Mecânica Clássica

- mecânica: descrição movimento partícula,
  " " sistema de partículas

- conceitos fundamentais: distância, tempo, força

- formalismos: Newton
  Lagrange
  Hamilton
  } ⊕ conceitos matemáticos avançados: mecânica analítica

Obs.: as três formulações são equivalentes!

- domínio: sistemas macroscópicos

- conexões necessárias:

  - sistemas microscópicos: mecânica quântica
  - velocidades
    ~ velocidade da luz (c): " relativística
  - massas >> 1: relatividade geral

- podemos dividir a mecânica em 3 sub disciplinas:

(i) Cinemática,

ideia: descrever, e.g. movimento partícula cuja trajetória é dada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

(ii) dinâmica,

ideia: estudo da relação entre o movimento de um corpo e as causas desse movimento

ou

estudo leis fundamentais ⟶ determinação $\vec{r} = \vec{r}(t)$

↳ conceito importante: <u>força</u>

(iii) estática,

ideia: estudo conjunto forças e torques que atuam sob um corpo em repouso

· noteino estudo: partícula única : F 315

sistema de partículas: corpo rígido
meios contínuos } : F 415

proposta trabalho: estudo dinâmica de uma única partícula

- inicial: mecânica Newtoniana
- later: " Lagrangiana

· Leis de Newton (Sec. XVII)

- leis (axiomas) fundamentais da mecânica clássica

(1) Na ausência de forças, um corpo permanece em repouso ou movimento uniforme (lei da inércia)

(2) A taxa de variação temporal do momento de um corpo é igual à força aplicada sob esse corpo

(3) se dois corpos exercem forças um sobre o outro, essas forças são iguais em módulo e opostas em sentido

Interpretações:

(i) Apenas (3) é uma lei, (1) e (2) são definições do conceito de força [Marion, Alonso e Finn]

possível problema [Symon]: como definir força na estática?

(ii) Considerar força como um conceito básico da teoria (e.g., determinada através mola). Nesse caso, (1), (2) e (3) são leis [Symon, Nussenzveig]

Comentários sobre as leis de Newton [Alonso e Finn, Monin, Nussenzveig]

(1) sobre a primeira lei.

- a interação entre partículas pode ser quantificada através do conceito de força;

uma partícula que não interage com outras partículas/meio é denominada partícula livre ou

partícula livre é tal que $\vec{F}$ sob partícula é nula

↳ podemos reescrever (1) como:

(1) uma partícula livre se movimenta c/ $\vec{v}$ = cte. (4.1)

- a fim de determinar o estado de movimento de uma partícula é necessário introduzir um observador = referencial

· Definição referencial inercial:

REF. que se movimenta c/ $\vec{v}$ = cte
ou (4.2)
REF. onde primeira lei é válida.

Ex.: estrelas fixas ≅ REF. inercial

↳ primeira lei útil p/ definir REF. inercial.

(2) sobre a segunda lei.

Eq. (4.1) : $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{v} = cte \longrightarrow \vec{F} \neq 0 \sim$ aceleração $\vec{a} \neq 0$!

Lembrar definição momento (linear) de uma partícula:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (5.1)$$

(2) : $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (5.2)$$

⊕ hipótese : $m = cte \longrightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (5.3)$

notar : Eq. (5.3) caso particular (5.2) !

↳ possíveis interpretações (5.2):

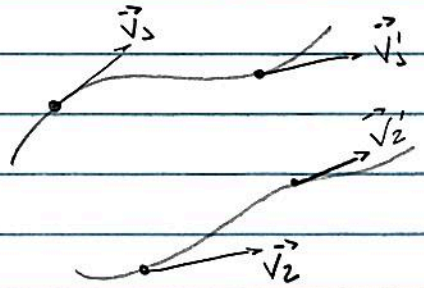
- definição do conceito de força;
- relaciona $\vec{F}$ sob partícula c/ variável dinâmica $\vec{p}$.

(3) sobre a terceira lei.

- (3) ~ princípio de conservação do momento linear (*)

vamos considerar um caso particular p/ exemplificar (*)

considerar sistema formado por duas partículas isoladas e interagentes



instante t : $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$: momento total sistema

" t' : $\vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$

Experimento : $\vec{P} = \vec{P}'$: princípio conservação momento linear (6.1)

Eq. (6.1) → $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) = \Delta\vec{p}_2$

como $\Delta t = t' - t$

$$\rightarrow \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

como partículas isoladas $\rightarrow$ $\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\vec{F}_{21}$ → (*) !

onde $\vec{F}_{ij}$: força sob i devido j.

- possibilidade definição dinâmica do conceito de massa.

considerar, novamente, sistema duas partículas isoladas e interagentes

(3) : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

massa m = cte !

$\xrightarrow{(5.2)} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$

se $m_1 \equiv m_0$: unidade massa → medida → determinação a_1 e a_2 m_2 : massa inercial

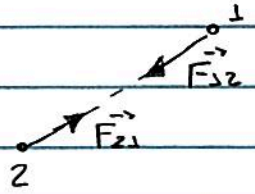
↳ - massa inercial m_i : massa que determina a aceleração de um corpo sob $\vec{F}$

- massa gravitacional m_g : massa que determina a interação gravitacional entre dois corpos.

experimento : $m_i = m_g$: princípio de equivalência.

- limitações,

(3) ok p/ forças centrais, e.g. interação gravitacional
" eletrostática

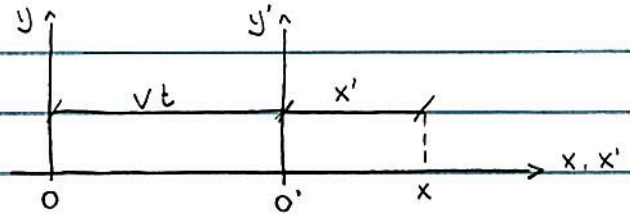


(3) not ok p/ interações que se propagam c/ velocidade finita, e.g. interação entre cargas elétricas em movimento.

