

Revisar: cálculo vetorial

• vetor v.s. escalar,

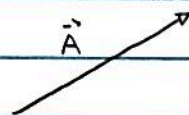
- escalar: magnitude

Ex.: massa, carga, densidade

• vetor: magnitude (módulo), direção e sentido (1ª ideia!)

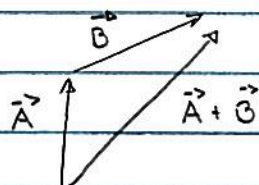
Ex.: posição, velocidade, força, campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$

se $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ vetores



↳ Operações:

(i) adição: $\vec{A} + \vec{B}$



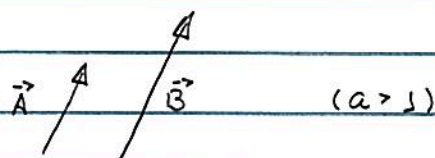
propriedades: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$: comutativa

$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$: associativa

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

(ii) multiplicação por escalar:

se $a \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{B} = a\vec{A}$



propriedade: $a(\vec{A} + \vec{B}) = a\vec{A} + a\vec{B}$: distributiva

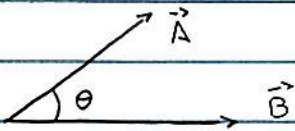
(iii) produto escalar:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$: escalar

(1.1)

→ módulo $\vec{A}$: $A = |\vec{A}|$

(2M)



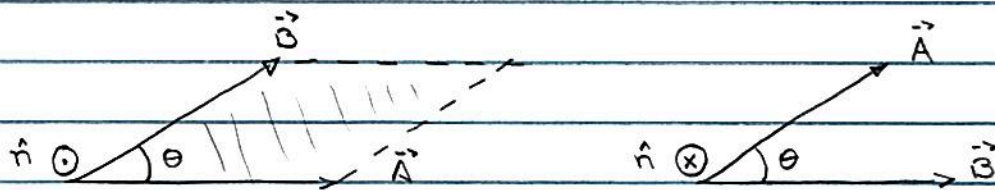
propriedades: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$: comutativa
 $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$: distributiva

notas: se $\vec{A} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$: módulo vetor $\vec{A}$

(iv) produto vetorial:

$\vec{A} \times \vec{B} \equiv AB \sin \theta \hat{n}$: vetor (2.1)



notas: direção $\hat{n}$ = "mão direita"

propriedades: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$: distributiva
 $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

notas: se $\vec{A} \parallel \vec{B} \rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 0$

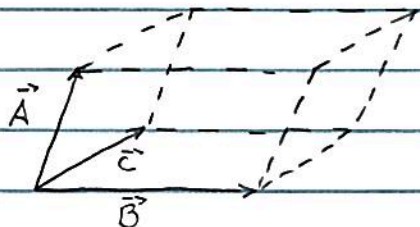
$|\vec{A} \times \vec{B}|$ = área paralelogramo definido por $\vec{A}$ e $\vec{B}$!

identidades:

(i) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$: escalar (2.2)

(ii) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$: vetor (2.3)

Lembrar: $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})| = \text{volume paralelepípedo definido por } \vec{A}, \vec{B} \text{ e } \vec{C}$



• Álgebra vetorial.

Representação vetor $\vec{A}$ em termos vetores unitários $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$
(base)

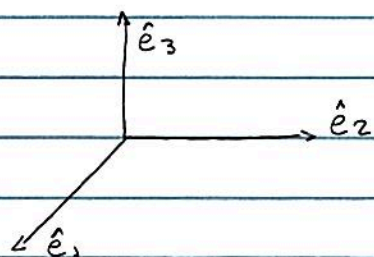
propriedades: $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1 = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_i$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0 = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0 \quad (3.1)$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3; \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1; \quad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$$

$\hookrightarrow \vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i$: representação
vetor $\vec{A}$

$\nearrow$ componente $\vec{A}$
na direção $\hat{e}_i$!



