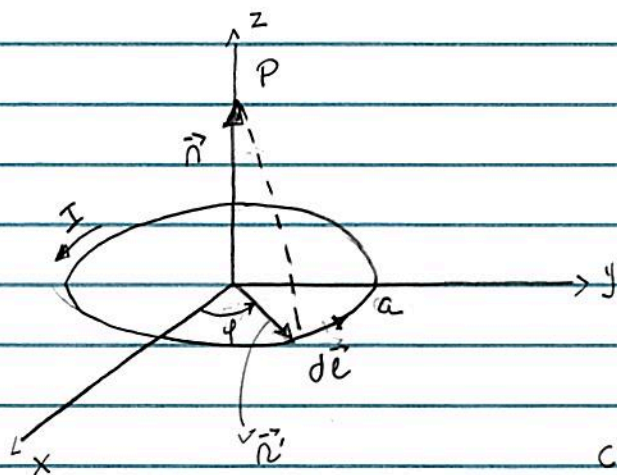
Linhas de campo = círculos, centro = fio:



notas: - simétricas linhas de campo
 - linhas de campo fechada
 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0!$

↳

Ex. 2: Anel circular, raio a \oplus corrente estacionária I ; determinar campo magnético \vec{B} .



anel \subset plano xy

considerar caso particular: $\vec{B} = \vec{B}(0,0,z)$

nesse caso:

$$d\vec{e} = a d\phi' \hat{\phi} = a (-\sin\phi' \hat{x} + \cos\phi' \hat{y})$$

$$\vec{n} = z \hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{n}' = a \hat{\rho} = a (\cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y}) \quad (\text{veja pg. 24M})$$

$$\hookrightarrow |\vec{n} - \vec{n}'| = \sqrt{a^2 + z^2}$$

$$d\vec{e} \times (\vec{n} - \vec{n}') = (az \cos \varphi' \hat{x} + az \sin \varphi' \hat{y} + a^2 \hat{z}) d\varphi'$$

$$\text{Eq. (152.2)}: \vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi' (az \cos \varphi' \hat{x} + az \sin \varphi' \hat{y} + a^2 \hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2 \hat{z}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (155.1)$$

podemos escrever (155.1) como:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \underbrace{(\pi a^2 I \hat{z})}$$

$\equiv \vec{m}$: momento de dipolo
magnético

(155.2)

hipótese: $z \gg a$:

$$(a^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-3/2} \approx \frac{1}{z^3} \left(1 - \frac{3a^2}{2z^2}\right)$$

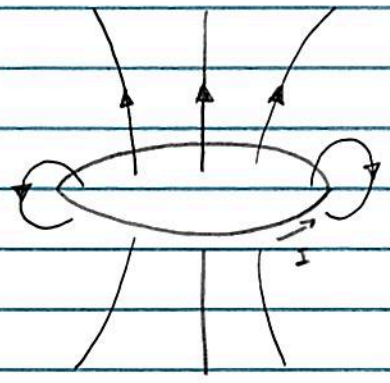
$$\hookrightarrow \vec{B}(0,0,z) \approx \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi z^3}, \quad z \gg a \quad (155.3)$$

Lembrar \vec{E} devido dipolo elétrico, pg. 92.1:

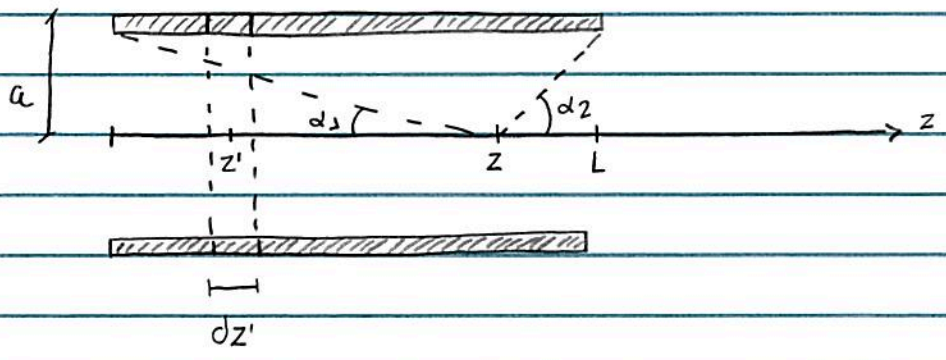
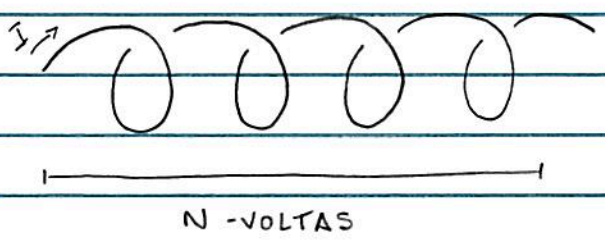
$$\vec{E}(0,0,z) \approx \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0 z^3}, \quad z \gg d \quad (155.4)$$

notas: (155.4) \rightarrow (155.3) se $\vec{p} \rightarrow \mu_0 \vec{m}$!
 ϵ_0

Obs: linhas de campo:



Ex. 3: solenóide, raio a , comprimento L \oplus corrente estacionária I ; determinar campo magnético \vec{B} .



caso particular $\vec{B} = \vec{B}(0,0,z)$

hipótese $z < L$.

Obs: caso $z > L$, veja P.5.11, G.

$$\text{Eq. (155.1)}: d\beta_z(0,0,z) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{a^2}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} dI$$

$$\text{Como } dI = I \left(\frac{Ndz'}{L} \right)$$

$$\hookrightarrow \beta_z(0,0,z) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N I a^2}{L} \int_0^L \frac{dz'}{(a^2 + (z'-z)^2)^{3/2}}$$

$$t = z' - z \rightarrow dt = dz' \quad \int_{-z}^{L-z} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{L-z}{(a^2 + (L-z)^2)^{1/2}} + \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right)$$

$$\hookrightarrow \beta_z(0,0,z) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N I}{L} \left(\frac{L-z}{(a^2 + (L-z)^2)^{1/2}} + \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right); 0 \leq z \leq L$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N I}{L} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1), \text{ veja figura}$$

hipótese $z, (L-z) \gg a$ ou $L \rightarrow +\infty$ e $z \sim L/2$

$$\hookrightarrow \cos \alpha_1 = \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + a^2/z^2)^{1/2}} \sim 1 - \frac{a^2}{2z^2}$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{L-z}{(a^2 + (L-z)^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + a^2/(L-z)^2)^{1/2}} \sim 1 - \frac{a^2}{2(L-z)^2}$$

$$\hookrightarrow \beta_z(0,0,z) \sim \frac{\mu_0 N I}{L} \left(1 - \frac{a^2}{4z^2} - \frac{a^2}{4(L-z)^2} \right) \quad (157.1)$$

Propriedades campo magnetostático $\vec{B}(\vec{r})$,

De modo análogo ao campo eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, vamos analisar duas características do campo magnetostático $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \quad \sim \quad \text{fluxo } \vec{B} \text{ através sup. } S$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad \sim \quad \text{circulação } \vec{B} \text{ através curva } \Gamma$$

Lembran \vec{B} devido corrente estacionária I

em fio retilíneo (pg. 154): $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B} \neq 0$.

(1) Divergente \vec{B} ,

consideran $\vec{B}(\vec{r}) \sim$ densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r})$,

$\vec{\nabla} \cdot$ Eq. (152.4):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)}_{(1)}$$

como $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ (veja pg. 164)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (1) &= \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \vec{J}(\vec{r}') \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)}_{=0, \text{ pois } \vec{J} \neq \vec{J}(\vec{r}')} \\ &= 0, \text{ pois } \vec{J} \neq \vec{J}(\vec{r}') \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

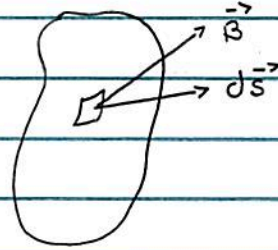
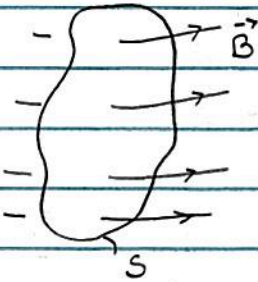
(159.1)

Interpretação (159.1): ∇ fontes de campo magnético na forma de "cargas magnéticas" = monopolo magnético.