· sobre o princípio da relatividade de Galileu,

- as leis da dinâmica são iguais p/ todos REF. inerciais que se movimentam c/ velocidades relativas constantes. (8.1)

Lembrar transformação de Galileu:
considerar REF. O', velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ w.r.t. REF inercial O



↳ $x' = x - vt$
$y' = y$
$z' = z$ (8.2)
$t' = t$

↳ caso geral: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$: transf. de
$t' = t$; $\vec{v} = cte$ Galileu (8.3)

notar: $\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt'} - \vec{v}\frac{dt}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}$

↳ $\vec{F}' = m\frac{d\vec{r}'}{dt'} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}$: REFs O e O' : mesma força sob partícula massa m!

· Equação de movimento,

Eq. (5.2): $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (9.1)

↑ hipótese $m \neq m(t)$

onde (caso geral) $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$.

Eq. (9.1): equação diferencial de 2ª ordem (variável $\vec{r} = \vec{r}(t)$)

solução: integração direta,
série de potências, numérica

Lembrar: solução (9.1) = $\xrightarrow{\text{c.i.}}$ solução
= conjunto de funções

onde condições iniciais (c.i.): $\vec{r}(t = t_0)$
$\vec{v}(t = t_0)$

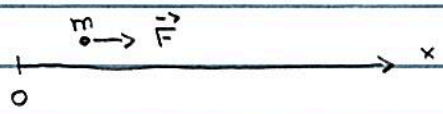
↳ programa: resolver a eq. de movimento (9.1), i.e., determinar $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e $\vec{v} = \vec{v}(t)$ p/ uma dada $\vec{F}$ e c.i.

· Movimento partícula em 1-D,

nesse caso, Eq. (9.1): $m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t)$ (9.2)

vamos analisar vários casos.

Ex. 1: considerar partícula massa m sob $F = F(t)$; determinar $x = x(t)$.



Eq. (9.2): $m\frac{d^2x}{dt} = m\frac{dv}{dt} = F(t)$

↳ $dv = \frac{1}{m} F(t)\,dt$: solução por integração direta

↳ $\int_{v_0}^{v} dv' = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\,dt' \longrightarrow v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')\,dt'$ (10.1)

como $v = \frac{dx}{dt}$ → $dx = v_0 dt + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t'')\,dt''\,dt$

$$\int_{x_0}^{x} dx' = v_0\int_{t_0}^{t} dt' + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\, F(t'')$$

↳ $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\, F(t')$: solução geral (10.2)

hipótese: $F = cte$ e $t_0 = 0$.

↳ $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{F}{m}\underbrace{\int_0^t dt' \int_0^{t'} dt''}_{1/2\,t^2} = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$

notar: $x(0) = x_0$: c.i.

$v(0) = v_0$

caso particular: partícula massa m e carga q sob campo elétrico

$\vec{E} = E_0 \cos\omega t \, \hat{x}$

como $\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow \vec{F}(t) = qE_0 \hat{x} \cos\omega t$

Eq. (9.2): $m\frac{dv}{dt} = qE_0 \cos\omega t$

considerar condições iniciais (c.i.): $x(t=0) = x_0$; $v(t=0) = v_0$

$$\hookrightarrow \int_{v_0}^{v} dv' = \frac{qE_0}{m}\int_0^t \cos\omega t' \, dt' \rightarrow v(t) = v_0 + \frac{qE_0}{m\omega}\sin\omega t \qquad (11.1)$$

como $v = \frac{dx}{dt}$

$$\hookrightarrow \int_{x_0}^{x} dx' = v_0\int_0^t dt' + \frac{qE_0}{m\omega}\int_0^t dt' \sin\omega t'$$

$$\hookrightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{qE_0}{m\omega^2}\left(1 - \cos\omega t\right)$$

$$= x_0 + v_0 t + \frac{qE_0}{m\omega^2}\left(1 + \cos(\omega t + \pi)\right) \qquad (11.2)$$

hipótese: carga q em repouso na origem em $t = 0$ $\rightarrow$ $x(0) = x_0 = 0$

$v(0) = v_0 = 0$

$$\hookrightarrow x(t) = \frac{qE_0}{m\omega^2}\left(1 + \cos(\omega t + \pi)\right) ; \quad v(t) = \frac{qE_0}{m\omega}\sin\omega t$$

notar: perturbação $F(t)$ e resposta do sistema $x(t)$ estão fora de fase!

• considenan panticula massa m sob $F = F(v)$;
determinan $x = x(t)$.

Eq. (9.2) : $\frac{m d^2x}{dt^2} = \frac{m dv}{dt} = F(v)$

↳ $dt = \frac{m dv}{F(v)}$: solução pon integração dineta

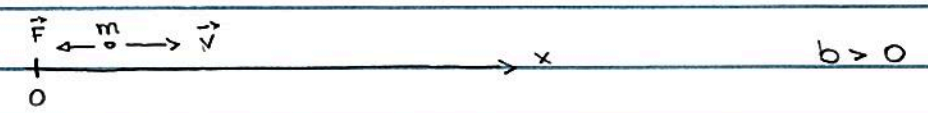
↳ $\int_{t_0}^{t} dt' = m \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{F(v')} \longrightarrow t - t_0 = m \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{F(v')}$ (12.1)

Exemplo $F = F(v)$: forças nesitivas

$F = \pm b v^n$; $b > 0$ e $n = 1, 2, \ldots$

↳ sinal ~ n pan ou impan !

Ex. 2 : panticula massa m sob $\vec{F} = -b\vec{v}$ ⊕
c. i. : $x(0) = 0$, $v(0) = v_0$; determinan $x = x(t)$.