: mutuamente ortogonais !

Lembrar:

$$(i) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad : \text{delta de Kronecker} \quad (3.2)$$

$$(ii) \quad E_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = xyz, yzx, zxy : \text{permutações cíclicas } xyz \\ -1, & ijk = xzy, yxz, zyx \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.1)$$

propriedades: $\delta_{kk} = 3$ $\delta_{ij} E_{ijk} = 0$ $E_{ijk} E_{ijk} = 6$ (4.2)

$$E_{ijk} E_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

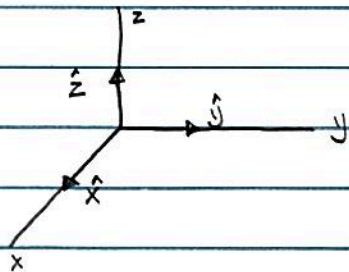
↳ Obs.: convenção Einstein: somatório sob índices repetidos!

↳ Eqs. (3.1): $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k E_{ijk} \hat{e}_k$ (4.3)

• representação vetor $\vec{A}$: coordenadas cartesianas,

vetores unitários (base) = versores $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

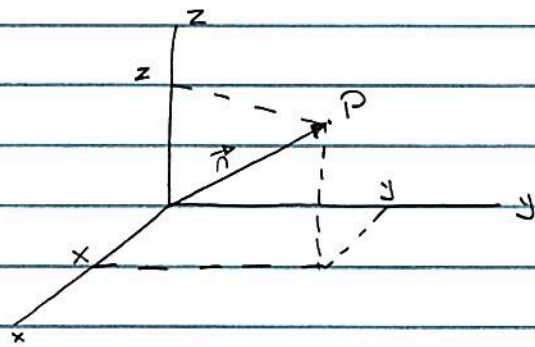
propriedades: $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$
 $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$ (4.4)
 $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$



↳ $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$: representação vetor $\vec{A}$ em coordenadas cartesianas

↳ componente $\vec{A}$ na direção $\hat{x}$

Ex.: vetor posição,



ponto P: descrito através
coordenadas cartesianas
(x, y, z)

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r_i\hat{e}_i : \text{vetor posição}$$

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} : \text{deslocamento infinitesimal}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x+dx, y+dy, z+dz)$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

operações vetoriais (i)-(iv) em termos componentes cartesianas:

(i) adição:

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z} \\ &= \sum_{i=1}^3 (A_i + B_i)\hat{e}_i\end{aligned}\quad (5.1)$$

(ii) multiplicação por escalar:

$$\vec{B} = a\vec{A} = aA_x\hat{x} + aA_y\hat{y} + aA_z\hat{z} = \sum_{i=1}^3 aA_i\hat{e}_i\quad (5.2)$$

(iii) produto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_i B_i\quad (5.3)$$

(iv) produto vetorial:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i A_j B_k = \epsilon_{ijk} \hat{e}_i A_j B_k$$

ou $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$: notas soma sob "j" e "k" !

notas:

$$\text{Eq. (2.2): } \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

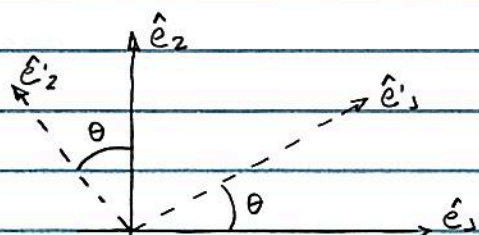
Exercício: utilizar ϵ_{ijk} e verificar Eq. (2.3)

Transformações ortogonais,

considerar: referencial (REF) O , base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$

" " O' , base $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$

hipótese: REF $O' = \text{REF } O \oplus$ rotação ângulo θ w.r.t. $\hat{e}_3$



notar: $\hat{e}'_1 = \cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2$

$\hat{e}'_2 = -\sin\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{e}_2$

$\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$

ou $\hat{e}'_i = \sum_j A_{ij} \hat{e}_j$; $i = 1, 2, 3$

onde $\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: matriz ~ transformação de coordenadas

caso geral:

