Campos magnéticos na matéria.

vimos que:

distribuição de correntes I ou $\vec{J}(\vec{r})$ $\in$ vácuo $\xrightarrow[\text{Lei de Biot-Savart (152.2)}]{}$ $B_{VAC}(\vec{r})$

se I ou $\vec{J}(\vec{r})$ $\in$ meio magnético $\longrightarrow$ $\vec{B}(\vec{r}) \neq \vec{B}_{VAC}(\vec{r})$

caso geral

Obs.: Lembrar $\vec{E}(\vec{r})$ em um dielétrico!

· ideia descrição (macroscópica) material magnético:

- átomo = $\underbrace{\text{núcleo} \oplus \text{elétrons em movimento}}$

~ "pequenas" correntes localizadas ao redor núcleo = correntes atômicas

$\rightarrow \vec{B}(\vec{r})$

de fato,

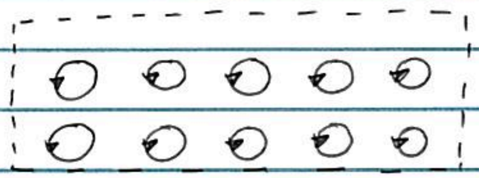
correntes atômicas ≈ momento de dipolo magnético $\vec{m}$

vimos que

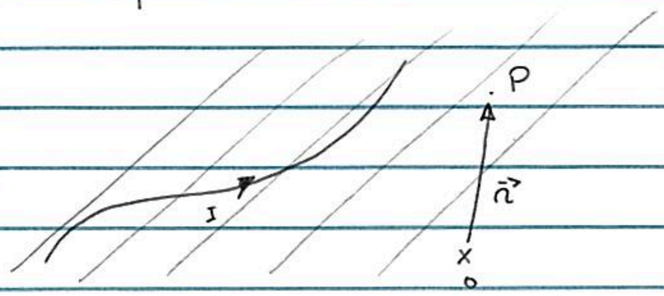
- $\vec{A}(\vec{r})$ ~ distribuição de correntes $\in$ esfera raio R ≃ $\vec{A}(\vec{r})$ associado $\vec{m}$ p/ $r \gg R$

- mom. dipolo $\vec{m}$ sob $\vec{B}_{ext}$ $\rightarrow$ $\vec{m} \parallel \vec{B}_{ext}$ ou $\vec{m}$ "responde" $\vec{B}_{ext}$.

↳ material magnético = conjunto dipolos magnéticos (pontuais)
~ correntes (atômicas) localizadas.



Dessa forma,



↳ $\vec{B}_{TOT}(\vec{r}) = \vec{B}_{ext}(\vec{r}) + \vec{B}_{SELF}(\vec{r})$

campo magnético externo, e.g., fio
ou
$\vec{B}$ ~ correntes de transporte (elétrons livres)

↳ campo magnético
~ dipolos pontuais $\vec{m}$ ~
~ correntes localizadas.

Obs. : notar similaridade descrição macroscópica dielétrico polarizado = conjunto de dipolos elétricos pontuais

· Magnetização $\vec{M}(\vec{r})$,

dada a similaridade entre as descrições macroscópicas de um dielétrico polarizado e um material magnético magnetizado (conjunto respectivos dipolos), é útil introduzir um vetor análogo à $\vec{P}(\vec{r})$ p/ materiais magnéticos :

$$\vec{M}(\vec{r}) = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \vec{r} \in \Delta V}} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \vec{r} \in \Delta V}} \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{m}_i : \underline{\text{magnetização}} \quad (191.1)$$

onde $\Delta \vec{m} = \sum_i \vec{m}_i$, $m_i \in \Delta V$.

↳ lembrar : $\Delta V << V_{AMOSTRA}$, porém
$\Delta V >> V_{ÁTOMO/MOLÉCULA}$

notar :

Eq. (190.2) -> material mag. sob $\vec{B}_{ext}$:
$\vec{M} \parallel \vec{B}$ e $\vec{M}$ e $\vec{B}$ sentidos iguais

entretanto, experimento indica resposta material ($\vec{M}$) ao campo $\vec{B}$ é mais complexa

↳ Classificação materiais magnéticos :

- materiais paramagnéticos : $\vec{M} \neq 0$ se $\vec{B}_{ext} \neq 0$ (apenas)
$\vec{M} \parallel \vec{B}$ e sentidos iguais

Paramagnetismo

Ex. : Na, Al

- materiais diamagnéticos : $\vec{M} \neq 0$ se $\vec{B}_{ext} \neq 0$ (apenas)
$\vec{M} \parallel \vec{B}$ e sentidos opostos

Diamagnetismo

Ex. : H_2O, Cu, diamante

- materiais ferromagnéticos : $\exists$ magnetização permanente,
i.e. $\vec{M} \neq 0$ se $\vec{B}_{ext} = 0$!

Ferromagnetismo (FM)

Ex.: Fe, Co, Ni

notar:

(190.2) ~ paramagnetismo

↳ mecanismo diamagnetismo e FM ?

de fato, origem $\vec{m}$ átomos e moléculas:

(i) momento angular orbital elétrons ~ diamagnetismo

(ii) " " intrínseco (spin)
elétrons, prótons ~ paramagnetismo, FM

próximas etapas:

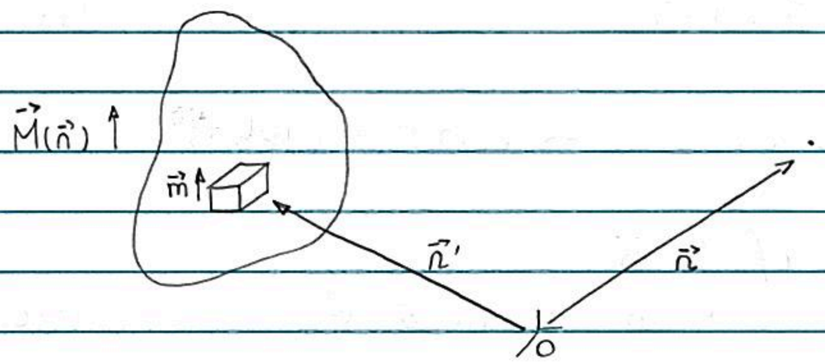
(i) considerar material magnetizado e descrito por vetor magnetização $\vec{M}(\vec{r})$

(ii) algumas considerações microscópicas sobre diamagnetismo e FM.