$b > 0$

Eq. (9.2) : $\frac{m dv}{dt} = -bv \equiv -m\kappa v$; $\kappa > 0$ (12.1)

↳ $\int \frac{dv}{v} = -\kappa \int dt \longrightarrow \ln v = -\kappa t + C_0$
↳ cte de integração

Como c.i. $v(t=0) = v_0$

↳ $\ln v_0 = C_0$

↳ $\ln v = -\kappa t + \ln v_0 \rightarrow v(t) = v_0 e^{-\kappa t}$ (13.1)

notar: $v(t \to +\infty) = 0$!

como $v = \frac{dx}{dt}$

↳ $\int dx = v_0 \int dt\, e^{-\kappa t} \rightarrow x = -\frac{v_0}{\kappa} e^{-\kappa t} + C_1$

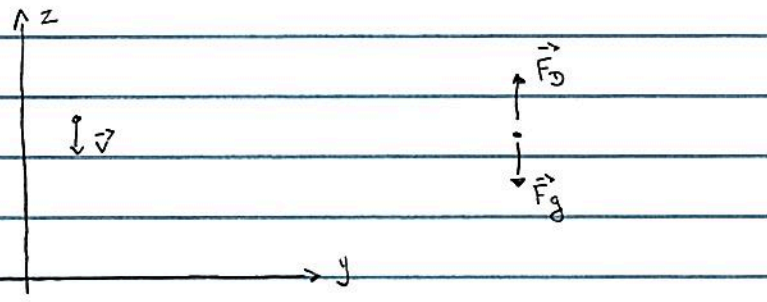
como C.i. $x(0) = 0 \rightarrow C_1 = v_0/\kappa$

↳ $x(t) = \frac{v_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)$ (13.2)

notar: - $x(t \to +\infty) = v_0/\kappa$ ~ distância máxima percorrida

- podemos definir $\tau \equiv 1/\kappa$: tempo característico

Ex. 3: movimento vertical ⊕ resistência do ar: partícula massa m sob $\vec{F}_g = m\vec{g}$ e $\vec{F}_{DRAG} = -b\vec{v}$ ⊕
C.i. $z(0) = h$ e $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$; determinar $z = z(t)$.



Eq. de movimento (9.2):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_D = -mg\hat{z} - bv\hat{z} \equiv -mg\hat{z} - m\kappa v\hat{z} \;;\; \kappa > 0 \qquad (13.3)$$

notar: como $v < 0 \rightarrow -m\kappa v > 0$!

direção $\hat{z}$: $g + \kappa v = -\frac{dv}{dt}$: solução por integração direta

$$\hookrightarrow \int \frac{dv}{g+\kappa v} = -\int dt \longrightarrow \frac{1}{\kappa} \ln(g+\kappa v) = -t + C_1$$

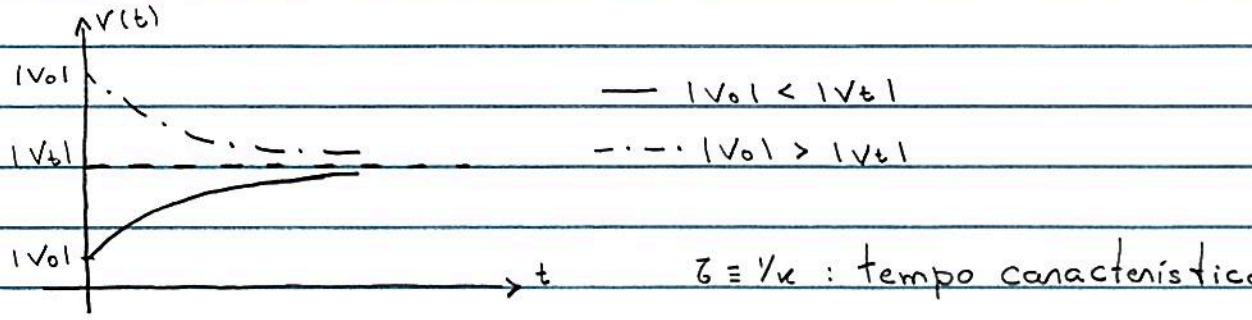
c.i. : $\vec{v}(0) = v_0 \hat{z} \longrightarrow \frac{1}{\kappa} \ln(g+\kappa v_0) = C_1$

$$\hookrightarrow \ln(g+\kappa v) = -\kappa t + \ln(g+\kappa v_0) \rightarrow v(t) = -g/\kappa + \left(\frac{g}{\kappa} + v_0\right) e^{-\kappa t}$$

notar:

$v(t \to +\infty) = -g/\kappa \equiv v_t$: velocidade terminal

$$\hookrightarrow v(t) = v_t + (v_0 - v_t) e^{-\kappa t} \qquad (13.3)$$



$\tau \equiv 1/\kappa$: tempo característico

notar eq. de movimento (13.3): $\vec{F}_g + \vec{F}_D = 0 \rightarrow v = -g/\kappa = v_t$!

como $v = \frac{dz}{dt}$

$$\hookrightarrow \int dz = v_t \int dt + (v_0 - v_t) \int dt\, e^{-\kappa t}$$

$$\hookrightarrow z = v_t t - \frac{1}{\kappa}(v_0 - v_t) e^{-\kappa t} + C_2$$

c.i. : $z(0) = h \longrightarrow h = -\frac{1}{\kappa}(v_0 - v_t) + C_2$

↳ $z(t) = h + v_t t + \frac{1}{\kappa}(v_0 - v_t)(1 - e^{-\kappa t})$ (15.1)

considerar $\lim \kappa \to 0$ eqs. (14.1) e (15.1), i.e., $\vec{F}_D \to 0$!

Eq. (14.1): $v(t) = -\frac{g}{\kappa} + \left(\frac{g}{\kappa} + v_0\right)(1 - \kappa t)$

$= -\frac{g}{\kappa} + \frac{g}{\kappa} + v_0 - gt - v_0 \kappa t \xrightarrow[\kappa \to 0]{} v_0 - gt$

Eq (15.1): $z(t) \simeq h - \frac{gt}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}(v_0 + g/\kappa)\left(1 - (1 - \kappa t + \frac{1}{2}\kappa^2 t^2)\right)$

$= h - \frac{gt}{\kappa} + (v_0 + \frac{g}{\kappa})t - \frac{1}{2}\kappa(v_0 + g/\kappa)t^2$

$= h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}\kappa v_0 t^2$

$\xrightarrow{\kappa \to 0} h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

Ex. 4: movimento vertical ⊕ resistência do ar = Ex. 2 porém

$\vec{F}_D = +m\kappa v^2 \hat{z}$: notar sinal $\sim v^2$!