Apenas correntes elétricas são fontes de \vec{B} !

• Eq. (159.1), forma integral,

considerar $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ e superfície S :



de modo análogo ao campo elétrico, podemos definir

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad : \quad \begin{array}{l} \text{fluxo campo } \vec{B} \\ \text{através superfície } S \end{array} \quad (159.2)$$

em particular, se S superfície fechada:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) d\tau = 0 \quad (159.3)$$

\uparrow \downarrow \uparrow
 Teorema volume Eq. (159.1)
 de Gauss definido
por S

Unidade (SI):

$$[\Phi_B] = [B] [A \cdot m] = T \cdot m^2 = \frac{N \cdot m}{A} = 1 \text{ Wb (weber)}$$

(2) Rotacional \vec{B} ,

De modo análogo ao cálculo $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$,

$\vec{\nabla} \times$ Eq. (152.4) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)}_{(I)} \quad (160.1)$$

$$\text{como } \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\text{e } \vec{J} \neq \vec{J}(\vec{r})$$

$$\hookrightarrow (I) = \underbrace{\vec{J}(\vec{r}') \left(\frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)}_{4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} - \underbrace{(\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{(II)}$$

$$\text{como } \frac{d}{dx} f(x-x') = -\frac{d}{dx'} f(x-x') \text{ e}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) f$$

$$\hookrightarrow (II) = + (\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

vamos considerar apenas a componente x da eq. acima :

$$(\Pi)_x = + \left(\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \right) \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} =$$

ESCALAR!

$$= \vec{\nabla}' \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}') \frac{x - x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) - \frac{(x - x')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') \right)$$

análogo p/ componentes y e z!

= 0, pois a corrente é estacionária!

↳ Eq. (160.1):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underbrace{4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') + \vec{J}(\vec{r}')}_{4\pi \vec{J}(\vec{r})}$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int_V d^3r' \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

Componente i do vetor $\vec{r} - \vec{r}'$

$$\stackrel{\text{Teorema de Gauss}}{=} \oint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}')_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{S} \rightarrow 0$$

p/ $\vec{J} \in$ volume V
= $\vec{J}(\vec{r}'=0)$ p/ $\vec{r}' \in S!$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad : \text{Lei de Ampère} \quad (161.1)$$

Eq. (161.1), forma integral,

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$= \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

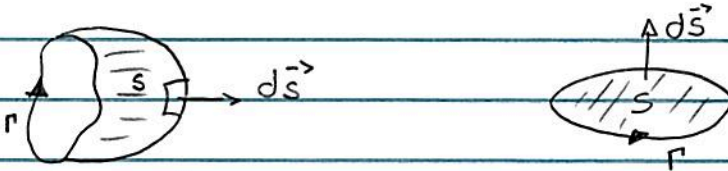
Teorema
de Stokes
↑
curva definida
pela sup. S

↓
corrente total
através sup. S

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I$$

(162.1)

Lembrar: Orientação Γ e sentido $d\vec{s} \sim$ "regra mão direita"



* Resumo propriedades campo (vetorial) magnetostático $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$:

$$(1) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

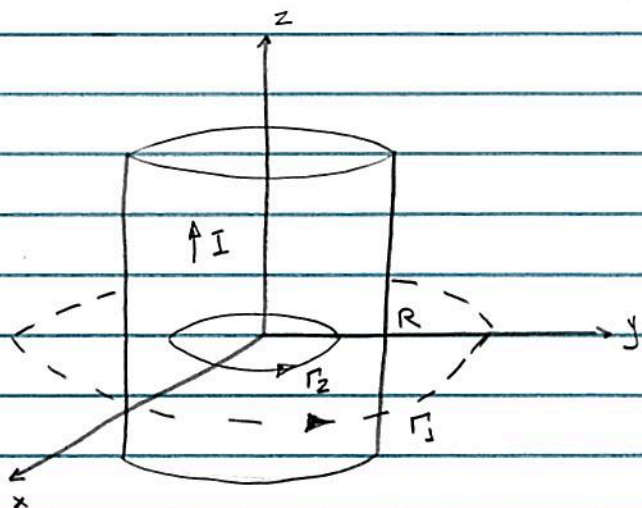
(162.2)

$$(2) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

Obs.: Eqs. (162.2) no sistema Gaussiano,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Ex. 1: considerem fio (cilindro) raio R \oplus corrente estacionária I ;
determinar campo magnético \vec{B} .



hipótese: fio ∞

por simetria $\vec{B} \propto \hat{\phi}$, \rightarrow curvas Γ = círculos raio p ,
centro = eixo z

dois casos:

(i) $p > R$

\hookrightarrow curva Γ_1 = círculo raio $p > R$

$$\text{Eq. (162.1): } \oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_0^{2\pi} B \cdot (p d\phi) = 2\pi p B = \mu_0 I$$

$$d\vec{e} = p d\phi \hat{\phi}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(p) = \frac{\mu_0 I}{2\pi p} \hat{\phi}, \quad p > R$$

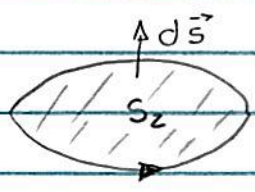
(ii) $p < R$

hipótese: corrente I uniforme através volume cilindro.

curva Γ_2 = círculo raio $p < R$.

Eq. (162.1) : $\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s}$

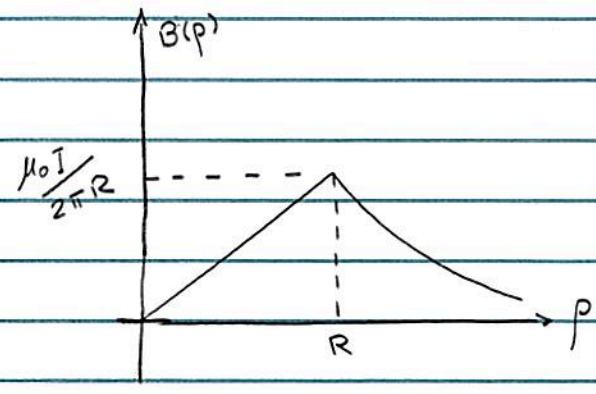
L> Área círculo definido por Γ_2



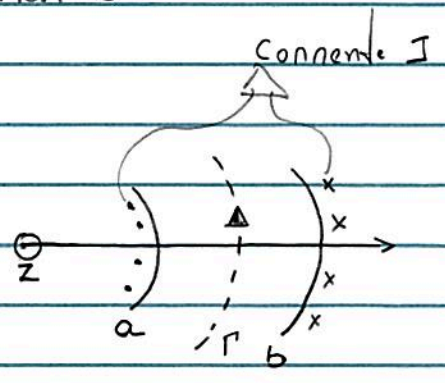
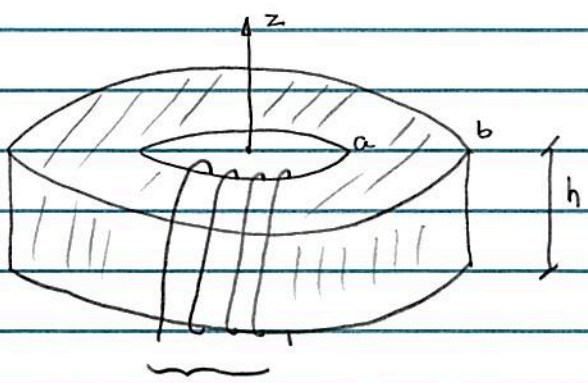
como $d\vec{e} = \rho d\phi \hat{\phi}$, $d\vec{s} = ds \hat{z}$ e $\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{z}$

L> $\int_0^{2\pi} B \rho d\phi = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \int_{S_2} ds = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi \rho^2 = B \rho \cdot 2\pi$

L> $\vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \rho \hat{\phi}$



Ex. 2: consideran toroide, raio interno a, raio externo b, área seção transversal retangular \oplus corrente estacionária I; determinan \vec{B}



N voltas em torno anel completo.

caso particular: $\vec{B}(\rho, \phi, z)$, $a < \rho < b$

por simetria $\vec{B} \propto \hat{\phi} \rightarrow$ curva $\Gamma =$ círculo raio ρ ,
 $a < \rho < b$