$\hat{e}'_i = A_{ij} \hat{e}_j$; $i = 1, 2, 3$ (7.1)

como $\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j &= \sum_{k,m} A_{ik} A_{jm} \underbrace{\hat{e}_k \cdot \hat{e}_m}_{\delta_{km}} = \sum_k A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \\ &= \sum_k A_{ik} A_{kj}^T = \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \hat{A} \cdot \hat{A}^T = \mathbb{I} \rightarrow \hat{A}^T = \hat{A}^{-1}$$

Definição: se matriz $\hat{A}$ descreve uma transformação ortogonal

$$\hookrightarrow \hat{A} \cdot \hat{A}^T = \hat{A} = \hat{A}^{-1} = \mathbb{I} \quad (8.1)$$

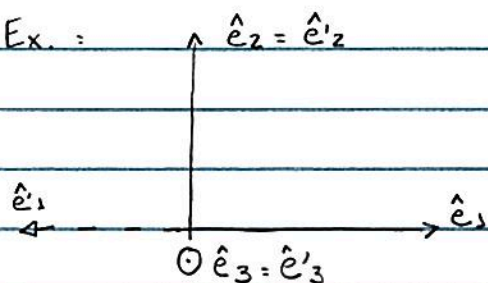
$$\text{notas: } \hat{A} \cdot \hat{A}^T = \mathbb{I} \rightarrow \det(\hat{A} \cdot \hat{A}^T) = \det \hat{A} \cdot \det \hat{A}^T = (\det \hat{A})^2 = 1$$

$$\hookrightarrow \det \hat{A} = \pm 1 \rightarrow \exists 2 \text{ classes de transf. } \underline{b}$$

$$\det \hat{A} = +1 : \text{notação}$$

$$\det \hat{A} = -1 : \text{reflexão, inversão}$$

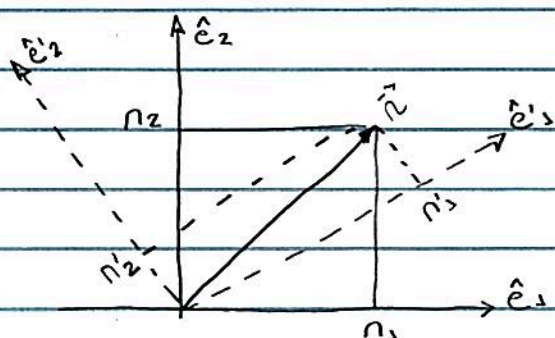
Ex.:



$$: \text{Reflexão} \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{Inversão}} : \hat{e}_i = -\hat{e}_i \rightarrow A_{ij} = -\delta_{ij} \text{ ou } \hat{A} = -\hat{I}_{3 \times 3}$$

considerar vetor $\vec{n}$ sob transf. de coordenadas $\hat{A}$ (notação)



: transf. passiva =

= vetor fixo,

REFs transformados

$$\hookrightarrow \vec{n} = \sum_{i=1}^3 n_i \hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 n'_j \hat{e}'_j$$

$$\text{Eq. (7.1)} \nearrow = \sum_{ij} n'_j A_{ji} \hat{e}_i \rightarrow n_i = A_{ji} n'_j$$

$$\text{(8.1)} \swarrow \rightarrow n'_i = A_{ij} n_j \quad (9.1)$$

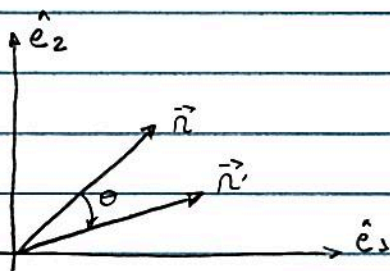
Eq. (9.1) : transformação componentes $\vec{n}$ sob
transf. ortogonal $\hat{A}$.