Eq. de movimento (9.2):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_D = -mg\hat{z} + m\kappa v^2 \hat{z} \qquad (15.2)$$

direção $\hat{z}$: $-g + \kappa v^2 = \frac{dv}{dt}$

notar Eq. (15.2):

$\vec{F}_g + \vec{F}_D = 0 \rightarrow v_t^2 = g/\kappa$: velocidade terminal

$$\hookrightarrow \int \frac{dv}{1 - v^2/v_t^2} = -g\int dt \quad \rightarrow \quad v_t \tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right) = -gt + C_1$$

c.i. : $v(0) = v_0 \rightarrow v_t \tanh^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right) = C_1$

$$\hookrightarrow v(t) = v_t \tanh\left(-gt/v_t + C_0\right) \; ; \; C_0 = \tanh^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right) \qquad (16.1)$$

como $v = \frac{dz}{dt}$

$$\hookrightarrow \int dz = v_t \int \tanh\left(-gt/v_t + C_0\right) dt$$

$$\hookrightarrow z = \underbrace{-v_t \cdot \frac{v_t}{g}}_{1/\kappa} \ln\cosh\left(gt/v_t - C_0\right) + C_2$$

c.i. : $z(0) = h \rightarrow h = -\frac{1}{\kappa} \ln\cosh C_0 + C_2$

$$\hookrightarrow z(t) = h - \frac{1}{\kappa} \ln\cosh\left(gt/v_t - C_0\right) + \frac{1}{\kappa} \ln\cosh C_0 \qquad (16.2)$$

exercício : verificar que $[\kappa] = [\text{comprimento}]^{-1}$

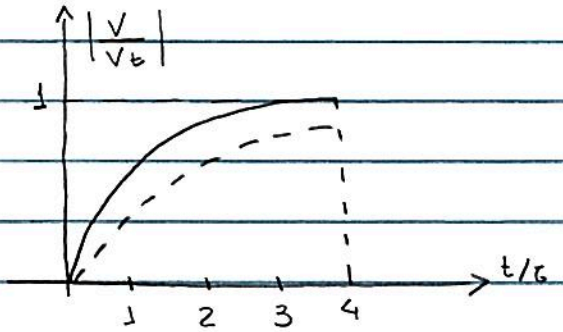
notar : $\tau = \frac{v_t}{g} = \frac{1}{\sqrt{\kappa g}}$: tempo característico

caso particular : $v_0 = 0 \rightarrow \mathcal{C}_0 = 0$ e $\cosh \mathcal{C}_0 = 1$

↳ $v(t) = -v_t \tanh(t/\tau)$ (17.1)

$$z(t) = h - \frac{1}{\kappa} \ln \cosh(t/\tau) \quad (17.2)$$

↳ comparação modelos $F_D \propto v$ v.s. $F_D \propto v^2$:



——— : $F_D \propto v$: Eq. (14.1)

- - - - : $F_D \propto v^2$: Eq. (17.1)

Detalhes: Eq (14.1) : $v(\tau) = 0.63 v_t$; $v(2\tau) = 0.86 v_t$; $v(3\tau) = 0.95 v_t$

Eq. (17.1) : $|v(\tau)| = 0.76 v_t$; $|v(2\tau)| = 0.96 v_t$; $|v(3\tau)| = 0.99 v_t$

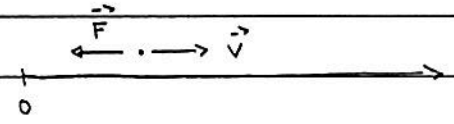
Exercício : mostrar que $v^2(z) = v_t^2 + (v_0^2 - v_t^2) e^{2\kappa(z-h)}$

dica : $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dz}$

Exercício : considerar $\lim \kappa \rightarrow 0$, i.e., $F_D \rightarrow 0$, Eqs. (16.1) e (16.2).

Ex. 2, caso geral: partícula massa m sob $\vec{F} = -mKv^n\hat{v}$ ⊕

[P-2.7, Symon] c.c.: $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0 > 0$; determinar t_s: Δt p/ partícula em repouso e $x(t_s)$.



Eq. (9.2): $\frac{m dv}{dt} = -mKv^n$; $K > 0$ e $n \neq 1$. (17.3)

↳ $\int \frac{dv}{v^n} = -K\int dt \longrightarrow \frac{-1}{n-1} v^{-n+1} = -Kt + C_1$

↳ $v^{-n+1} = (n-1)Kt + C_1$

como c.i.: $v(0) = v_0 \rightarrow C_1 = v_0^{1-n}$

↳ $v(t) = \left(v_0^{1-n} + (n-1)Kt\right)^{1/1-n}$

notar: partícula em repouso $t_s < +\infty$ apenas se $n < 1$!

nesse caso $v(t_s) = 0 \rightarrow t_s = \frac{v_0^{1-n}}{K(1-n)}$; $n < 1$.

sobre $x(t_s)$: distância máxima percorrida.

como $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

↳ Eq. (17.3): $v\frac{dv}{dx} = -Kv^n \longrightarrow \int \frac{dv}{v^{n-1}} = -K\int dt$

tilibra

$$\rightarrow \frac{1}{n-2} v^{-n+2} = -kx + C_2$$

$$\rightarrow v^{-n+2} = (n-2)kx + C_2$$

Como c.i.: $v(x=0) = v_0 \rightarrow C_2 = v_0^{-n+2}$

$$\rightarrow v(x) = \left(v_0^{-n+2} + (n-2)kx\right)^{1/2-n}$$

$$v(x_s = 0) \rightarrow x_s = \frac{v_0^{2-n}}{k(2-n)} \quad ; \quad n < 1$$

tilibra

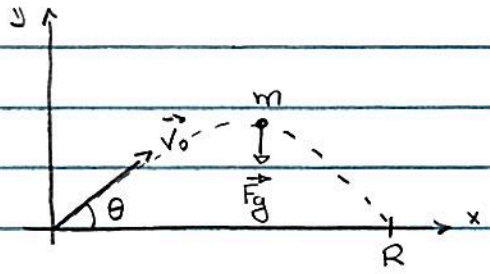
· Movimento partícula em 2-D,

nesse caso Eq. (9.1): $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y}$

↳ direção $\hat{x}$: $m\frac{dv_x}{dt} = F_x$

direção $\hat{y}$: $m\frac{dv_y}{dt} = F_y$ (18.1)