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_{\Gamma} (B\hat{\phi}) \cdot (\rho d\phi \hat{\phi}) = \int_0^{2\pi} B\rho d\phi = 2\pi\rho B$$

Eq. (162.1) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = 2\pi\rho B = \mu_0 \underbrace{(NI)}_{\text{corrente total envolvida por } \Gamma!}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\rho) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (165.1)$$

* Resumo, equações de Maxwell p/ campos estáticos (vácuo) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

eqs. fundamentais
eletrostática

eqs. fundamentais
magnetostática

Além disso, é necessário adicionar a Lei de Lorentz (148.2) :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

↳

• Potencial vetor,

Lembran eletrostática: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

como $\nabla \times (\nabla f) = 0$, $\forall f = f(\vec{r})$: função escalar

↳ é interessante introduzir a função escalar $v = v(\vec{r})$ tal que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} v$$

pt magnetostática: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

como $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \rightarrow$ podemos escrever

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (166.1)$$

↳ potencial vetor

Lembran eletrostática: a definição do potencial elétrico não é única,

$$\text{se } v'(\vec{r}) = v(\vec{r}) + v_0$$

↳ cte arbitrária

$$\text{↳ } \vec{E}' = -\vec{\nabla} \cdot v' = -\vec{\nabla} \cdot (v + v_0) = -\vec{\nabla} v = \vec{E}$$

i.e., $v(\vec{r})$ e $v'(\vec{r}) \rightarrow$ mesmo campo elétrico \vec{E}

de modo análogo pt magnetostática, temos que o potencial vetor não é definido de forma única

Se

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \lambda(\vec{r}) \quad (167.1)$$

↳ função escalar arbitrária

$$\hookrightarrow \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \lambda)}_{=0} = \vec{B}$$

i.e., $\vec{A}(\vec{r})$ e $\vec{A}'(\vec{r}) \rightarrow$ mesmo campo \vec{B} !

Eq. (167.1) \rightarrow podemos nos restringir a uma classe de potenciais vetores \vec{A} tais que, por exemplo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (167.2)$$

notar:

se $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0 \rightarrow$ podemos escolher $\lambda = \lambda(\vec{r})$ tal que
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$, i.e.,

$$\text{Eq. (167.1)} : \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \lambda = 0$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 \lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (167.3)$$

• Lembra da eletrostática:

$$\text{Eq. de Poisson: } \nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

cuja sol. geral pode ser escrita como

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

como (167.3) é análoga à Eq. de Poisson, temos que

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \text{p/ } \lim_{r \rightarrow +\infty} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0!$$

Obs.: Eq. (167.1) : transformação de gauge

Eq. (167.2) : Gauge de Coulomb

• Eq. (166.1) ⊕ Lei de Ampère (161.1):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

a eq. acima pode ser simplificada se considerarmos (167.2)

$$\hookrightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{168.1}$$

notas: Eq. (168.1) em termos de componentes cartesianas,

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i, \quad i = x, y, z$$

i.e., componente i de (168.1) é análoga à Eq. de Poisson.

↳ sol. geral (168.1):

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{J_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad i = x, y, z$$

ou

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (169.1)$$

Obs.: Eq. (169.1) ok p/ $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{J}(\vec{r}) = 0$!

Obs.: potencial elétrico * potencial vetor:

como $V = V(\vec{r})$ é uma função escalar, em alguns casos é interessante determinar $V(\vec{r})$ e, em seguida, \vec{E} ;

\neq p/ \vec{A} e \vec{B} , ambos funções vetoriais !

• Lembre-se teorema de Helmholtz, pg. 38.

se $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ é diferenciável e decai mais rápido que $1/r$ qdo $r \rightarrow +\infty$

$$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right)$$

Eqs. (162.2)

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right)$$

$\vec{A}(\vec{r})$: ok c/ (169.1)

Obs. 1: o potencial vetor é útil se expressarmos a Lagrangeana de uma partícula (massa m , carga q) sob um campo EM.

verifica-se que (veja Sec. 4.9, Heald and Marion)

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\phi(\vec{r}) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (169.2)$$

\swarrow velocidade partícula
 \searrow potencial elétrico

como $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + qA_i$: momento
 canonicamente conjugado

$$\hookrightarrow \dot{r}_i = \frac{1}{m} (p_i - qA_i), \quad i = x, y, z$$

$$\hookrightarrow H = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{r}_i - L = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{r}_i - L$$

$$= \sum_{i=1}^3 (m\dot{r}_i + qA_i)\dot{r}_i - \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + q\phi(\vec{r}) - q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi(\vec{r}) \quad \text{Hamiltoniana} \quad (169.3)$$

partícula carregada
sob campo EM

Exercício: verifiquemos que Eq. Euler-Lagrange \oplus (169.2)

$$\hookrightarrow m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

obs.: Eq. (169.1) p/ corrente estacionária I e densidade superficial de corrente \vec{j} :

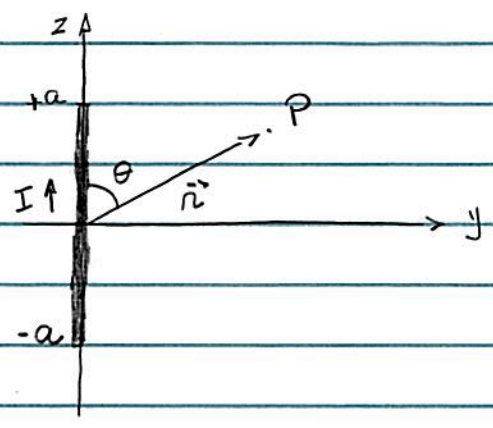
$$\vec{J} d\sigma \rightarrow I d\vec{e} \text{ ou } \vec{K}(\vec{r}) ds$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{e}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (170.1)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\vec{K}(\vec{r}') ds}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (170.2)$$

(comparar eqs. pg. 152)

Ex.1: considerar fio retilíneo, comprimento $2a$ ⊕ corrente estacionária I; determinar potencial vetor \vec{A} .



nesse caso $d\vec{e} = dz' \hat{z}$, $\vec{r}' = z' \hat{z}$

⊕ Eq. (170.1) $\rightarrow \vec{A} \propto \hat{z}$!

$$\text{como } |\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \int_{-a}^{+a} \frac{dz'}{(r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta)^{1/2}}$$

considerar caso particular $\vec{r} = y \hat{y}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \vec{A}(y) &= \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{dz'}{(y^2 + z')^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{y^2 + a^2} + a}{\sqrt{y^2 + a^2} - a} \right) \hat{z} = A_z(y) \hat{z} \quad (171.1) \\ &\quad \text{(veja pg. 39)} \end{aligned}$$

notas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & A_z(y) \end{vmatrix} = \hat{x} \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{y^2 + a^2} \hat{x}$$

comparar c/ Eq. (153.1)

considerar $\lim_{a \rightarrow +\infty} (171.1)$,

$$(1) = \frac{(1 + y^2/a^2)^{1/2} + 1}{(1 + y^2/a^2)^{1/2} - 1} \sim \frac{2 + y^2/2a^2}{y^2/2a^2} = 1 + \frac{4a^2}{y^2} \sim \frac{4a^2}{y^2}$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(y) \sim \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\ln 4a^2 - 2 \ln y \right) \hat{z}$$

devido à simetria do sistema, podemos escrever (coordenadas cilíndricas)

$$\vec{A}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(2 \ln 2a - 2 \ln \rho \right) \hat{z}$$