- Campo magnético de um material magnetizado

considerar material, magnetização $\vec{M}(\vec{r})$

1ª etapa : determinar $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$



p/ dv' em $\vec{r}'$: $d\vec{m}(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}')\,dv'$

Eq. (182.2), $\vec{A}(\vec{r})$ p/ dipolo pontual :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{d\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,d^3r'$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{M}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad (193.1)$$

de modo análogo ao dielétrico polarizado, vamos utilizar

$$\vec{\nabla}'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = +\,\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

p/ reescrever (193.1) :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\vec{M}(\vec{r}')\times\vec{\nabla}'\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

como

$$\vec{A}\times(\vec{\nabla}f) = f(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{\nabla}\times(f\vec{A})$$, veja pg. 16M

$$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r' \, \frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\int_V d^3r' \, \vec{\nabla}'\times\left(\frac{\vec{M}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)}_{-\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\times d\vec{S}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

fronteira volume V

definindo:

$\vec{K}_b(\vec{r}) = \vec{K}_M(\vec{r}) = \vec{M}\times\hat{n}$: densidade superficial de correntes ligadas / correntes de magnetização

$\vec{J}_b(\vec{r}) = \vec{J}_M(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{M}$: densidade de correntes ligadas / correntes de magnetização

$$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V d^3r' \, \frac{\vec{J}_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{K}_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dS \qquad (194.1)$$

Obs.: notar similaridade Eq. (109.1)

Lei de Biot-Savart (152.3) e (152.4):

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{(\vec{M}(\vec{r}\,')\times\hat{n})\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dS \; +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{(\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{r}\,'))\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3r' \qquad (194.2)$$

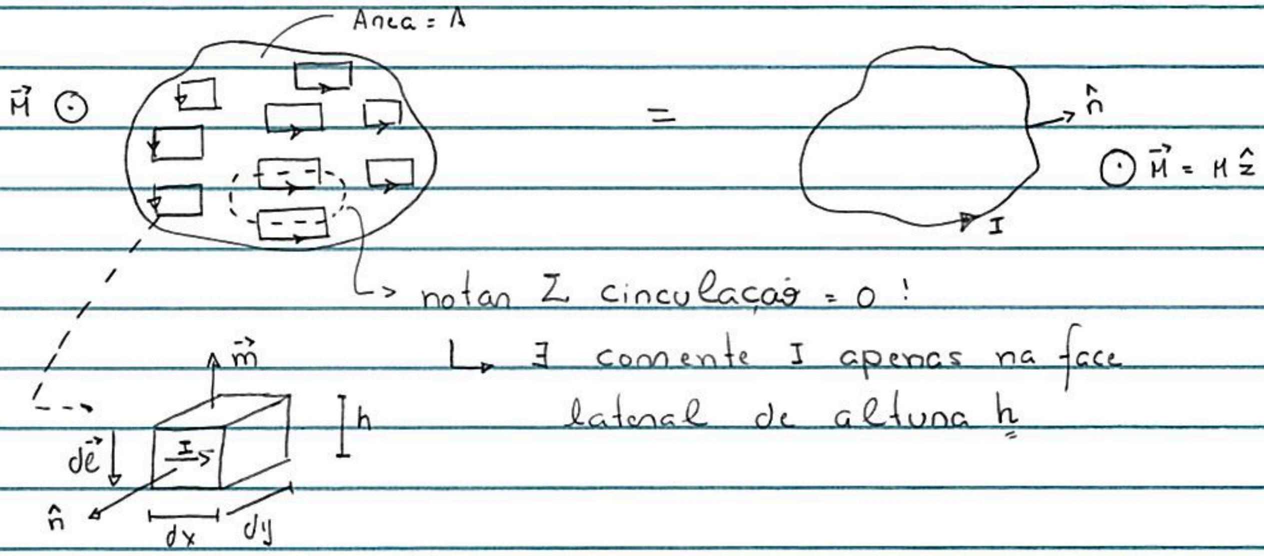
Eq. (194.2): campo magnético devido material magnetizado.

· sobre as correntes ligadas / correntes de magnetização

ideia : verificar que $\vec{K}_M$ e $\vec{J}_M$ correspondem a distribuições de corrente.

(i) sobre $\vec{K}_M$

considerar material área A, altura h, magnetização $\vec{M} = M\hat{z} = cte$



↳ notar Σ circulação = 0 !

↳ ∃ corrente I apenas na face lateral de altura h

temos que : $\vec{m} = \vec{M}\,dx\,dy\,h = I\,dx\,dy\,\hat{z}$

Eq. (194.1) : $I = \int_{\Gamma} \vec{K}\cdot(\hat{n}\times d\vec{\ell}) = -\vec{K}\cdot(\hat{n}\times\hat{z})\,h$

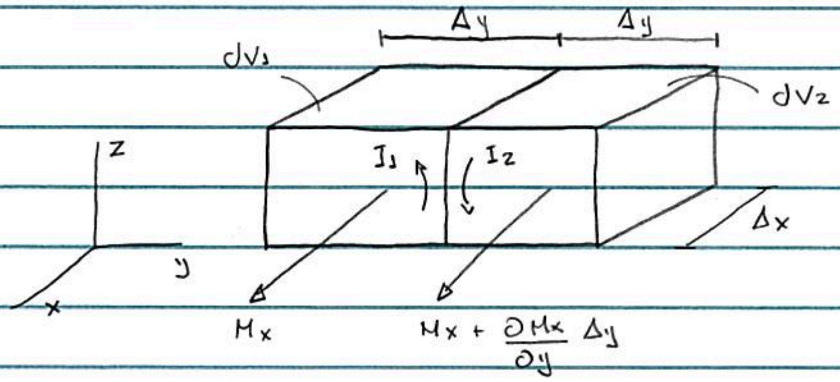
↳ $M = \hat{z}\cdot(\hat{n}\times\vec{K})$ ou $\vec{M} = (\hat{n}\times\vec{K}) \rightarrow \vec{K} = \vec{M}\times\hat{n}$

notar K_M : Σ "pequenas" correntes localizadas = corrente líquida na superfície !