Ex 5: movimento projétil: considerar partícula massa m, movimento plano xy sob $\vec{F}_g = m\vec{g}$; determinar $\vec{r} = \vec{r}(t)$.



condições iniciais: $\vec{r}(0) = 0$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \underbrace{v_0\cos\theta}_{v_{0x}}\hat{x} + \underbrace{v_0\sin\theta}_{v_{0y}}\hat{y}$

Eq. de movimento (18.1): $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_g = -mg\hat{y}$

· direção x:

$$\frac{mdv_x}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad v_x = C_1$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C_1 \rightarrow x = C_1 t + C_2$$

C.i.: $v_x(0) = v_{0x} \rightarrow C_1 = v_{0x}$

$x(0) = 0 \quad C_2 = 0$

↳ $V_x(t) = \dot{x}(t) = V_{ox} = V_0 \cos\theta$

$x(t) = V_0 t \cos\theta$: movimento uniforme (19.1)

· direção y:

$$\frac{dV_y}{dt} = -g \longrightarrow V_y = -gt + C_3$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -gt + C_3 \longrightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$$

c.i.: $V_y(0) = V_{oy} \longrightarrow C_3 = V_{oy}$

$y(0) = 0 \qquad C_4 = 0$

↳ $V_y(t) = \dot{y}(t) = V_0 \sin\theta - gt$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \sin\theta$ (19.2)

notar Eqs. (19.1) e (19.2):

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= V_0 t \cos\theta \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \sin\theta \end{aligned}\right\} \text{equação paramétrica da trajetória = parábola} \quad (19.3)$$

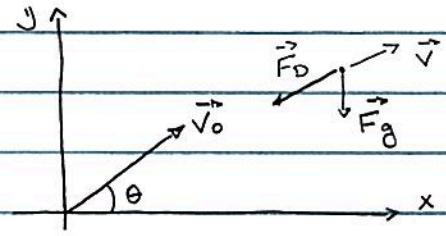
· características solução (19.1), (19.2):

(i) alcance R:

$y(t) = 0 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \sin\theta \rightarrow t = 0$ e $t = T = \frac{2V_0 \sin\theta}{g}$

↳ $R_{VAC} = x(t = T) = \frac{2V_{ox}V_{oy}}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$ => alcance máximo : $\theta = \pi/4$!

Ex. 6: movimento projétil + resistência do ar:
similar Ex. 5, porém $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_D$.



hipótese: $F_D \propto v \rightarrow \vec{F}_D = -m\kappa\vec{v}$; $\kappa > 0$

condições iniciais: $\vec{r}(0) = 0$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = v_0\cos\theta\,\hat{x} + v_0\sin\theta\,\hat{y}$

Eq. de movimento (18.1): $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\kappa\vec{v} - mg\hat{y}$

- direção x: $m\frac{dv_x}{dt} = -m\kappa v_x$ (20.1)

- direção y: $m\frac{dv_y}{dt} = -m\kappa v_y - mg$ (20.2)

como (20.1) = (12.1), Ex. 2

↳ Eqs. (13.1) e (13.2): $v_x(t) = v_0\cos\theta\, e^{-\kappa t}$

$$x(t) = \frac{v_0\cos\theta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t}\right) \quad (20.3)$$

como (20.2) = (13.3), Ex. 3

↳ Eqs. (14.1) e (15.1): $v_y(t) = v_t + (v_0\sin\theta - v_t)\,e^{-\kappa t}$

$$y(t) = v_t t + \frac{1}{\kappa}(v_0\sin\theta - v_t)\left(1 - e^{-\kappa t}\right) \quad (20.4)$$

onde $v_t = -g/\kappa$.

Eqs. (20.3) e (20.4):

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\theta}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)$$

$$y(t) = v_t t + \frac{1}{\kappa}(v_0 \sin\theta - v_t)\left(1 - e^{-\kappa t}\right) \quad \text{: eq. paramétricas da trajetória} \qquad (21.1)$$

comparar eqs. (19.3) e (21.1)

Exercício: mostrar que (21.1) pode ser escrita como

$$y(x) = \frac{v_{0y} - v_t}{v_{0x}} x - v_t \tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right) \quad \text{: eq. da trajetória} \qquad (21.2)$$

onde $\tau = 1/\kappa$: tempo característico

· características soluções (21.1) / (21.2)

(i) $\lim \kappa \to 0$, i.e., $F_D \to 0$,

$$x(t) \simeq \frac{v_0}{\kappa}\cos\theta\left(\kappa - \left(\kappa - \kappa t + \frac{1}{2}\kappa^2 t^2 + \dots\right)\right)$$

$$= v_0 t \cos\theta - \frac{1}{2} v_0 \kappa t^2 \cos\theta \xrightarrow{\kappa \to 0} v_0 t \cos\theta$$

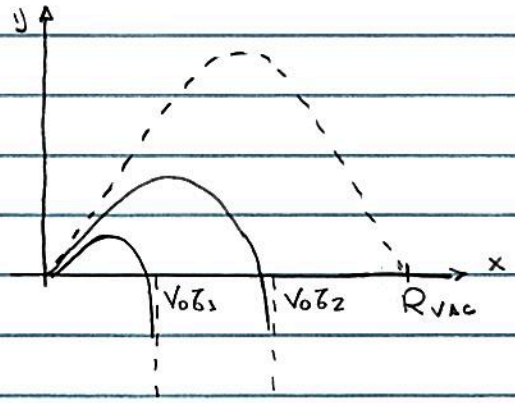
$$y(t) \simeq -\frac{gt}{\kappa} + \frac{1}{\kappa}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\kappa}\right)\left(\kappa - \left(\kappa - \kappa t + \frac{1}{2}\kappa^2 t^2 + \dots\right)\right)$$

$$= -\frac{gt}{\kappa} + v_0 t \sin\theta + \frac{gt}{\kappa} + \frac{1}{2}\kappa v_0 \sin\theta\, t^2 - \frac{1}{2} g t^2 + \dots$$

$$\xrightarrow{\kappa \to 0} v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2$$

(ii) alcance R

Eq. (21.2), $\lim x \to v_{ox}\tau : y \to -\infty$



$\tau_1 < \tau_2 \to \kappa_1 > \kappa_2$!