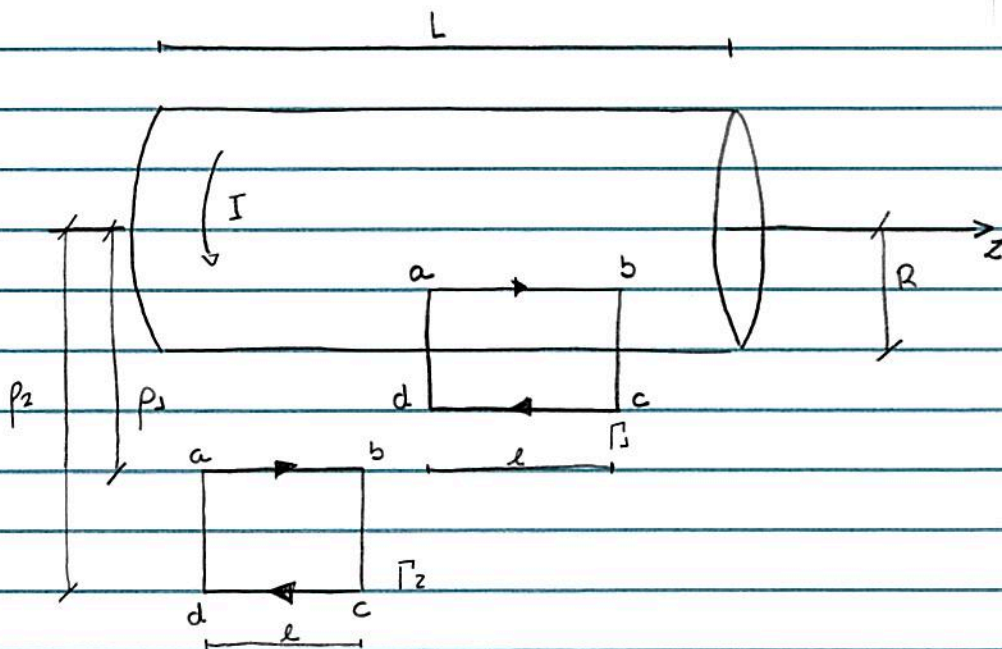
apesar $\lim_{a \rightarrow +\infty} \ln 2a \rightarrow +\infty$, podemos excluir a cte e considerar

$$\vec{A}(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho \hat{z} = A_z(\rho) \hat{z}$$

notas: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi} = \text{Eq. (159.1)}$$

Ex. 2: consideramos solenóide, comprimento $L \rightarrow +\infty$, raio R ,
 $n = \#$ voltas fio/comprimento \oplus
 corrente estacionária I ; (a) determinamos \vec{B} ,
 (b) determinamos \vec{A}



pt solenóide $L < \infty$, vimos que (pg. 157)

$$\vec{B}(0,0,z) = B(0,0,z) \hat{z} = \frac{\mu_0 N I}{L} \hat{z} \quad \text{pt } z = L/2. \quad (172.1)$$

\hookrightarrow pt $L \rightarrow +\infty$: $\vec{B} \propto \hat{z}$

Eq. (162.1) :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{e} &= \int_a^b (B\hat{z}) \cdot (dz\hat{z}) + \int_c^d (B\hat{z}) \cdot (+dz\hat{z}) \\ &= (B(p_1) - B(p_2)) \cdot l = \mu_0 I = 0 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow B(p_1) = B(p_2)$, i.e., $B = \text{cte}$

se $p_2 \rightarrow +\infty \rightarrow B(p_2) = 0 \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = 0$ $p_1, p > R$.

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \int_a^b (B\hat{z}) \cdot (dz\hat{z}) = Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 I n \cdot l$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & , p < R \\ 0 & , p > R \end{cases} \quad (173.1)$$

(comparamos Eq. (172.1))

Sobre o potencial vetor,

se $L < +\infty$, poderíamos utilizar (170.2);

como $L \rightarrow \infty \rightarrow \lim_{z \rightarrow +\infty} \vec{J}(\vec{r}) \neq 0$.

Alternativa,

notas:

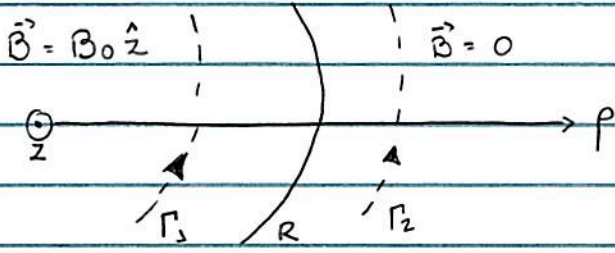
Teorema de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{e} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_B : \text{Fluxo } \vec{B} \text{ através de } S,$$

sup. definida
por Γ

Eq. (159.2)

notas a simetria do sistema :



como $\vec{B} \propto \hat{z}$ ($\rho < R$) \rightarrow curva Γ = círculo raio ρ ,
centro eixo \hat{z} ,

i.e., $d\vec{s} = ds \hat{z}$

$d\vec{e} = \rho d\phi \hat{\phi} \rightarrow \vec{A} \propto \hat{\phi}$: sentido \downarrow !

dois casos :

(i) $\rho < R$,

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{e} = \oint_{\Gamma_1} (A \hat{\phi}) \cdot (\rho d\phi \hat{\phi}) = \int_0^{2\pi} A \rho d\phi = 2\pi \rho A =$$

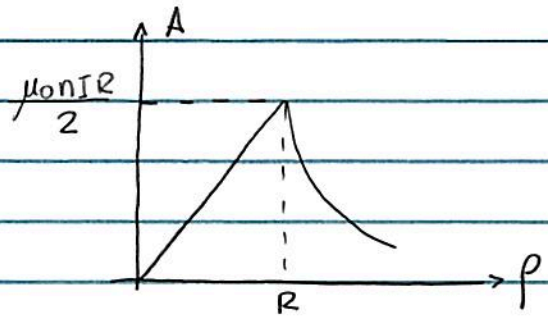
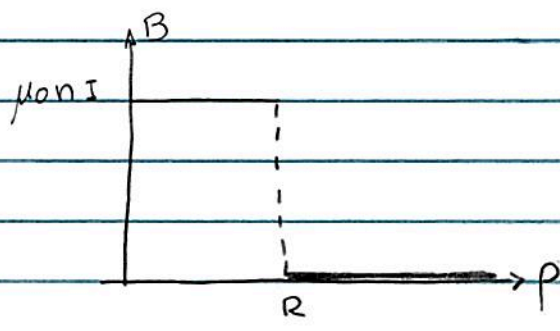
$$= \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} (\mu_0 n I \hat{z}) \cdot (ds \hat{z}) = \mu_0 n I (\pi \rho^2)$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(\rho) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \rho \hat{\phi} = A\phi(\rho) \hat{\phi}$$

(ii) $\rho > R$

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{e} = 2\pi \rho A = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 n I (\pi R^2)$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(\rho) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \frac{R^2}{\rho} \hat{\phi} = A\phi(\rho) \hat{\phi}$$



notas : $\vec{B}(\rho) = 0$ e $\vec{A}(\rho) \neq 0$ p/ $\rho > R$!

ok pois, nesse caso $\vec{A} = A_\phi(\rho) \hat{\phi}$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad \rho \neq \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\phi)}{\partial \rho} \hat{z} = 0, \quad \rho \neq \rho > R$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{2} \mu_0 n I \rho^2 \right) \hat{z} = \mu_0 n I \hat{z}, \quad \rho \neq \rho < R.$$

\hookrightarrow pg. 178

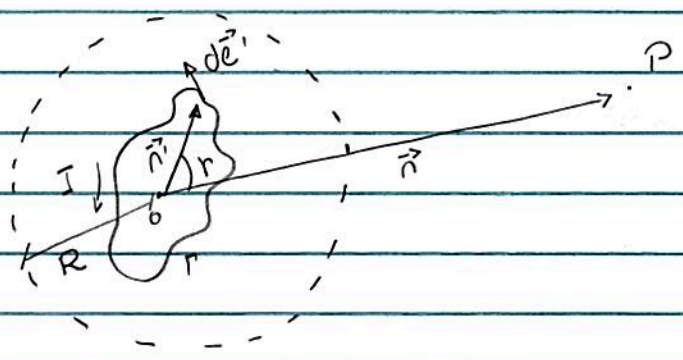
de modo análogo ao campo elétrico...

ideia: usar a lei de Biot-Savart e a lei de Ampère na vizinhança de uma superfície...

L

• Expansão multipolar do potencial vetor,

considera uma distribuição localizada de correntes estacionárias ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$)



de modo análogo à expansão multipolar do potencial elétrico (veja pg. 91),

se $r \gg R \rightarrow \vec{A}(\vec{r})$ pode ser expandido em potências de $1/r$!