* Definição vetor : objeto formado por 3 componentes que
se transformam como (9.1) sob
transf. $\hat{A}$. (9.2)

detalhes (9.1) :

$$n_j = A_{kj} n'_k \rightarrow \sum_j A_{ij} n_j = \sum_j \underbrace{A_{ij} A_{kj}}_{\delta_{ki}} n'_k = n'_i$$

• Alternativa : transf. ativa = REF fixo
vetor transformado



nesse caso, $\vec{n}' = \hat{A} \vec{n}$ ou $n'_i = A_{ij} n_j$ comp. $\vec{n}'$ w.r.t. REF O
 $\hookrightarrow$ " $\vec{n}$ " " " "

matriz $\hat{A}$: pode ser vista como um operador que transforma
 $\vec{n}$ em $\vec{n}'$!

caso geral: Tenson contesiano

Definição: tenson contesiano ordem (rank) N :

objeto c/ 3^N elementos $T_{ijk...}$ tal que
 $\underbrace{\quad}_{N \text{ indices}}$

$$T'_{ijk...} = A_{i\ell} A_{jm} A_{kn} \dots T_{\ell mn \dots} \quad (10.1)$$

sob transformações ortogonais (passivas) $\hat{A}$.

notas: - tenson ordem 0: 1 componente, invariante sob $\hat{A}$: escalares

- tenson ordem 1: 3 componentes: vetor

$$\hookrightarrow T'_i = A_{i\ell} T_\ell \quad : \quad \text{Eq. (9.1)}$$

- tenson ordem 2: 9 componentes: matriz 3x3

$$\hookrightarrow T'_{ij} = A_{i\ell} A_{jm} T_{\ell m}$$

como $T'_{ij} = A_{i\ell} T_{\ell m} \hat{A}^T_{mj}$, podemos escrever

$$\vec{\hat{T}}' = \hat{A} \vec{\hat{T}} \hat{A}^T = \hat{A} \vec{\hat{T}} \hat{A}^{-1} : \text{transformação de similaridade}$$

Ex.: tenson $N=2$: tenson de inércia $\vec{\hat{T}}$

Exercício: mostrar que ângulo entre vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é invariante sob transf. $\hat{A}$.

Ex.: consideramos vetor $\vec{m} = \vec{u} \times \vec{v}$ sob transf. ortogonal $\hat{A}$,

verifica-se que (veja abaixo)

$$m'_i = (\det \hat{A}) A_{iq} m_q \quad (11.1)$$

comparamos Eqs. (9.1) e (10.1): $\vec{m}$ se transforma como um vetor apenas p/ rotações!

se $\hat{A}$ = reflexão ou inversão $\rightarrow \exists$ sinal "-" !!!

$\hookrightarrow$ Definição vetor polar = definição (9.2)

Definição pseudovetor ou vetor axial: objeto formado por 3 componentes que se transformam como (10.1) sob transf. $\hat{A}$.

Ex.: vetor polar: $\vec{r}, \vec{v}, \vec{F}, \vec{E}$

" axial: $\vec{\omega}, \vec{L}, \vec{B}$

verifica-se que:

- axial $\times$ polar = polar
- polar $\times$ polar = axial
- axial $\times$ axial = axial

$\searrow$ produto vetorial

notas:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{veja abaixo})$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

vamos verificar (11.1): em termos de componentes:

$$m_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

$$\hookrightarrow m'_i = \epsilon_{ijk} u'_j v'_k \stackrel{\text{Eq. (9.1)}}{=} \epsilon_{ijk} A_{js} u_s A_{ke} v_e$$

$$= \epsilon_{pjk} \underbrace{\delta_{ip}}_{A_{iq} A_{pq}} A_{js} A_{ke} u_s v_e = (\epsilon_{pjk} A_{pq} A_{js} A_{ke}) A_{iq} u_s v_e$$

$$\stackrel{\text{identidade}}{=} (\det \hat{A}) \epsilon_{qse}$$

$$= (\det \hat{A}) A_{iq} \underbrace{\epsilon_{qse} u_s v_e}_{m_q} = (\det \hat{A}) A_{iq} m_q$$