Eq. (21.1) : $y(T) = 0 = v_t T + \tau (v_{oy} - v_t)(1 - e^{-\kappa T})$

$\hookrightarrow T = \tau \left(1 - \frac{v_{oy}}{v_t}\right)(1 - e^{-\kappa T})$: eq. transcedental

ou

Eq. (21.2) : $y(R) = 0 \to \frac{(v_t - v_{oy}).R}{v_{ox}} = -v_t \tau \ln\left(1 - \frac{R}{v_{ox}\tau}\right)$: eq. transcedental

(22.1)

Eq. (22.1) : em principio, solução numérica !

vamos determinar uma solução aproximada,

hipótese : se F_D é "pequeno" $\to \kappa << 1 \to \frac{R}{v_{ox}\tau} = \frac{R\kappa}{v_{ox}}$: parâmetro pequeno

como

$$\ln(1 - x) \simeq -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \ldots$$

↳ Eq. (22.1):

$$\frac{(V_{0y} - \cancel{V_t})R}{V_{0x}} + V_t\tau\left(\frac{R}{V_{0x}\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{V_{0x}\tau}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{R}{V_{0x}\tau}\right)^3\right) \simeq 0$$

duas soluções: $R = 0$

$$R \simeq \underbrace{\frac{2V_{0x}V_{0y}}{g}}_{R_{VAC}} - \frac{2}{3}\underbrace{\frac{R}{V_{0x}\tau}}_{\text{parâmetro pequeno}} R \qquad (23.1)$$

↳ sol. Eq. (23.1): 1ª aproximação: $R \simeq R_{VAC}$

2ª aproximação: $R \simeq R_{VAC} - \frac{2}{3}\frac{R_{VAC}^2}{V_{0x}\tau}$

$$= R_{VAC}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{V_{0y}}{|V_t|}\right) < R_{VAC}$$

$$= R_{VAC}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\kappa V_{0y}}{g}\right); \quad \kappa \ll 1.$$

Comentário:

se $\vec{F}_D = -m\kappa v^2 \hat{v} = -m\kappa v \vec{v}$

Eq. de movimento: $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\kappa v\vec{v} - mg\hat{j}$

direção x: $\dot{v}_x = -\kappa\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, v_x$

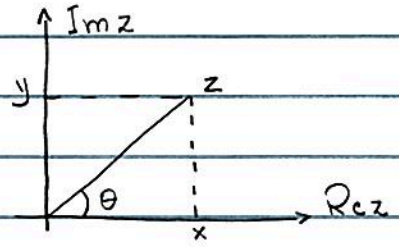
direção y: $\dot{v}_y = -\kappa\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\, v_y - mg$

solução numérica: veja Sec. 2.4, Taylor.

Revisão : números complexos

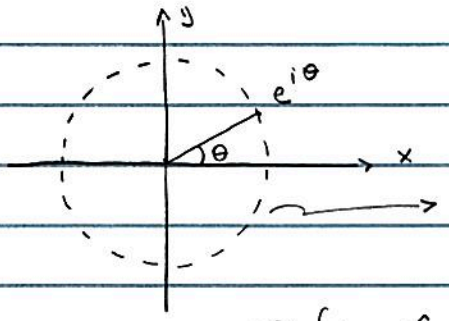
$i \equiv \sqrt{-1}$

$Z = x + iy = |z| e^{i\theta}$



$tg\,\theta = y/x$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$: Fórmula de Euler



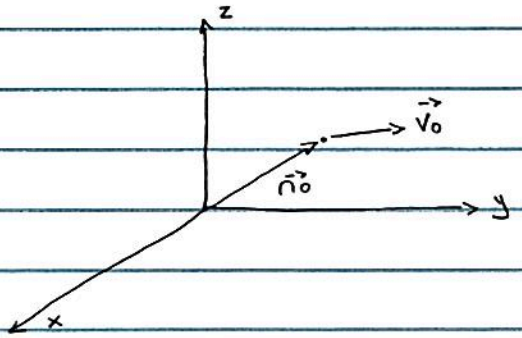
→ círculo raio 1.

Ex. : $\theta = \omega t$ → frequência angular.

· Movimento partícula em 3-D.

nesse caso Eq. (9.1) : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$ (24.1)

Ex. 7 : partícula carregada ⊕ campo magnético $\vec{B}$: consideram partícula massa m e carga q sob campo magnético uniforme $\vec{B}$.



condições iniciais : $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

Lei de Lorentz: $\vec{F} = \cancel{q\vec{E}}^{\,0} + q\vec{v}\times\vec{B}$

$$= q(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}) \times B\hat{z}$$

$$= qB(-v_x\hat{y} + v_y\hat{x})$$

Eq. de movimento (24.1): $m\frac{d\vec{v}}{dt} = qB(v_y\hat{x} - v_x\hat{y})$ (25.1)

↳ direção $\hat{x}$: $m\dot{v}_x = qBv_y$

" $\hat{y}$: $m\dot{v}_y = -qBv_x$

} 2 eq. diferenciais acopladas! (25.2)

" $\hat{z}$: $m\dot{v}_z = 0$

· direção $\hat{z}$: $v_z = C_1$

$$\frac{dz}{dt} = C_1 \rightarrow z = C_1 t + C_2 \quad : \text{movimento uniforme}$$

C.i.: $z(0) = z_0 \longrightarrow C_1 = v_{0z}$

$v_z(0) = v_{0z}$ $\quad C_2 = z_0$

· direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$:

definindo: $\omega = \frac{qB}{m}$: <u>frequência ciclotrônica</u> (25.3)

↳ $\dot{v}_x = \omega v_y$

$\oplus \rightarrow \dot{v}_x + i\dot{v}_y = -i\omega(v_x + iv_y)$

$\dot{v}_y = -\omega v_x \quad \otimes i$

definindo: $\eta = v_x + iv_y \in \mathbb{C}$

↳ $\dot{\eta} = -i\omega\eta$: eq. diferencial de primeira-ordem

solução: $\eta = Ae^{-i\omega t}$; $A = ae^{i\delta}$ ← fase
módulo ↗

↳ $\eta = ae^{-i(\omega t - \delta)} = V_x + iV_y = a\cos(\omega t - \delta) - ia\sin(\omega t - \delta)$