Lembrar que:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta),$$

$r' < r$!
(178.1)

Eq. (178.1) em (170.1),

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint r'^n P_n(\cos \theta) d\vec{e}' \quad (178.2)$$

Eq. (178.2) : expansão multipolar de $\vec{A}(\vec{r})$!

comparar c/ Eq. (93.2)

lembrar: $\cos \theta \sim$ fun. adição p/ harmônicos esféricos (93.2)

vamos analisar os dois primeiros termos da série (178.2),

$n=0$ (monopolo),

$$\vec{A}_{\text{MON}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \oint_{\Gamma} d\vec{e}' = 0, \quad (179.1)$$

ou c/ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \sim$ não obs. monopolo magnético

$n=1$ (dipolo),

$$\vec{A}_{\text{DIP}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \oint_{\Gamma} \underbrace{r' P_1(\cos r)}_{\hat{n} \cdot \vec{r}'} d\vec{e}'$$

verifica-se que (veja abaixo)

$$-\oint_{\Gamma} (\hat{n} \cdot \vec{r}') d\vec{e}' = \frac{1}{2} \hat{n} \times \oint_{\Gamma} \vec{r}' \times d\vec{e}' = \hat{n} \times \int_S d\vec{S} = \hat{n} \times \vec{A} \quad (*)$$

↳ sup. cuja fronteira = Γ .

onde

$$\vec{A} = \int_S d\vec{S} \quad : \quad \text{vetor área} \quad (179.2)$$

definindo

$$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_{\Gamma} \vec{r}' \times d\vec{e}' = I \int_S d\vec{S} = I \vec{A} \quad : \quad \text{momento de dipolo magnético} \quad (179.3)$$

$$\hookrightarrow \vec{A}_{\text{DIP}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{n}}{r^3}, \quad r \gg R \quad (179.4)$$

comparar c/ Eq. (94.3)

vamos verificar a identidade (+);
duas etapas:

$$(i) \text{ como } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \text{ e } d\vec{e}' = d\vec{n}'$$

$$\hookrightarrow \hat{n} \times (d\vec{n}' \times \vec{n}') = d\vec{n}'(\hat{n} \cdot \vec{n}') - \vec{n}'(\hat{n} \cdot d\vec{n}') \quad (1)$$

p/ \hat{n} fixo:

$$d(\vec{n}'(\hat{n} \cdot \vec{n}')) = d\vec{n}'(\hat{n} \cdot \vec{n}') + \vec{n}'(\hat{n} \cdot d\vec{n}') \quad (2)$$

$\hookrightarrow (1) + (2)$:

$$d\vec{n}'(\hat{n} \cdot \vec{n}') = \frac{1}{2} \hat{n} \times (d\vec{n}' \times \vec{n}') + \frac{1}{2} d(\vec{n}'(\hat{n} \cdot \vec{n}'))$$

como o segundo termo é um diferencial total,
apenas o primeiro contribuirá p/ a integral

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} (\hat{n} \cdot \vec{n}') d\vec{e}' = -\frac{1}{2} \hat{n} \times \oint_{\Gamma} \vec{n}' \times d\vec{e}'$$

(ii) consideramos $\vec{F}(\vec{n}) = \vec{A}(\vec{n}) \times \vec{b}$, onde $\vec{b} = \text{cte}$

$$\text{como } \underbrace{\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{e}}_{(I)} = \underbrace{\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}}_{(II)}$$

$$\hookrightarrow (I) = \oint_{\Gamma} (\vec{A} \times \vec{b}) \cdot d\vec{e} = \left(\oint_{\Gamma} d\vec{e} \times \vec{A} \right) \cdot \vec{b}$$

$$\text{como } \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (\text{veja pg. 16M})$$

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow (\Pi) &= \int_S \underbrace{((\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}) \cdot d\vec{S}}_{\sum_{ij} b_i \partial_i A_j ds_j} - \int_S \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{b} \cdot d\vec{S}}_{\left(\int d\vec{S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right) \cdot \vec{b}} \\
 &= \underbrace{\sum_i b_i \left(\sum_j ds_j \partial_i A_j \right)}_{\vec{b} \cdot \int_S ds_j \vec{\nabla} A_j}
 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{A} \times d\vec{e} = \int_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d\vec{S} - \sum_{j=1}^3 \int_S ds_j \vec{\nabla} A_j \quad (181.1)$$

se $\vec{A} = \vec{n}$:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} \vec{n} \times d\vec{e} &= \int_S \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{n})}_{3} d\vec{S} - \underbrace{\sum_{j=1}^3 \int_S ds_j \vec{\nabla} n_j}_{\int_S d\vec{S}} = 2 \int_S d\vec{S}
 \end{aligned}$$

• sobne $\vec{\nabla} \text{div}(\vec{n})$,

p/ $\vec{m} = \text{cte}$

$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{n}}{n^3} \right) &= -(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{n}}{n^3} + \vec{m} \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{n}}{n^3} \right) \right) \\
 &= 0 \quad \text{p/} \quad \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{n}}{n^2} \right)}_{= 4\pi \delta(\vec{n})} \neq 0
 \end{aligned}$$

notas:

$$(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{n}}{n^3} = m_i \partial_i \left(\frac{n_j \hat{e}_j}{n^3} \right)$$

$$= \frac{m_i}{n^3} \underbrace{(\partial_i n_j)}_{\delta_{ij}} \hat{e}_j + m_i n_j \hat{e}_j \underbrace{\partial_i \frac{1}{n^3}}_{-\frac{3n_i}{n^5}, n \neq 0}$$

$$= \frac{1}{n^3} m_i \hat{e}_i - \frac{3}{n^5} (m_i n_i) (n_j \hat{e}_j)$$

$$\hookrightarrow \vec{B}_{DIP} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{DIP} = \frac{\mu_0}{4\pi n^3} \left(3(\vec{m} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \vec{m} \right), n \gg R \quad (182.1)$$

Obs. 1: Companion Eqs. (179.4) e (182.1) c/ (92.3) !

pr o dipolo elétrico:

↳ veja verso
pg. 178 e
exemplos pg. 182.1

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{n^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 n^3} \left(3(\vec{p} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \vec{p} \right), n \gg R$$

Obs. 2: Eq. (179.3), caso geral

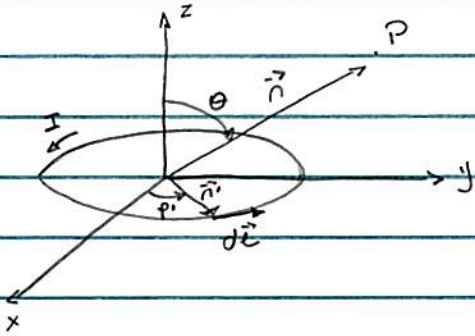
$$\vec{I} d\vec{e} \rightarrow \vec{v} ds \text{ ou } \vec{J} d^3\vec{r}$$

$$\hookrightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{r} \times \vec{J}(\vec{r})$$

Ex. 3: Anel circular, raio a \oplus corrente estacionária I ;

(a) determinar \vec{m} ;

(b) " $\vec{B}(\vec{r})$, $r \gg a$.



vimos que, pg. 154:

$$\vec{B}(0,0,z) \approx \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi z^3}, \quad z \gg a; \quad \vec{m} = \pi a^2 I \hat{z}$$

$$\text{Eq. (179.3)}: \quad \vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_r \vec{r}' \times d\vec{e}$$

$$\text{nesse caso: } \vec{r}' = a \hat{\rho} = a (\cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y})$$

$$d\vec{e} = a d\phi' \hat{\phi} = a d\phi' (-\sin\phi' \hat{x} + \cos\phi' \hat{y})$$

$$\hookrightarrow \vec{r}' \times d\vec{e} = a^2 d\phi' (\cos^2\phi' + \sin^2\phi') \hat{z}$$

$$\hookrightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} I a^2 \hat{z} \int_0^{2\pi} d\phi' = \pi a^2 I \hat{z}$$

$$\text{Eq. (179.4)}: \quad \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{n}}{r^3} = \frac{\mu_0 a^2 I}{4r^2} (\hat{z} \times \hat{n}); \quad r \gg a$$

$$\begin{aligned} \text{como } \hat{z} \times \hat{n} &= \hat{z} \times (\hat{x} \sin\theta \cos\phi + \hat{y} \sin\theta \sin\phi + \hat{z} \cos\theta) \\ &= \sin\theta (-\hat{x} \sin\phi + \hat{y} \cos\phi) = \sin\theta \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 a^2 I}{4} \frac{\sin\theta \hat{\phi}}{r^2} = A\phi(r, \theta) \hat{\phi}; \quad r \gg a$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta}$$

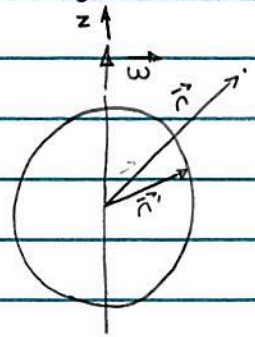
$$= \frac{\mu_0 a^2 J}{4r^3} \underbrace{(2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})}_{3(\hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{z}} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}), \quad r \gg a$$

comparam Eq. (182.1)!

caso particular: $\vec{r} = z \hat{z}$

$$\hookrightarrow \vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi z^3} (3m \hat{z} - \vec{m}) = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi z^3} \quad \text{Eq. (155.3)}$$

Ex. 2: casca esférica raio R ⊕ densidade superficial de carga $\sigma = cte$ ⊕ notação $\vec{\omega} = cte$; determinam $\vec{B}(\vec{r}), r \gg R$.