(ii) sobre $\vec{J}_M$

considerar material, magnetização $\vec{M} = \vec{M}(\vec{r})$

p/ dois elementos de volume infinitesimais ∈ material:

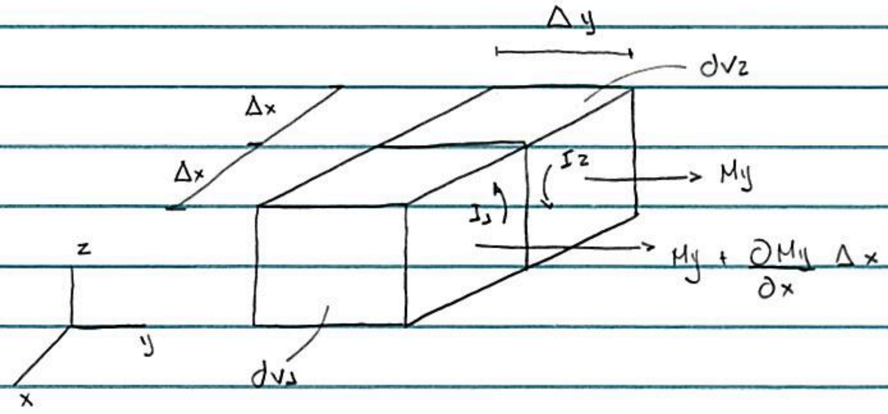


p/ volume dV_1 : $M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I_1 \Delta y \Delta z$

" " dV_2 : $\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta y \Delta z = I_2 \Delta y \Delta z$

$\hookrightarrow I_1 - I_2 = -\frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta y \Delta x = I_z$ (1)

de modo análogo,



p/ volume dV_1 : $\left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial x}\Delta x\right)\Delta x \Delta y \Delta z = I_1 \Delta x \Delta z$

$\rightarrow I_1 - I_2 = \frac{\partial M_y}{\partial x}\Delta x \Delta y = I_z$ (2)

" " dV_2 : $M_y \Delta x \Delta y \Delta z = I_2 \Delta x \Delta z$

↳ (1) + (2) : $I_z = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$

↳ $(J_M)_z = \frac{I_z}{\Delta x \Delta y} = (\vec{\nabla} \times \vec{M})_z$

· Alternativa : $\vec{B}$ devido material magnetizado (Reitz).

$\vec{\nabla} \times$ Eq. (193.1) :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\vec{M}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right)} d^3r'$$

(veja pg. 16 M)
$$\underbrace{\vec{M}(\vec{r}\,')\, \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}_{(\mathrm{I})} - \underbrace{(\vec{M}(\vec{r}\,') \cdot \vec{\nabla}) \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}_{(\mathrm{II})}$$

notar:

$$(\mathrm{I}) : \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \, \vec{M}(\vec{r}\,') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}_{4\pi\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')} = \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$$

como (veja pg. 16 M, Eq. (9))

$$\vec{\nabla} \left(\vec{M}(\vec{r}\,') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \right) = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} + \underbrace{\vec{M} \times \left(\vec{\nabla} \times \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}_{-\nabla 1/|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right)}_{= 0}$$

↳ $(\mathrm{II}) : -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \, \vec{M}(\vec{r}\,') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$

definindo,

$$\varphi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{M}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad : \text{função escalar} \tag{198.1}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla}\varphi_M(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r}) \quad : \text{campo magnético devido material magnetizado} \tag{198.2}$$

é possível reescrever (198.1):

como
$$\frac{\vec{M}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \vec{M}\cdot\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underset{\text{Eq. (16M.5)}}{=} \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) - \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\hookrightarrow \varphi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}')\cdot\hat{n}\, ds}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r' \, \frac{(-\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(\vec{r}'))}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\hookrightarrow$ fronteira volume V

definindo

$\sigma_M(\vec{r}) = \hat{n}\cdot\vec{M}(\vec{r})$: densidade sup. de carga magnética fictícia

$\rho_M(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}(\vec{r})$: " vol. " " " "

$$\hookrightarrow \varphi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\sigma_M(\vec{r}')\, ds}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r' \, \frac{\rho_M(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{198.3}$$

Obs. 1 : comparar Eqs. (109.1) e (198.3)

Obs. 2 : $\varphi_M(\vec{r})$, $\sigma_M(\vec{r})$ e $\rho_M(\vec{r})$ são funções auxiliares úteis p/ determinar $\vec{B}$ em (198.2)!

Ex.: exemplo 6.1 G.: considerar esfera raio R, uniformemente magnetizada; determinar $\vec{B}(\vec{r})$

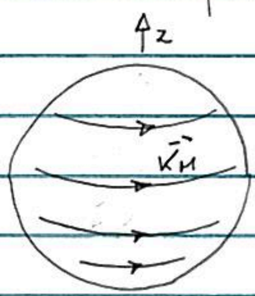
hipótese: $\vec{M} = M\hat{z}$

nesse caso: $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{z} \times \hat{n} = M \sin\theta\,\hat{\varphi}$

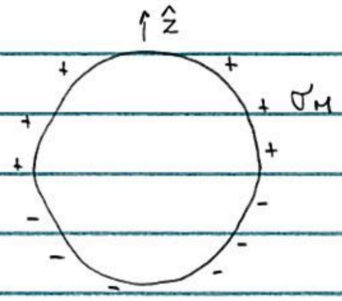
$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$

$\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} = \vec{M} \cdot \hat{n} = M \cos\theta$

$\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$



ou



Eq. (198.3):

$$\varphi_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_M(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, ds = \frac{1}{4\pi} \int \frac{M\cos\theta'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \left(R^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' \right)$$

2 casos:

(i) $r > R$,

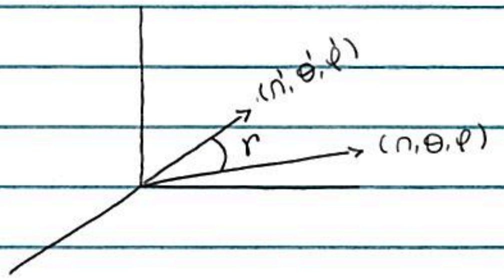
$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-1} = \left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\gamma \right)^{-1/2}$$

$$= \left(r^2 + R^2 - 2rR\cos\gamma \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} - 2\frac{R}{r}\cos\gamma \right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{\ell \geq 0} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell} P_\ell(\cos\gamma)$$

veja pg. 82.8

notar : γ : ∢ entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, $\neq \theta$ e θ' !