: Derivada veton. w.r.t. escalon,

considerar veton $\vec{u} = \vec{u}(t)$, → parâmetro

de modo análogo à derivada de uma função escalon $f = f(t)$, podemos definir:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} : \text{derivada } \vec{u} \text{ w.r.t. } \underline{t} \quad (12.1)$$

verifica-se que (12.1) é um veton:

p/ uma transformação ortogonal $\hat{A}$, temos que

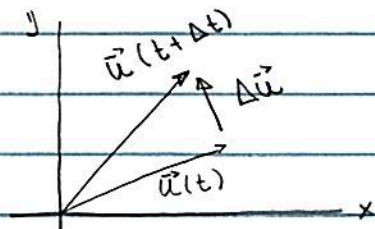
$$u'_i = A_{ij} u_j : \text{Eq. (9.1)} \quad \text{escalon } \underline{t} \text{ invariante sob } \hat{A}$$

$$\hookrightarrow \frac{du'_i}{dt'} = \frac{d}{dt'} (A_{ij} u_j) = A_{ij} \frac{du_j}{dt'} = A_{ij} \frac{du_j}{dt}$$

$A_{ij} \neq A_{ij}(t)$

como as componentes de $d\vec{u}/dt$ se transformam
como (9.1) $\rightarrow d\vec{u}/dt$ é um vetor!

geometricamente:



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

propriedades:

$$(i) \frac{d(\vec{u} + \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$(ii) \frac{d(\vec{u} \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v}$$

(13.1)

$$(iii) \frac{d(\vec{u} \times \vec{v})}{dt} = \vec{u} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v}$$

$$(iv) \frac{d(f\vec{u})}{dt} = f \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{df}{dt} \vec{u}$$

caso particular: vetor posição $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i n_i \hat{e}_i \right) = \sum_i \frac{d}{dt} (n_i \hat{e}_i) = \sum_i \frac{dn_i}{dt} \hat{e}_i + n_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}$$

$$\text{se } \hat{e}_i = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rightarrow \frac{d\hat{e}_i}{dt} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{v}(t) = \sum_i \frac{dn_i}{dt} \hat{e}_i = \dot{n}_i \hat{e}_i = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} : \text{velocidade} \quad (13.2)$$

de modo análogo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \frac{d^2 n_i}{dt^2} \hat{e}_i = \ddot{n}_i \hat{e}_i = \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} : \text{aceleração} \quad (14.1)$$

Obs.: se $\hat{e}_i$: coordenadas curvilíneas $\rightarrow \frac{d\hat{e}_i}{dt} \neq 0$ (veja abaixo)!

• Cálculo vetorial,

considerar: $f = f(\vec{r}) = f(x, y, z)$: função escalar

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z)$: função vetorial

(i) Operador gradiente,

se $f = f(x) \rightarrow df = \left(\frac{df}{dx} \right) dx$ $\rightarrow$ derivada função $f = f(x)$

se $f = f(x, y, z)$, temos que

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \right)}_{\equiv \vec{\nabla} f} \cdot (dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}) = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{e}$$

$\hookrightarrow$ Definição: gradiente da função $f = f(x, y, z)$:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} : \text{função vetorial} \quad (14.2)$$

Eq. (14.2): generalização derivada p/ função 2 ou mais variáveis!

notas: $df = |\vec{\nabla} f| |d\vec{r}| \cos \theta$

$\hookrightarrow \angle$ entre $\vec{\nabla} f$ e $d\vec{r}$

- se $\vec{\nabla} f \parallel d\vec{r} \rightarrow \cos \theta = 1 \rightarrow df_{\max}$ p/ $|d\vec{r}|$ fixo