C.i. : $V_x(0) = V_{ox}$ → $V_x(0) = a\cos\delta = V_{ox}$

$V_y(0) = V_{oy}$ $V_y(0) = a\sin\delta = V_{oy}$

como $V_x(t) = a\cos\delta\cos\omega t + a\sin\delta\sin\omega t$

$V_y(t) = -a\cos\delta\sin\omega t + a\cos\delta\cos\omega t$

↳ $V_x(t) = V_{ox}\cos\omega t + V_{oy}\sin\omega t$

(26.1)

$V_y(t) = -V_{ox}\sin\omega t + V_{oy}\cos\omega t$

$V_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow x = \frac{V_{ox}}{\omega}\sin\omega t - \frac{V_{oy}}{\omega}\cos\omega t + C_1$

$V_y = \frac{dy}{dt} \rightarrow y = \frac{V_{ox}}{\omega}\cos\omega t + \frac{V_{oy}}{\omega}\sin\omega t + C_2$

C.i. : $x(0) = x_0 = -\frac{V_{oy}}{\omega} + C_1 \rightarrow C_1 = x_0 + \frac{V_{oy}}{\omega}$

$y(0) = y_0 = +\frac{V_{ox}}{\omega} + C_2 \rightarrow C_2 = y_0 - \frac{V_{ox}}{\omega}$

Dessa forma,

$$x(t) = \frac{v_{ox}}{\omega}\sin\omega t - \frac{v_{oy}}{\omega}\cos\omega t + \frac{v_{oy}}{\omega} + x_o$$

$$y(t) = \frac{v_{ox}}{\omega}\cos\omega t + \frac{v_{oy}}{\omega}\sin\omega t - \frac{v_{ox}}{\omega} + y_o$$: eq. paramétrica da trajetória

$$z(t) = v_{oz}t + z_o \qquad (27.1)$$

ou

$$x(t) - (x_o + v_{oy}/\omega) = \frac{v_{ox}}{\omega}\sin\omega t - \frac{v_{oy}}{\omega}\cos\omega t$$

$$y(t) - (y_o - v_{ox}/\omega) = \frac{v_{ox}}{\omega}\cos\omega t + \frac{v_{oy}}{\omega}\sin\omega t \qquad (27.2)$$

$$z(t) - z_o = v_{oz}t$$

Eq. (27.1)/(27.2) : equação paramétrica hélice!

notar: se $v_{oz} = 0$ → órbita circular raio $= \frac{1}{\omega}(v_{ox}^2 + v_{oy}^2)^{1/2}$

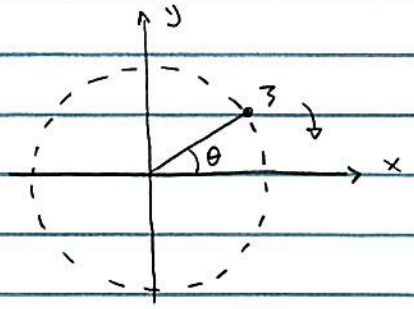
definindo: $X(t) \equiv x(t) - (x_o + v_{oy}/\omega)$

$Y(t) \equiv y(t) - (y_o - v_{ox}/\omega)$

↳ $\zeta(t) = X(t) + i\,Y(t) = (-1)\left(\frac{v_{oy}}{\omega} - i\frac{v_{ox}}{\omega}\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t)$

$$= \frac{1}{\omega}(v_{oy}^2 + v_{ox}^2)\exp\left(-i(\omega t + \alpha + \pi)\right).$$

onde $tg\,\alpha = \frac{v_{ox}}{v_{oy}}$.



Obs.: solução alternativa, veja Ex. 2.10, Marion.

comentário: partícula carregada ⊕ campos elétrico e magnético;

hipótese: $\vec{B} = B\hat{z}$ e $\vec{E} = E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$: campos uniformes

Eq. de movimento (24.1): $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

$= q(E_y\hat{y} + E_z\hat{z}) + qB(v_y\hat{x} - v_x\hat{y})$

↳ direção $\hat{x}$: $m\dot{v}_x = qBv_y$

" $\hat{y}$: $m\dot{v}_y = -qBv_x + qE_y$

" $\hat{z}$: $m\dot{v}_z = qE_z$

temos que:

$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}\frac{qE_z}{m}t^2$: mov. uniformemente acelerado

eq. diferencial p/ $\eta = v_x + iv_y$:

$\dot{\eta} = -i\omega\eta + i\eta_0$; $\eta_0 = \frac{qE_y}{m}$

solução (veja próximo capítulo p/ detalhes):

$\eta = Ae^{-i\omega t} + \frac{1}{\omega}\eta_0$: verificar!

$= ae^{i(\delta-\omega t)} + \frac{1}{\omega}\eta_0$

↳ $v_x(t) = a\cos(\omega t - \delta) + \eta_0/\omega$

$v_y(t) = -a\sin(\omega t - \delta)$ — comparar c/ Eq. (27.3): termo extra!

e $x(t) = \frac{a}{\omega}\sin(\omega t - \delta) + \frac{\eta_0 t}{\omega} + C_1$

$y(t) = \frac{a}{\omega}\cos(\omega t - \delta) + C_2$

notar:

$$\frac{\eta_0}{\omega} = \frac{E_y}{B} \longrightarrow \frac{\eta_0}{\omega}\hat{x} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$$

p/ referencial O' que se movimenta com

$\vec{v}_D = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$ w.r.t. REF. O:

$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}t$: Eq. (8.3)

↳ $x'(t) = \frac{a}{\omega}\sin(\omega t - \delta) + C_1$

$y'(t) = \frac{a}{\omega}\cos(\omega t - \delta) + C_2$: eq. da trajetória no REF O'

componente E_y foi "eliminada" no REF O'!

Veja: problema 2.22, Marion.