Lembrar teorema de adição p/ harmônicos esféricos, pg. 99.2 :

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos\left(m(\varphi-\varphi')\right)$$

Aqui, apenas o primeiro termo é $\neq 0$

$$\hookrightarrow \varphi_M(r,\theta) = \frac{MR^2}{4\pi}\frac{1}{r}\sum_{\ell\geq 0}\left(\frac{R}{r}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)\underbrace{\int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \cos\theta' P_\ell(\cos\theta')}_{\delta_{\ell,1}\cdot 2/3} * (2\pi)$$

$$= \frac{1}{3} M R^3 \frac{1}{r^2}\cos\theta$$

Eq. (198.2) : $\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla}\varphi_M(\vec{r})$, $r > R$

$$= -\mu_0\left(-\frac{2}{3}\frac{MR^3}{r^3}\cos\theta\,\hat{r} - \frac{1}{3}MR^3\frac{1}{r^3}\sin\theta\,\hat{\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{3}MR^3\frac{\mu_0}{r^3}\underbrace{\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}_{3(\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r} - \hat{z}}$$

definindo :

$\vec{m} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{M}$: momento de dipolo magnético esfera

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right)$$: comparar Eq. (182.1) !

(ii) $r < R$,

nesse caso

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r}{R}\cos\theta\right)^{-1/2} = \frac{1}{R}\sum_{\ell \geq 0}\left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\gamma)$$

$$\hookrightarrow \varphi_M(r,\theta) = \frac{MR^2}{4\pi}\,\frac{1}{R}\sum_{\ell\geq 0}\left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)\underbrace{\int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \cos\theta' P_\ell(\cos\theta')}_{\delta_{\ell,1}\cdot 2/3} \cdot (2\pi)$$

$$= \frac{1}{3} M r \cos\theta$$

Eq. (198.2): $\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{\nabla}\varphi_M(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}$

$$= -\mu_0 \underbrace{\left(\frac{1}{3} M\cos\theta\,\hat{r} - \frac{1}{3} M\sin\theta\,\hat{\theta}\right)}_{1/3\, M\, \underbrace{(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})}_{\hat{z}}} + \mu_0 \vec{M}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$$

$$\hookrightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3}\mu_0\vec{M}, & r < R \\ \frac{1}{3}\mu_0 \frac{R^3}{r^3}\left(3(\vec{M}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{M}\right), & r > R \end{cases} \qquad (198.4)$$

· Campo vetorial auxiliar $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r})$.

p/ material magnetizado, magnetização $\vec{M}(\vec{r})$,
$\exists$ correntes de magnetização $\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$
$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

↳ podemos escrever:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_M(\vec{r}) + \vec{J}_f(\vec{r}) \quad : \text{densidade total de corrente}$$

$\vec{J} \sim \vec{M}$!

↳ $\vec{J} \sim$ elétrons livres (199.1)

Ex.: corrente elétrica Fe, material FM !

Eq. (199.1) ⊕ Lei de Ampère:

$$\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_M = \vec{J}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f$$

Definindo: $$\vec{H}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r}) \qquad (199.2)$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f(\vec{r}) \qquad (199.3)$$
: lei de Ampère p/ meios magnéticos

Eq. (199.3) na forma integral:

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_f \qquad (199.4)$$

↳ corrente cargas livres através Γ

notar : $\vec{H}(\vec{r})$: análogo campo vetorial auxiliar
$\vec{D}(\vec{r})$ da eletrostática

↳ eq. fundamentais magnetostática p/ meios magnéticos

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

(200.1)

- $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_f(\vec{r})$

notar :

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \;\rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$, i.e. $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} \neq 0$, caso geral !

Obs. : incluindo contribuição $\vec{B} \sim \vec{J}_f$ em (198.2), temos que o campo magnético total é dado por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \vec{J}_f(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \mu_0 \vec{\nabla}\varphi_M(\vec{r}) + \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$$

(200.2)

(199.2) ⊕ (200.2)

↳ $$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{J}_f(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} - \vec{\nabla}\varphi_M(\vec{r}) \qquad (200.3)$$

se $\vec{J}_f(\vec{r}) = 0$

↳ $$\vec{H}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi_M(\vec{r}) \qquad (200.4)$$

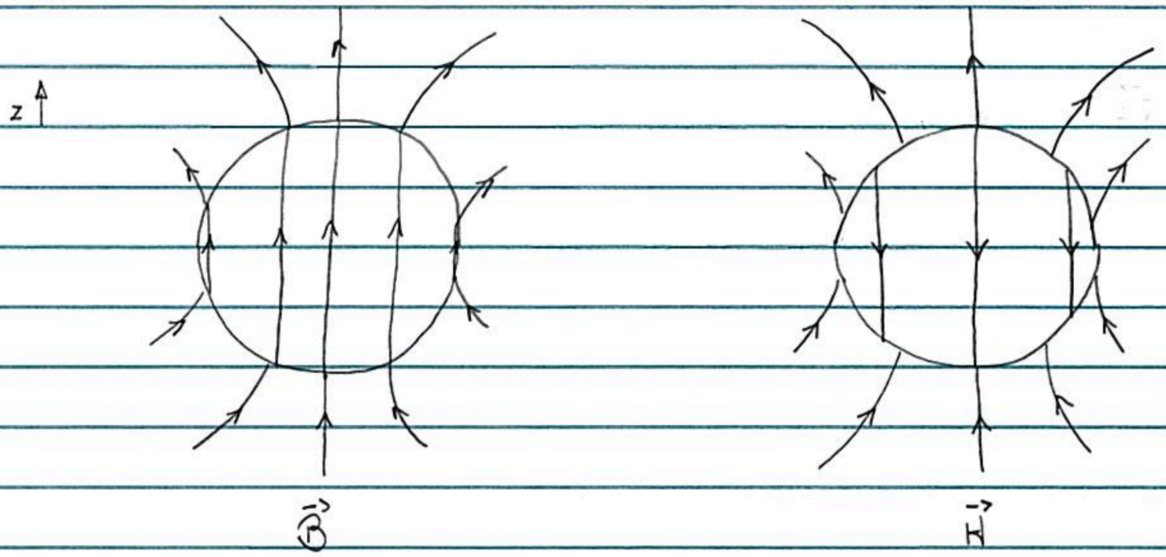
Ex.: p/ esfera uniformemente magnetizada, pg. 198.1.