$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

Eq. (179.3) ⊕ Idē → $\vec{r} ds$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^2 r' \vec{r}' \times \vec{v}(\vec{r}')$$

$$\text{Eq. (144.1)} : \vec{v} = \sigma \vec{v} = \sigma (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \sigma \omega R (\hat{z} \times \hat{n}) = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi}$$

$$\vec{r}' = R \hat{n}$$

$$\hookrightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \int R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' \cdot R \cdot \sigma \omega R \sin \theta' (\hat{n} \times \hat{\phi})$$

$$\text{como } \hat{n} \times \hat{\phi} = (\hat{x} \sin \theta' \cos \phi' + \hat{y} \sin \theta' \sin \phi' + \hat{z} \cos \theta') \times (-\hat{x} \sin \phi' + \hat{y} \cos \phi')$$

$$= \hat{z} \sin \theta' (\cos^2 \phi' + \sin^2 \phi')$$

$$\hookrightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \sigma \omega R^4 \hat{z} \int_0^\pi d\theta' \sin^3 \theta' \int_0^{2\pi} d\phi' = \frac{4\pi}{3} \sigma \omega R^4 \hat{z}$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{n}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{4\pi}{3} \sigma \omega R^4 \frac{1}{r^2} (\hat{z} \times \hat{n})$$

$$\approx \frac{1}{3n^2} \mu_0 \sigma \omega R^4 \sin \theta \hat{\phi}, \quad r \gg R$$

Obs.: é possível calcular $\vec{A}(\vec{r})$ p/ $\forall \vec{r}$,
veja exemplo 5.1 G ou pg. 252.3 (Cap. 7)

• Dipolo magnético pontual.

De modo análogo ao dipolo elétrico pontual (veja pg. 97), é interessante introduzir a ideia de um dipolo magnético pontual

nesse caso, o potencial vetor e o campo magnético associados a um dipolo mag. pontual \vec{m} @ \vec{r}_0 :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad \text{p/ } \forall \vec{r}!$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \frac{8\pi}{3} \vec{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right) \quad (182.2)$$

onde $\hat{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$

• vamos verificar (182.2).

pt dipolo pontual @ $\vec{r}_0 = 0$.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{n}}{r^2}; \quad \vec{m} = \text{cte}, \quad \forall \vec{r}$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m} \times \hat{n}}{r^2} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\underbrace{\vec{m} \left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \hat{n}}{r^2} \right)}_{4\pi \delta(\vec{r})} - \underbrace{(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{n}}{r^2}}_{\vec{m} \times \left(\frac{\vec{\nabla} \times \hat{n}}{r^2} \right) - \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{m} \cdot \hat{n}}{r^2} \right)} \right)$$

↑
notas: é necessário manter esse termo!
= 0

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(4\pi \vec{m} \delta(\vec{r}) - \underbrace{\vec{\nabla} \left(\frac{\vec{m} \cdot \hat{n}}{r^2} \right)}_{(*)} \right)$$

(*) pode ser escrito como

$$(*) = + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\nabla}}{r} \right) = \sum_{ij} \hat{e}_j \partial_j (m_i \partial_i \frac{1}{r})$$

⊕ identidade: $\partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{1}{r^3} (3n_i n_j - r^2 \delta_{ij}) - \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta(\vec{r})$

$$\hookrightarrow (*) = \sum_{ij} \frac{1}{r^5} \left(3(m_i n_j) (n_j \hat{e}_j) - r^2 \delta_{ij} m_i \hat{e}_j \right) - \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} m_i \hat{e}_j \delta(r)$$

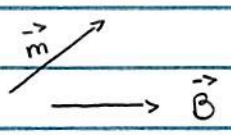
$$= \frac{1}{r^5} \left(3(\vec{m} \cdot \vec{n}) \vec{n} - r^2 \vec{m} \right) - \frac{4\pi}{3} \vec{m} \delta(r)$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{m}}{r^3} - \frac{8\pi}{3} \vec{m} \delta(r) \right); \quad \forall \vec{r}$$

$\vec{m} @ \vec{r} = 0.$



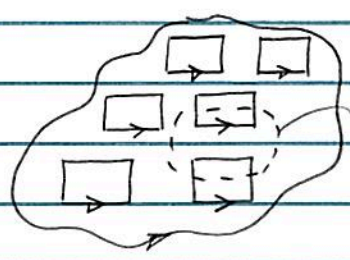
• Considera dipolo magnético $\vec{m} \oplus \vec{B}_{ext}$



vamos considerar 2 casos,

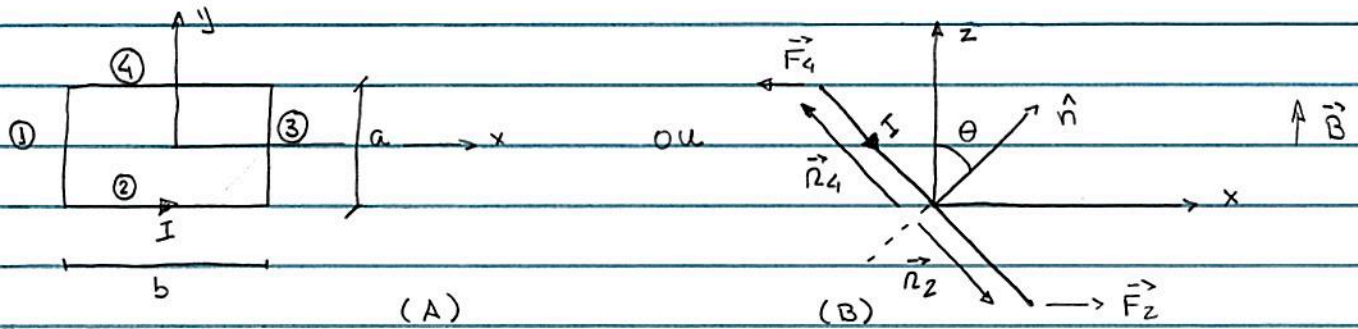
(i) \vec{B} uniforme

como circuito (orientado) formado arbitrário =
 = conjunto \square infinitesimais, vamos considerar
 apenas um único \square



notar que \int circulação = 0!

hipótese $\vec{B} = B \hat{z}$



$$\hat{n} = \hat{z}$$

\vec{F}_i : força sob segmento $i = 1, 2, 3, 4$

Eq. (150.1) - p/ Fig. B :

$$\vec{F}_1 = I \int_1 d\vec{e} \times \vec{B} = I \int_1 (dx \hat{x} + dz \hat{z}) \times B \hat{z} = \hat{y} I B \int_{-\frac{1}{2} a \sin \theta}^{+\frac{1}{2} a \sin \theta} dx$$

$$= I B a \sin \theta \hat{y} = -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_2 = I \int_2 d\vec{e} \times \vec{B} = I \int_2 dy \hat{y} \times B \hat{z} = \hat{x} I B \int_{-b/2}^{b/2} dx = I b B \hat{x} = -\vec{F}_4$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_{\text{TOT}} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 0 \quad : \text{OK c/ Eq. (150.1.1)}$$

como \vec{F}_1 e $\vec{F}_3 \perp \hat{y} \rightarrow \vec{N} = 0$ w.r.t. eixo \hat{y} !

$$\vec{N}_2 = \frac{1}{2} a (\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{z}) = -\vec{N}_4$$

$$\hookrightarrow \vec{N} = \vec{N}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{N}_4 \times \vec{F}_4 = 2 \vec{N}_2 \times \vec{F}_2$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} a \sin \theta (I b B) \hat{y} = B (I a b) \sin \theta \hat{y}$$

$$= I a b \underbrace{(\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{z})}_{\hat{n}} \times (B \hat{z}) = \vec{m} \times \vec{B} \quad : \text{Torque sob (186.1) dipolo}$$

Obs.: comparem pg. 104, torque sob dipolo elétrico \vec{p} devido $\vec{E}(\vec{r})$.