$\hookrightarrow \vec{\nabla} f$: direção máxima variação f (15.1)

- se $\vec{\nabla} f \perp d\vec{r} \rightarrow \cos \theta = 0 \rightarrow df = 0$

$\hookrightarrow \vec{\nabla} f \perp$ curvas/superfícies $f = \text{cte}$ (15.2)

podemos escrever (14.2) como

$$\vec{\nabla} f = \underbrace{\left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{(*)} f$$

$\hookrightarrow$ podemos considerar (*) como um operador atuando sob $f = f(\vec{r})$

Definição operador gradiente:

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} : \text{operador vetorial} \quad (15.3)$$

Exercício: mostrar que, sob transformações ortogonais $\hat{A}$, $\vec{\nabla}$ se transforma como um vetor.

como $\vec{\nabla}$ é um vetor $\rightarrow$ podemos considerar sua ação sob uma função vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ via os produtos escalar e vetorial.

(iii) Divergente,

Definição divergente função vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$,

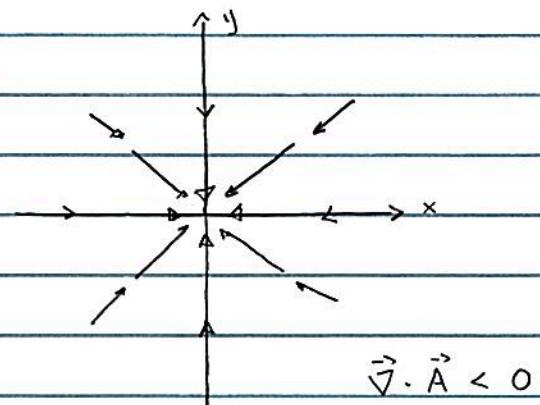
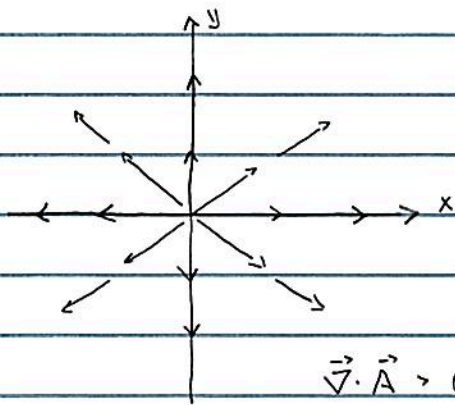
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z})$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial n_i} = \sum_i \partial_i A_i : \text{escalar} \quad (16.1)$$

Lembrar que: $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z) =$

$$= A_x(x, y, z) \hat{x} + A_y(x, y, z) \hat{y} + A_z(x, y, z) \hat{z}$$

ideia $|\vec{\nabla} \cdot \vec{A}|$: medida "divergência/convergência" da função vetorial (campo vetorial) w.r.t. plo $\underline{\underline{P}}$.



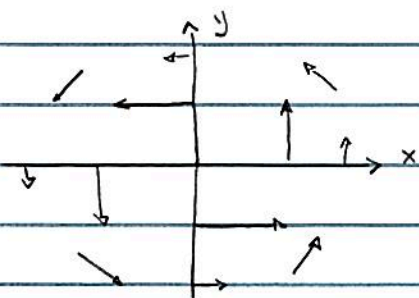
Ex.: campo elétrico carga pontual q ,

Lembrar lei de Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$

(iii) Rotacional.Definição notacional função vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \underbrace{\epsilon_{ijk} \hat{e}_i}_{\text{vetor}} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad (17.1)$$

ideia $\vec{\nabla} \times \vec{A}$: medida da "circulação" da função vetorial (campo vetorial) w.r.t. pto P .



Ex.: consideramos $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ e

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z) = \hat{z} \times \vec{r} = -y\hat{x} + x\hat{y}$$

Mostre que: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 2\hat{z}$$

Ex.: campo magnético fio retilíneo percorrido por corrente estacionária I .