Eq. (200.4):

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}\ \vec{M}\,, & r < R \\[2ex] \dfrac{1}{3}\ \dfrac{R^3}{r^3}\left(3(\vec{M}\cdot\hat{n})\,\hat{n} - \vec{M}\right), & r > R \end{cases} \qquad (200.5)$$

comparar Eq. (200.5) c/ exemplo pg. 111, esfera dielétrica uniformemente polarizada:

notar $\vec{E} \to \vec{H}$ se $\dfrac{\vec{P}}{\epsilon_0} \to \vec{M}$!



Adicionar exemplo ?

· Meios magnéticos lineares,

Lembrar que p/ materiais paramagnéticos e diamagnéticos
$\vec{M} \neq 0$ apenas se $\vec{B}_{ext} \neq 0$!

De fato, verifica-se experimentalmente que, p/ certos materiais

$$\vec{M} \propto \vec{H}$$

ou

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \qquad (201.1)$$

χ_m → susceptibilidade magnética do material : - cte adimensional
- propriedade do material

$\chi_m > 0$: paramagnetos
$\chi_m < 0$: diamagnetos

$|\chi_m| \sim 10^{-5}$

	Na	Al	H_2O	Cu
χ_m	$8.5 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$-9 \cdot 10^{-6}$	$-9.7 \cdot 10^{-6}$
	PARAMAG.		DIAMAG.	

material descrito pela relação constitutiva (201.1) : meio magnético linear

p/ meios lineares, temos que

Eq. (199.2) : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$

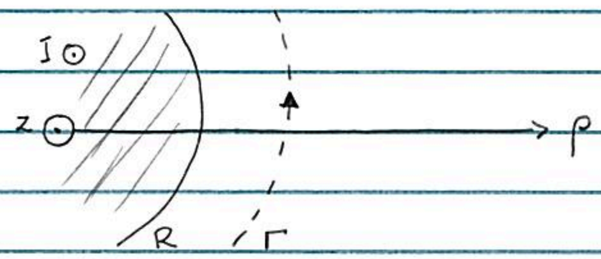
definindo $\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi_m)$: permiabilidade do material $\qquad (201.2)$

↳ $\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r})$: p/ meios lineares (201.2)

Obs.: caso geral, Eq. (201.1):

$$M_i = \chi_{ij} H_j + \chi^{(2)}_{ijk} H_j H_k + \dots$$

Ex. exemplo 6.2 G.: considerar cilindro material magnético, raio R, altura $h \gg 1$ ⊕ corrente uniforme I; determinar $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$.



por simetria: $\vec{B} \propto \hat{\varphi}$ → $\vec{H}$ e $\vec{M} \propto \hat{\varphi}$;
curva Γ = círculos raio ρ

Lei de Ampère (199.4):

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_f = \int_0^{2\pi} (H\hat{\varphi}) \cdot (\rho\, d\varphi\, \hat{\varphi}) = 2\pi\rho H$$

dois casos:

(i) $\rho > R$,

nesse caso $I_f = I$ → $\vec{H}(\rho) = \dfrac{I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$

como $\vec{M}(\vec{r}) = 0$ p/ $\rho > R$ → $\vec{B}(\rho) = \mu_0 \vec{H} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$

(ii) $\rho < R$,

$$\vec{J}_f = \frac{I}{\pi R^2}\hat{z}$$

$$\hookrightarrow I_f = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{s} = \int \left(\frac{I}{\pi R^2}\hat{z}\right)\cdot\left(\rho' d\rho' d\varphi' \hat{z}\right)$$

↳ círculo raio ρ

$$= \frac{I}{\pi R^2}\int_0^{\rho}\rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{I\rho^2}{R^2}$$

$$\hookrightarrow 2\pi\rho H = \frac{I\rho^2}{R^2} \longrightarrow \vec{H}(\rho) = \frac{I}{2\pi R^2}\rho\hat{\varphi}$$

$$\text{e} \quad \vec{B}(\rho) = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

hipótese: meio linear

$$\hookrightarrow \vec{B}(\rho) = \underbrace{\mu_0(1+\chi_m)}_{\mu}\vec{H}(\rho) = \frac{I\mu}{2\pi R^2}\rho\hat{\varphi}$$

$$\text{e} \quad \vec{M}(\rho) = \chi_m \vec{H}(\rho) = \frac{I\chi_m}{2\pi R^2}\rho\hat{\varphi} = M_\varphi(\rho)\hat{\varphi}$$

$$\hookrightarrow \vec{K}_M = \vec{M}\times\hat{n} = \vec{M}(\rho)\times\hat{\rho}\Big|_{\rho=R} = \frac{I\chi_m}{2\pi R}(\hat{\varphi}\times\hat{\rho}) = -\frac{I\chi_m}{2\pi R}\hat{z}$$

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \frac{I\chi_m}{2\pi R^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2)\hat{z} = \frac{I\chi_m}{\pi R^2}\hat{z}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\, \rho\,(1+\chi_m)\,\hat{\varphi} & , \ \rho < R \\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi \rho}\,\hat{\varphi} & , \ \rho > R \end{cases}$$

se $B_0(\rho)$: campo B material não magnético ($\chi_m = 0$)

$\hookrightarrow$ - $B = B_0$ p/ $\rho > R$

- $B > B_0$ p/ $\rho < R$ e mat. paramagnético;
  nesse caso I e J_M sentidos =s !