(ii) \vec{B} não uniforme (Zangwill)

considerar um dipolo pontual \vec{m} em $\vec{r} = 0$;
nesse caso, temos que Eq. (182.2):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{n}}{r^2}, \quad r \neq 0! \quad (187.1)$$

de modo análogo à função auxiliar $\rho_D(\vec{r})$ (veja pg. 105),
vamos introduzir uma densidade de corrente $\vec{J}_D(\vec{r})$

notas: $r/\vec{m} = \text{cte}$ (procedimento \neq pg. 181-182)

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m} \times \hat{n}}{r^2} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\underbrace{\vec{m} \left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \hat{n}}{r^2} \right)}_{4\pi \delta(\vec{r})} - \underbrace{(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\hat{n}}{r^2}}_{\vec{m} \times (\vec{\nabla} \times \hat{n}/r^2) + \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \hat{n}/r^2)} \right)$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \left(\vec{m} \delta(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{m} \cdot \hat{n}}{r^2} \right) \right) \quad (187.2)$$

Obs.: verifica-se que Eq. (182.2) = (187.2) !

Lei de Ampère (161.3):

$$\vec{J}_D(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{m} \delta(\vec{r})) = -\vec{m} \times \vec{\nabla} \delta(\vec{r}) \quad (188.1)$$

Eq. (188.1) : $\vec{J}_D(\vec{r}) \neq \vec{J}(\vec{r})$ original, apenas função auxiliar!

p/ dipolo pontual \vec{m} @ \vec{r}_0 :

$$\vec{J}_D(\vec{r}) = -\vec{m} \times \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (188.2)$$

- consideramos dipolo pontual em \vec{r} \oplus $\vec{B}(\vec{r})$,

Eq. (150.1) :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int d^3r' \vec{J}_D(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}) = \int d^3r' \vec{B}(\vec{r}') \times (\vec{m} \times \vec{\nabla}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}))$$

$$\text{como } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = \int d^3r' \vec{m} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}' \delta(\vec{r}' - \vec{r})) - \vec{\nabla}' \delta(\vec{r}' - \vec{r}) (\vec{B} \cdot \vec{m})$$

integração por partes \nearrow $\int d^3r' \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \vec{\nabla}' (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r}')) - \underbrace{\vec{m} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \vec{\nabla}' \cdot \vec{B}(\vec{r}')}_0$

$$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r})) \quad : \text{ força sob dipolo} \quad (188.3)$$

Obs. : Como $\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \vec{m} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$, p/ $\vec{m} = 0$

$$\text{se } \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad : \text{ análogo (105.3) !}$$

- de modo analogo, torque sob dipolo pontual,

$$\vec{n} = \int d^3n' \vec{n}' \times (\vec{J}_\omega(\vec{n}') \times \vec{B}(\vec{n}'))$$

$$= \int d^3n' \vec{n}' \times (\vec{m} \cdot \vec{B} \cdot \vec{\nabla}' \delta(\vec{n}-\vec{n}') - (\vec{m} \cdot \vec{B}) \vec{\nabla}' \delta(\vec{n}-\vec{n}'))$$

$$= \int d^3n' \vec{n}' \times \vec{m} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}' \delta(\vec{n}-\vec{n}')) - (\vec{m} \cdot \vec{B}) (\vec{n}' \times \vec{\nabla}' \delta(\vec{n}-\vec{n}'))$$

pr componente i:

$$N_i = \int d^3n' \epsilon_{ijk} n'_j m_k (B_s \partial'_s \delta(\vec{n}-\vec{n}')) -$$

$$- \epsilon_{ijk} n'_j (\partial'_k \delta(\vec{n}-\vec{n}')) m_s B_s$$

$$= - \int d^3n' \delta(\vec{n}-\vec{n}') \epsilon_{ijk} (m_k \partial'_s (n'_j B_s) - m_s \partial'_k (n'_j B_s))$$

$$= \epsilon_{ijk} m_s \partial_k (n_j B_s) - \epsilon_{ijk} m_k \partial_s (n_j B_s)$$

$$= m_s \underbrace{\epsilon_{ijk} \delta_{kj}}_0 B_s + m_s \epsilon_{ijk} n_j \partial_k B_s -$$

$$- \epsilon_{ijk} \delta_{sj} m_k B_s - \epsilon_{ijk} m_k n_j \underbrace{(\partial_s B_s)}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$= - \underbrace{\epsilon_{ijk} B_j m_k}_{(\vec{m} \times \vec{B})_i} + \underbrace{\epsilon_{ijk} n_j (m_s \partial_k B_s)}_{\partial_k (m_s B_s)}$$

$$(\vec{n} \times \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}))_i$$

$$\hookrightarrow \vec{N}(\vec{r}) = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{r}) + \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) \quad (190.1)$$

notas: se dipolo pontual em $\vec{r}=0 \rightarrow (190.1) = (186.1)$

• Resumo casos (i) e (ii):

efeito \vec{B} sob \vec{m} : $\vec{m} \parallel \vec{B}$ e \vec{m}, \vec{B} sentidos iguais (190.2)

- energia potencial dipolo sob \vec{B} ,

notas Eq. (188.3):

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot (\vec{m} \cdot \vec{B}) = 0$$

$$\hookrightarrow U = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (190.3)$$

notas que (190.3) é análogo à Eq. (104.2) (\vec{p} sob \vec{E})

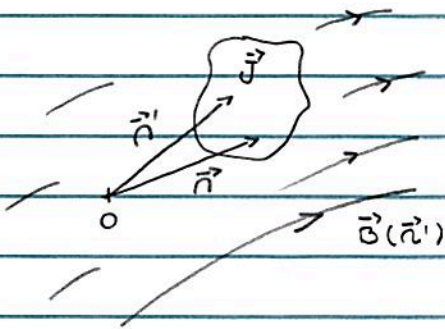
entretanto, Eq. (190.3) não é a energia total do dipolo magnético sob \vec{B} pois (190.3) não inclui a energia necessária pr manter a corrente estacionária I (veja Secs. 15.1 e 15.2, Feynman, vol. II)

- Obs. sobre Eq. (188.3): veja Sec. 15.4, Purcell pr determinação de \vec{F} via estudo caso particular.

• Alternativa (ii) \vec{B} não uniforme,

consideram distribuição de corrente estacionária $\vec{J}(\vec{r}')$ sob campo magnético $\vec{B}(\vec{r}')$ que "varia lentamente".

de modo análogo ao cálculo \vec{F} sob dipolo elétrico, pg. 99.