Lembrar Lei de Ampère: $\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$

• Teoremas fundamentais do cálculo vetorial,

Lembrar: se $F = F(x)$

$$\hookrightarrow \int_a^b F(x) dx = f(b) - f(a), \text{ onde } F(x) = \frac{df}{dx}$$

$$\text{ou } \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a) \quad (20.1)$$

Eq. (20.1): teorema fundamental do cálculo.

pt/ funções escalares e vetoriais de 2 ou mais variáveis, temos:

(1) Teorema do gradiente,

$$I = \int_{\Gamma} (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{e} = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1) \quad (20.2)$$

notar: (19.2) depende apenas ptos inicial e final;
= "fronteira"

comparamos Eqs. (20.1) e (20.2)

$\hookrightarrow I = I$: independente curva Γ

- $I = 0$ se Γ curva fechada, i.e., $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$.

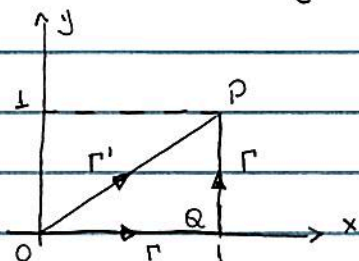
(3) integral de volume,

$$I = \int_V f(\vec{r}) dV$$

onde $dV = dx dy dz$ (coordenadas cartesianas)

Ex.: integral de linha,

considerar $\vec{F} = y\hat{x} + 2x\hat{y} = F_x(x,y)\hat{x} + F_y(x,y)\hat{y}$



$$\Gamma: 0 \rightarrow 1: d\vec{r} = dx \hat{x}$$

$$Q \rightarrow P: d\vec{r} = dy \hat{y}$$

$$\Gamma': d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y}$$

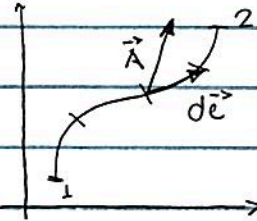
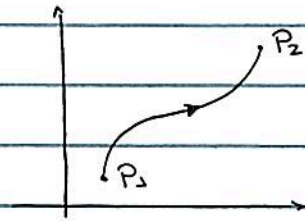
$$I = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_Q^P \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{F_x(x,0)}_0 dx + \int_0^1 \underbrace{F_y(1,y)}_2 dy = 2$$

$$I' = \int_{\Gamma'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \underbrace{F_x(x,x)}_x dx + \int_0^1 \underbrace{F_y(x,x)}_{2x} dx = 3/2$$

Integrais.

(1) integral de linha.



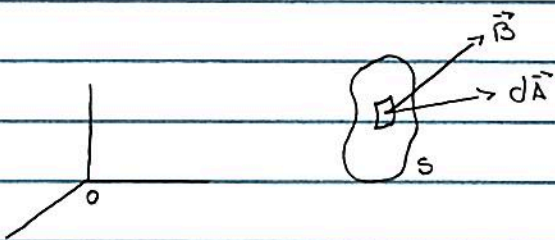
$$I \equiv \int_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{L} \quad ; \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$$

onde $d\vec{L} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$ (coord. cartesianas)

em particular, se Γ curva fechada,

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{L} : \text{circulação veton } \vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$$

(2) integral de superfície (= fluxo veton $\vec{B}$ através superfície S)

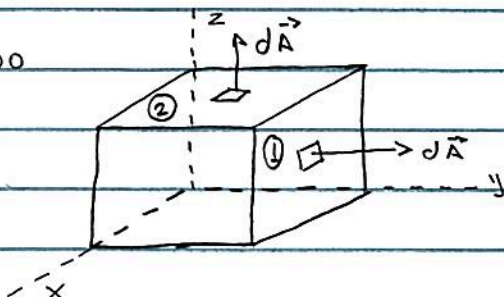


$d\vec{A} = dA \hat{n} : \text{elemento superfície}$
em sup. S

$$I = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} : \text{fluxo veton } \vec{B} \text{ através sup. } S.$$

Obs.: p/ sup. fechada, direção $\hat{n} = \text{"p/ fora"}$.