- $B < B_0$ p/ $\rho < R$ e mat. diamagnético;
  nesse caso I e J_M sentidos ≠s !

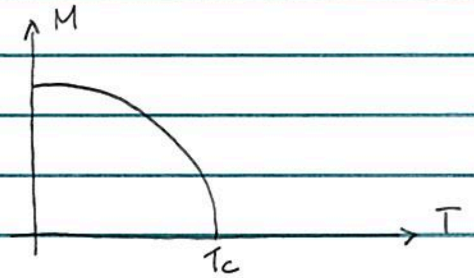
· Ferromagnetismo (FM),

material ferromagnético : - ∃ magnetização permanente, i.e., $\vec{M} \neq 0$ p/ $\vec{B}_{ext} = 0$;

- material não-linear, i.e., Eq. (201.1) não é válida.

características FM :

(i) ∃ T_c : temperatura crítica = temperatura de Curie



: magnetização × T

$T < T_c$: material FM (fase ordenada)
$T > T_c$: " paramagnético (ausência ordem magnética)

Ex. :

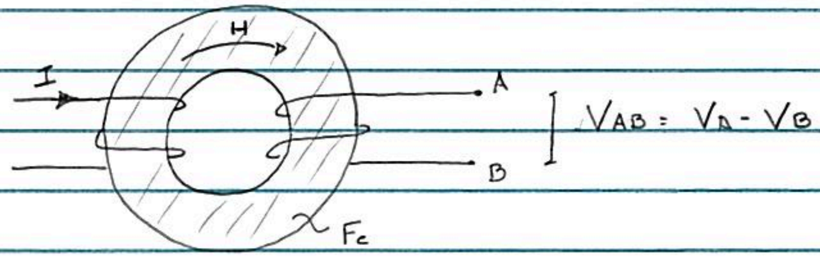
	Fe	Co	Ni
T_c (K)	1043	1394	631

Exemplo transição de fase de segunda ordem : FM - PARA
M : parâmetro de ordem

sequência: vamos considerar $T < T_c$!

(ii) curva de magnetização,

considerar o seguinte experimento:



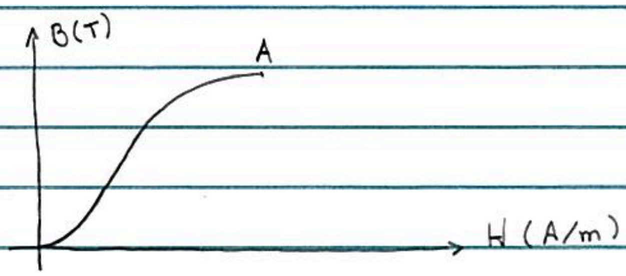
notar: $H \propto I$

$V_{AB} \propto \Phi_B$ © toroide Fe (veja próximo capítulo)

↳ $I \times V_{AB}$ ou $H \times B$, i.e.,

variação I ⊕ medida V_{AB} → curva B-H

hipótese: material inicialmente desmagnetizado, $\vec{M} = 0$;
verifica-se que (experimento)



: curva de magnetização

notar unidades B e H!

como $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ é possível determinar $\vec{M} = \vec{M}(H)$!

notar: aumento não-linear B p/ H pequeno
seguido saturação ~ M_{MAX}!

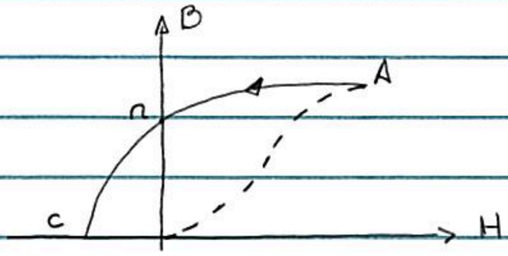
(iii) histerese.

considerar: material $\vec{M} \neq 0$ (pto $\underline{A}$ curva de magnetização)

procedimento: decréscimo $|\vec{H}|$;

inversão sentido $\vec{H}$ ⊕ aumento $|\vec{H}|$

verifica-se que (exp.):

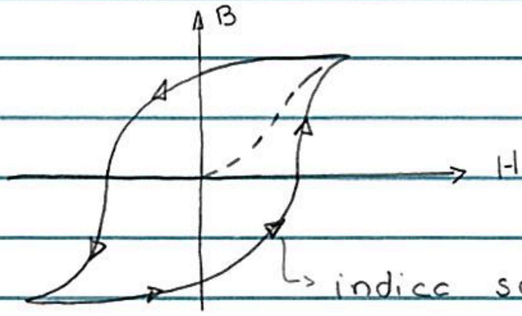


notar: - processo irreversível: linha contínua ≠ tracejada

- $\vec{B} \neq 0$ p/ $H = 0$ ou $\vec{M} \neq 0$ p/ $H = 0$ (ponto $\underline{r}$): remanência

- pto $\underline{c}$: $B = 0$ e $H \neq 0$: coercividade

De fato, variando-se $\vec{H}$ (módulo e sentido), verifica-se que



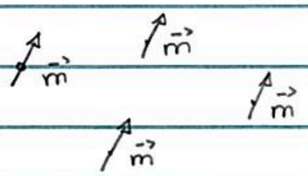
: curva de histerese

↳ indica sentido variação de H!

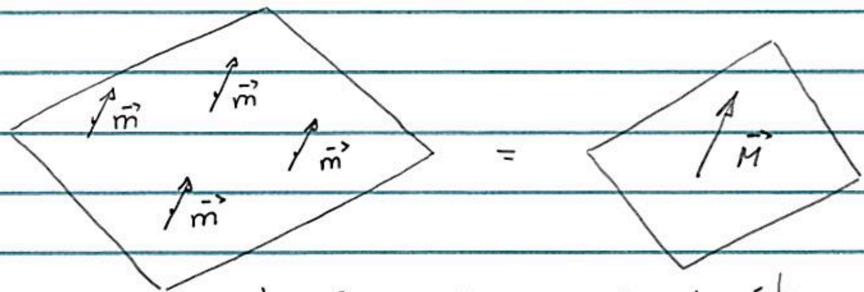
notar: material inicialmente desmagnetizado pode ser magnetizado através do processo acima!