$$\vec{B}(\vec{r}') = \vec{B}(\vec{r}) + [(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{B}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \vec{F} &= \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{B}(\vec{r}') \\ &= \underbrace{\left[\int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') \right]}_0 \times \vec{B}(\vec{r}) - \underbrace{\left[\int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') \right]}_0 \times (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$+ \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{r})$$

pr componente i :

$$F_i = \epsilon_{ijk} \int d^3r' J_k(\vec{r}') r'_j \nabla_j B_k(\vec{r})$$

verifica-se que (veja Sec. 11.2, Zangwill)

$$\int d^3r' J_k(\vec{r}') r'_j = -\frac{1}{2} \epsilon_{kjp} \int d^3r' (\vec{r}' \times \vec{J})_p = -\epsilon_{kjp} m_p$$

onde

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \vec{r} \times \vec{J}(\vec{r}) : \text{momento dipolo magnético}$$

$$\hookrightarrow F_i = - \underbrace{\epsilon_{ikl} \epsilon_{kjp}}_{\substack{+\epsilon_{kil} \epsilon_{kjp} \\ \delta_{ij} \delta_{lp} - \delta_{ip} \delta_{jl}}} m_p \nabla_j B_l = m_e \nabla_i B_e - m_i \nabla_e B_e$$

$$+\epsilon_{kil} \epsilon_{kjp}$$

$$\delta_{ij} \delta_{lp} - \delta_{ip} \delta_{jl}$$

$$\hookrightarrow \vec{F} = m_e \vec{\nabla} B_e - \underbrace{\vec{m} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0}$$

como $\vec{m} = \text{cte}$

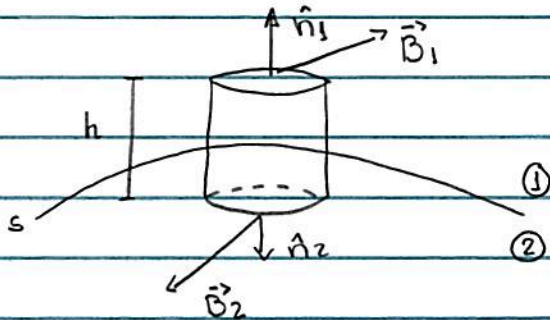
$$\hookrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) : \text{Eq. (188.3) !}$$

· Condições de contorno.

de modo análogo ao campo eletrostático, veja pg. 39,

ideia: analisar o comportamento de $\vec{B}(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$
na vizinhança de uma superfície permeada
 por uma densidade superficial de corrente.

(i) consideran: superficie arbitrária S , $\vec{K} = \vec{K}(\vec{n})$
 ⊕ cilindro infinitesimal



caso geral:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

\downarrow
 w.o.d. sup. S

Eq. (159.3):

$$\oint_{\text{cilindro}} \vec{B} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \hat{n}_2) A = 0$$

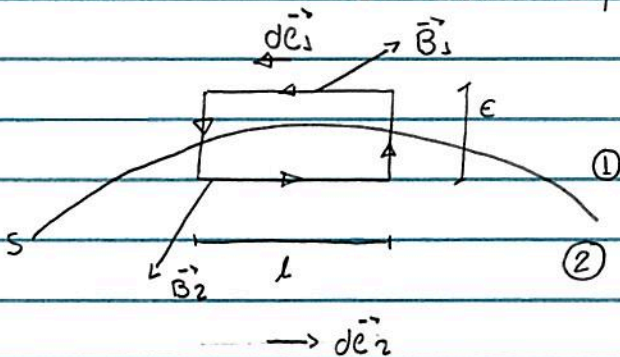
\hookrightarrow área base cilindro

definindo: $\hat{n} \equiv \hat{n}_1 = -\hat{n}_2$

$$\hookrightarrow B_1^\perp = B_2^\perp : \text{componente } \vec{B}^\perp \text{ a sup. e } \underline{\text{contínua}} \quad (176.1)$$

(ii) consideran: superficie arbitrária S , $\vec{K} = \vec{K}(\vec{n})$

⊕ curva fechada Γ



Eq. (162.1):

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} (\vec{B}_1 \cdot d\vec{e}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{e}_2) = \mu_0 I_{enc} = d\vec{e}_1 \cdot (\vec{K} \times \hat{n}) \mu_0$$

↑
Eq. (144.1)

definindo $d\vec{e} \equiv d\vec{e}_1 = -d\vec{e}_2$

$$\hookrightarrow \vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 (\vec{k} \times \hat{n})$$

$\hookrightarrow \hat{n} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{k}$: componente $\vec{B} \perp$ sup. e descontínua na superfície de $\mu_0 k$ (177.1)

(iii) sobre o potencial vetor,

p/ a escolha $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \xrightarrow{\text{Eq. (176.1)}} \hat{n} \cdot (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0$ (177.2)

como : $\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 (\vec{k} \times \hat{n}) = \vec{\nabla} \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2)$

$$\hookrightarrow \hat{n} \times \left(\vec{\nabla} \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) \right) = \mu_0 \vec{k}$$

$$= \underbrace{\vec{\nabla} \left(\hat{n} \cdot (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) \right)}_0 - (\hat{n} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) \quad (\text{veja pg. 16 M. 9})$$

(177.3)

$$\hookrightarrow (\hat{n} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = -\mu_0 \vec{k} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} - \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} = -\mu_0 \vec{k}$$

Resumo :

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0$$

(177.4)

$$\hat{n} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{k}$$

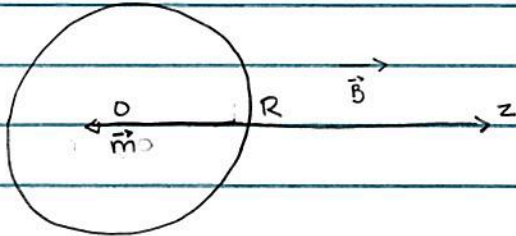
$$(\hat{n} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = -\mu_0 \vec{k}$$

Obs. : $\hat{n} \equiv \hat{n}_1$

\vec{B}_i e \vec{A}_i : vizinhança sup. S !

Ex. P. 11.15. Zangwill : consideran esfera supercondutora (SC), raio R

$$\oplus \vec{B} = \vec{B}_0 = \text{cte}$$



hipótese $\vec{B} = B_0 \hat{z}$

pr SC verifica-se que $\vec{B}_{in}(\vec{r}) = 0$, $r < R$

em principio, sistema pode ser estudado via sol. problema contorno

$$\text{notas : } \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_{self} + \vec{B}_0$$

esfera

$$\text{pr } r < R : \vec{B}_{self}(\vec{r}) + \vec{B}_0 = \vec{B}_{in} = 0$$

$$\text{pr } r > R : \text{verifica-se que } \vec{B}_{self}(\vec{r}) = \vec{B}_{out}(\vec{r}) !$$

ideia : determinar $\vec{B}_{self}(\vec{r})$ via condições de contorno (177.4)

consideran : esfera SC \oplus dipolo mag. pontual \vec{m} @ $\vec{r} = 0$

$$\hookrightarrow \vec{B}_{out}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{m}) + B_0 \hat{z} ; r > R$$

nesse caso determinan $\vec{B} \sim \text{det. } \vec{m} !$

$$\text{Eq. (177.4) : } \hat{n} \cdot (\vec{B}_{out} - \vec{B}_{in}) = \hat{n} \cdot \vec{B}_{out}(r=R) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi R^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{n})(\hat{n} \cdot \hat{n}) - \vec{m} \cdot \hat{n}) + B_0 \hat{z} \cdot \hat{n} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{m} = -\frac{2\pi R^3}{\mu_0} B_0 \hat{z}$$

de fato, verifica-se que $\vec{B}_{\text{seef}} \sim I_{\text{ind}} @$ superfície esférica

$$\text{como } \hat{n} \times (\vec{B}_{\text{out}} - \vec{B}_{\text{in}}) = \hat{n} \times \vec{B}_{\text{out}} (n=R) = \mu_0 \vec{K}$$

$$\hookrightarrow \mu_0 \vec{K}(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left(3(\vec{m} \cdot \hat{n}) \underbrace{(\hat{n} \times \hat{n})}_0 - \vec{m} \times \hat{n} \right) + B_0 \hat{n} \times \hat{z}$$

$$\hookrightarrow \vec{K}(\theta) = \frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} (\hat{n} \times \hat{z}) = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin\theta \hat{\phi} \quad (*)$$

notar: $(*) = \vec{K}(\theta)$ p/ esférica $\oplus \vec{\omega} = \omega \hat{z}$, pg. 182.2

identificando $\sigma \omega R \rightarrow -3B_0/2\mu_0$

$$\hookrightarrow \vec{m} = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin\theta \hat{\phi} : \text{momento dipolo mag. esfera}$$

$$\text{Ex. 5.11 G. } \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{1}{2} B_0 \sin\theta \hat{\phi}, & r < R \\ -\frac{1}{2} \frac{B_0 R^3 \sin\theta \hat{\phi}}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}_{\text{seef}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\phi) \hat{n} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta}$$

$$= -B_0 (\cos\theta \hat{n} - \sin\theta \hat{\theta}) = -B_0 \hat{z}, \quad r < R$$

$$\hookrightarrow B_{\text{in}} = B_{\text{seef}} + B_0 \hat{z} = 0!$$