Ex.: cubo



p/ face ① : $d\vec{A} = dx dz \hat{x}$
" " ② : $d\vec{A} = dx dy \hat{z}$

(2) Teorema de Gauss (teorema do divergente)

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (21.1)$$

$\xrightarrow{S}$ sup. definida pelo volume V

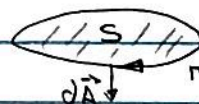
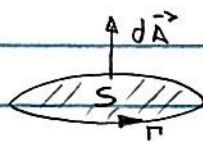
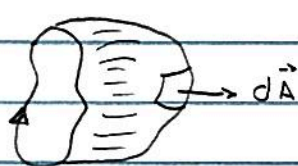
comparam Eqs. (20.1) e (21.1)

integral "derivada $\vec{B}$ " ~ componente $\vec{B}$ na "fronteira" = sup. S .

(3) Teorema de Stokes (teorema do rotacional)

$$I = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad (21.2)$$

$\xrightarrow{\Gamma}$ curva definida pela fronteira sup. S .

notas orientação Γ e direção $d\vec{A}$: "regra mão direita"

comparam Eqs. (20.1) e (21.2)

integral "derivada $\vec{B}$ " ~ componente $\vec{B}$ na
"fronteira" = curva Γ

↳ - I : mesmo valor p/ todas sup. S tais que fronteira = Γ

- $I = 0$ se sup. S fechada, i.e., $\Gamma \rightarrow 0$!

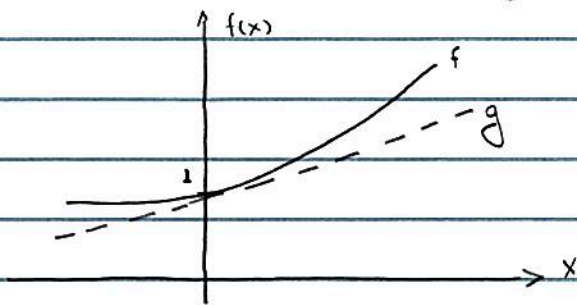
Série de Taylor (veja Apostoe I)

ideia: aproximar função $f(x)$ por um polinômio em torno de $x = a$.

Ex.: $f(x) = e^x$; $a = 0$.

1ª aproximação: determinar polinômio $g(x)$ tal que
 $g(0) = f(0)$ e $g'(0) = f'(0)$

como $f(0) = f'(0) = 1 \rightarrow g(x) = 1 + x$



2ª aproximação: determinar polinômio $h(x)$ tal que
 $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ e $h''(0) = f''(0)$

como $f''(0) = 1 \rightarrow h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

...

$P(x)$ tal que $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

$\hookrightarrow P(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$: série de Taylor
 onde $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = e^x$
 em torno $x = 0$.

caso geral: expansão $f(x)$ em torno de $x=0$,

$$\text{Se } P(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n$$

$$\hookrightarrow P'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \dots + nC_n x^{n-1}$$

$$P''(x) = 2C_2 + 2 \cdot 3 C_3 x + \dots + n(n-1)C_n x^{n-2}$$

notas: condição $P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

$$\hookrightarrow P(0) = C_0$$

$$P'(0) = C_1 = f'(0)$$

$$P''(0) = 2C_2 = f''(0)$$

$$P^{(3)}(0) = 2 \cdot 3 C_3 = f^{(3)}(0)$$

...

$$\rightarrow C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$\hookrightarrow P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k$$

se expansão em torno $x=a$:

$$\hookrightarrow P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k \quad (23.1)$$

$$\text{Ex.: } \sin x \approx x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots$$

(23.2)

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{1}{2} n(n-1) x^2 + \dots \quad ; \quad |x| < 1 !$$