· sobre domínios magnéticos,

p/ material FM momentos de dipolo $\vec{m}$ (vizinhos)
são alinhados (paralelos) ~ mec. quântica:

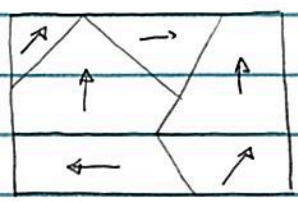


entretanto, esse comportamento não ocorre na amostra
inteira mas em "pequenas" regiões = domínios



domínio mag.: N >> 1 átomos
$\vec{m}_i$ alinhados

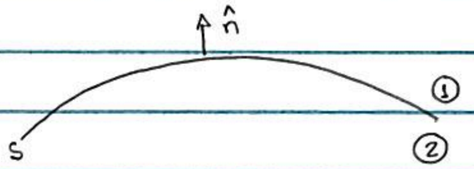
↳ descrição macroscópica
material FM =
= conjunto
domínios mag.
~ minimização
energia!



p/ detalhes: veja Sec. 11.11, Purcell
Sec. 13.9, Zangwill.

· condições de contorno,

considerar superfície arbitrária S ⊕ $\vec{K}_f = \vec{K}_f(\vec{r})$



de modo análogo às considerações feitas p/ campos magnéticos no vácuo, pgs. 175 - 177

(i) como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ p/ meios magnéticos

$$\hookrightarrow \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \qquad (206.1)$$

(ii) como $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f$

$$\hookrightarrow \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{K}_f \qquad (206.2)$$

notar:

Eq. (206.1) $\rightarrow$ $\hat{n} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = -\hat{n} \cdot (\vec{M}_1 - \vec{M}_2)$

Obs.: notar sentido $\hat{n}$;
$\vec{B}_i, \vec{H}_i, \vec{M}_i$: vizinhaça sup. S !

· Problemas de valores de contorno na presença meios magnéticos

2 hipóteses :

hipótese (1) : $\vec{J}_f = 0$

↳ eqs. magnetostática (200.1) :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M \quad : \quad \text{Eq. (200.4)}$$

hipótese (2) : meio linear ou $\vec{M}$ = cte

- meio linear : $\vec{B} = \mu\vec{H}$

↳ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\mu\nabla^2\varphi_M = 0$

- $\vec{M}$ = cte

↳ $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu_0\vec{\nabla}\cdot(\vec{H}+\vec{M}) = \mu\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\mu\nabla^2\varphi_M = 0$

em ambos os casos :

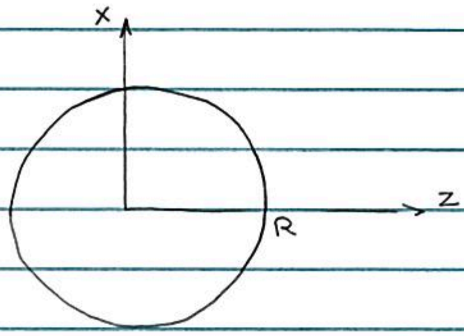
$$\nabla^2\varphi_M = 0 \qquad \text{: Eq. de Laplace} \qquad (207.1)$$

p/ função escalar $\varphi_M = \varphi_M(\vec{r})$

notar : situação formalmente análoga àquelas discutidas na eletrostática ;
<u>entretanto</u>, as condições de contorno são distintas !

Ex. : considerar esfera raio R, material magnético linear, centro = origem, sob campo magnético uniforme $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$; determinar $\vec{B}(\vec{r})$.

notar : sistema apresenta simetria azimutal !



Sobre as condições de contorno.

- $\vec{B}(r \gg R, \theta) = B_0 \hat{z}$

Como $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = -\mu_0 \vec{\nabla} \varphi_M \rightarrow \varphi_M(r \gg R, \theta) = -\frac{B_0 z}{\mu_0} = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos\theta$

- $\vec{K}_f = 0$

$\hookrightarrow \hat{n} \times (\vec{H}_{out} - \vec{H}_{in})\Big|_{\rho=R} = \hat{n} \times (\vec{H}_{out} - \vec{H}_{in})\Big|_{\rho=R}$

$\hookrightarrow H_{out,\theta}(R,\theta) = H_{in,\theta}(R,\theta)$, pois $H_\varphi = 0$!

- $\hat{n} \cdot (\vec{B}_{out} - \vec{B}_{in}) = 0 \cdot \hat{n} \cdot (\vec{B}_{out} - \vec{B}_{in})$

$\hookrightarrow B_{out,r}(R,\theta) = B_{in,r}(R,\theta) \longrightarrow \mu_0 H_{out,r}(R,\theta) =$
$= \mu H_{in,r}(R,\theta)$

resumo c.c. :

- $\varphi_M(r \gg R, \theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos\theta$ (1)

- $H_{out,\theta}(R,\theta) = H_{in,\theta}(R,\theta)$ (2)

- $\mu_0 H_{out,r}(R,\theta) = \mu H_{in,r}(R,\theta)$ (3)

solução geral (207.1) : $\varphi_M(R,\theta) = \sum_{l \geq 0} \left(A_l r^l + \frac{C_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$

- c.c. (1) $\Rightarrow$ $\varphi_M(r=0,\theta) < +\infty$

$$\hookrightarrow \varphi_M(r,\theta) = \begin{cases} \sum_\ell A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) \quad , \quad r < R \\ -\frac{B_0}{\mu_0} r P_1(\cos\theta) + \sum_\ell \frac{C_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) \; , \; r > R \end{cases}$$

como $\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi_M$

$$\hookrightarrow \vec{H}_{in}(r,\theta) = \sum_\ell (-\ell) A_\ell r^{\ell-1} P_\ell(\cos\theta)\,\hat{r} - A_\ell r^{\ell-1} P_\ell'(\cos\theta)\,\hat{\theta}$$

$$\vec{H}_{out}(r,\theta) = +\frac{B_0}{\mu_0} P_1(\cos\theta)\,\hat{r} + \frac{B_0}{\mu_0} P_1'(\cos\theta)\,\hat{\theta} +$$

$$+ \sum_\ell (\ell+1)\frac{C_\ell}{r^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta)\,\hat{r} - \frac{C_\ell}{r^{\ell+2}} P_\ell'(\cos\theta)\,\hat{\theta}$$

onde $P_\ell'(\cos\theta) = \dfrac{dP_\ell(\cos\theta)}{d\theta}$

- c.c. (2) : $\displaystyle\sum_\ell (-1) A_\ell R^{\ell-1} P_\ell'(\cos\theta) = \frac{B_0}{\mu_0} P_1'(\cos\theta) - \sum_\ell \frac{C_\ell}{R^{\ell+2}} P_\ell'(\cos\theta)$

$$\hookrightarrow -A_1 = \frac{B_0}{\mu_0} - \frac{C_1}{R^3} \quad \text{e} \quad C_\ell = A_\ell R^{2\ell+1} \; , \; \ell \neq 1 \qquad (4)$$

- c.c. (3) : $\displaystyle\sum_\ell \mu(-\ell) A_\ell R^{\ell-1} P_\ell(\cos\theta) = B_0 P_\ell(\cos\theta) +$

$$+ \sum_\ell \mu_0(\ell+1)\frac{C_\ell}{R^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta)$$

$\hookrightarrow -\mu A_1 = B_0 + \frac{2C_1}{R^3}$ e $-\mu \ell A_\ell R^{2\ell+1} = (\ell+1) C_\ell, \ \ell \neq 1$ (5)

(4) e $(5) \rightarrow A_1 = \frac{-3B_0}{\mu+\mu_0}$; $\frac{C_1}{R^3} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}$

$$A_\ell = C_\ell = 0, \ \ell \neq 1$$

$\hookrightarrow \vec{H}_{IN}(r,\theta) = \frac{3B_0}{\mu+2\mu_0} \underbrace{(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)}_{\hat{z}} = \frac{3\vec{B}_0}{\mu+2\mu_0}$

$\vec{H}_{OUT}(r,\theta) = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0 + \frac{B_0}{\mu_0}\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \underbrace{(2\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})}_{3(\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r} - \hat{z}}$

- p/ $r < R$,

$\vec{B}_{IN} = \mu \vec{H}_{IN} = \frac{3\mu}{\mu+2\mu_0}\vec{B}_0 = \mu_0(\vec{H}_{IN} + \vec{M})$

$\hookrightarrow \vec{M} = \frac{3}{\mu_0}\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}\vec{B}_0$ (210.1)

$\hookrightarrow \vec{K}_M = \vec{M}\times\hat{n} = \frac{3}{\mu_0}\frac{\mu-\mu_0}{\mu+2\mu_0}B_0(\hat{z}\times\hat{n}) = \frac{3(\mu-\mu_0)}{\mu_0(\mu+2\mu_0)}B_0\sin\theta\,\hat{\varphi}$

(210.2)

e $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M} = 0$

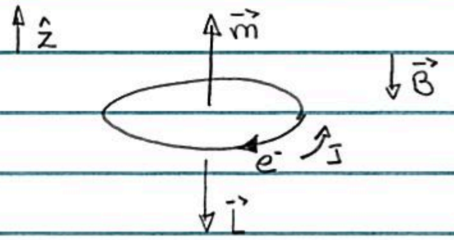
notar Eqs. (210.1) relacão entre sentidos $\vec{M}$ e $\vec{B}_0$ $\underline{\underline{e}}$
e (210.2): sentido $\vec{K}_M$: $\neq$ p/ PARAM.
$\underline{\underline{e}}$ DIAG.

· sobre diamagnetismo (p/ detalhes veja Sec. 11.5 Purcell)

ideia: verificar que diamagnetismo ~ movimento orbital e-

vamos considerar modelo microscópico clássico

considerar elétron mov. circular ao redor núcleo



v : velocidade e^-
r : raio órbita
T : período órbita
m_e : massa elétron

(i) $\vec{B} = 0$,

nesse caso: $I = \dfrac{q}{T} = \dfrac{q}{2\pi r/v} = \dfrac{qv}{2\pi r}$

↳ $m = \pi r^2 I = \frac{1}{2} q v r \rightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} q v r \hat{z}$: momento de dipolo e-

notar: como $L = m_e r v \rightarrow \vec{m} = -\dfrac{e}{2m_e}\vec{L}$ p/ elétron.

(ii) $\vec{B} = -B\hat{z}$

considerar Δt tal que $B: 0 \rightarrow B$

veremos que (lei de Faraday):

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

↳ trajetória elétron

↳ área circular definida por Γ.

$$\int_0^{2\pi} (E\hat{\varphi})\cdot(r\,d\varphi\,\hat{\varphi}) = -\frac{d}{dt}\int(-B\hat{z})\cdot(ds\,\hat{z})$$

$$2\pi r E = +\pi r^2 \frac{dB}{dt} \longrightarrow E = \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt}$$

como $m_e \frac{dv}{\cancel{dt}} = qE = \frac{1}{2} q r \frac{dB}{\cancel{dt}}$

$$↳ \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv = \frac{1}{2}\frac{qr}{m_e}\int_0^B dB' \longrightarrow \Delta v = \frac{1}{2}\frac{qr}{m_e} B$$

como $m = \frac{1}{2} q v r$

$$↳ \Delta m = \frac{1}{2} q r \Delta v = \frac{q^2 r^2}{4m_e} B$$: $\vec{B}_{ext}$ altera $\vec{m}$ elétron

de fato, temos que

$$\Delta\vec{m} = -\frac{q^2 r^2}{4m_e}\vec{B}$$: $\Delta\vec{m}$ varia sentido oposto $\vec{B}_{ext}$!

Obs.: p/ revisão campos estáticos, veja Cap. 1, Marion