Teoremas de conservação,

- conservação momentos linear e angular, energia
- consequências das leis de Newton
- verificação experimental teoremas → leis de Newton OK!

em seguida: leis de conservação consideradas como postulados de uma teoria

Ex.: eletromagnetismo

postulado: conservação momento e energia → associam momento e energia ao campo EM : OK c/ experimento

(i) Conservação momento linear,

- o momento $\vec{p}$ de uma partícula é conservado se $\vec{F}_{TOTAL} = 0$.

2ª lei, Eq. (5.2): $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

se $\vec{F} = 0$ (partícula livre) → $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ → $\vec{p}$ é cte.

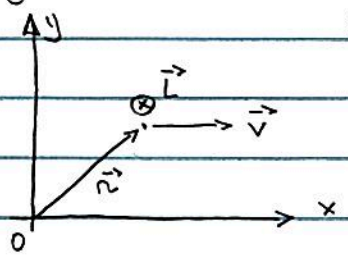
(ii) Conservação momento angular,

- o momento angular $\vec{L}$ de uma partícula é conservado se tanque $\vec{N}_{TOTAL} = 0$.

Lembrar: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$: momento angular w.r.t. O

$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$: tanque

: vetores axiais



como $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\hookrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{N}$ (31.1.0)

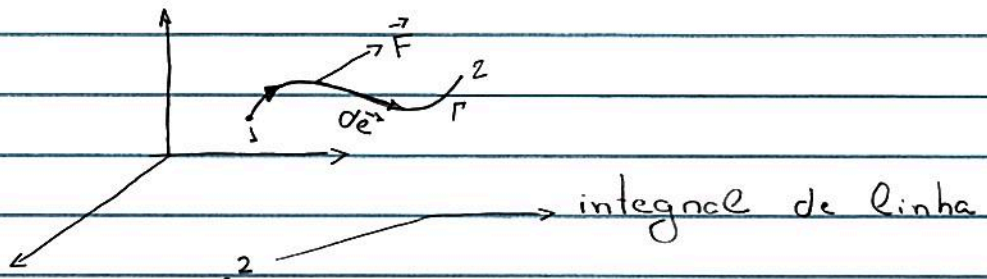
$$m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

se $\vec{N} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = cte.$

(iii) Energia total,

- a energia total E de uma particula sob a ação de forças conservativas é constante no tempo.

considerar: particula massa m sob $\vec{F}$, movimento $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$



$W_{12} \equiv \int_{1,\Gamma}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{e}$: trabalho feito sob a partícula por $\vec{F}$ (31.1)

como

$$\vec{F} \cdot d\vec{e} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

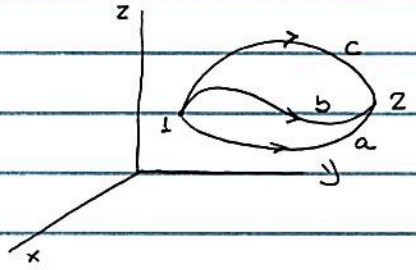
$$= \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})\, dt = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) \; ; \; v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$\hookrightarrow W_{12} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1$ (31.2)

onde $T = \frac{1}{2} m v^2$: energia cinética

hipótese : W_{12} independente trajetória Γ,
dependente apenas posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$

Ex. : força gravitacional



nesse caso : $W_a = W_b = W_c$!

se $\Delta T = T_2 - T_1 = 0 \rightarrow W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv -(U_2 - U_1)$ (32.1)

onde U : energia potencial (função de estado)

caso geral : $U = U(\vec{r}, t)$

se $U = U(\vec{r}) = U(x,y,z) \Rightarrow \vec{F}$ é conservativa

considerar deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$.

↳ $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}) \cdot (dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z})$

$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$ (32.2)

por outro lado,

Eq. (32.1) : $dW = -dU = -(U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r}))$

$= -(U(x+dx, y+dy, z+dz) - U(x,y,z))$

$= -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz$ (32.3)

Lembrar derivada $f(x)$: $df = f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx} dx$

Eq. (32.2) = (32.3) $\oplus$ dx, dy, dz independentes

↳ $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ $\quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$ $\quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

ou

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z} = -\vec{\nabla} U \qquad (33.1)$$

onde

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \quad : \underline{\text{operador gradiente}}$$

(veja pg. 35 M)

Obs.: se $U'(\vec{r}) = U(\vec{r}) + U_0$, onde $U_0 = cte$

↳ $\vec{F}' = -\vec{\nabla} U' = -\vec{\nabla}(U + U_0) = -\vec{\nabla} U = \vec{F}$, i.e., U e U' definem a mesma $\vec{F}$! (33.1.0)

• Eqs. (31.2) e (32.1):

$$W_{12} = \int_{1,\Gamma}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1)$$

↳ $E = T_1 + U_1 = T_2 + U_2$: $\underline{\text{energia total}} = \underline{\text{cte de movimento}}$ (33.2)

alternativa:

Eq. (31.2): $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dT \rightarrow \frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial r_i}\frac{dr_i}{dt} + \cancel{\frac{\partial U}{\partial t}}^{\,0} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} U$$

$\hookrightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \underbrace{(\vec{F} + \vec{\nabla}U)}_{=0} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow E = cte\ !$

· sobre força conservativa $\vec{F}$,

- como $W_{12} = \int_{1,\Gamma}^{2} \vec{F} \cdot d\vec{e}$ independe curva Γ

$\hookrightarrow 0 = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{e} = \int_{S} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ (34.1)

↑ Teorema de Stokes

notar: Eqs. (33.1) e (34.1) estão de acordo c/ identidade

$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0\ !$

- Eq. (32.1):

$$U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{e}$$

Se $U(\vec{r}_0) = 0$

$\hookrightarrow$ zero (pto de referência) do potencial, escolhido arbitrariamente, veja Obs. (33.1.0)

$\hookrightarrow U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{e}$: <u>energia potencial</u> (34.1.0)

· Movimento partícula em 1-D sob força conservativa,

considerar partícula massa m sob $F = F(x)$.

Eq. de movimento (9.2): $m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$ (34.2)

em princípio, sol. eq. diferencial (34.2) $\rightarrow x = x(t)$.

Alternativa p/ determinação $x = x(t)$:

como F é conservativa: $F = -\frac{dU(x)}{dx}$

Eq. (33.2): $E = T + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$

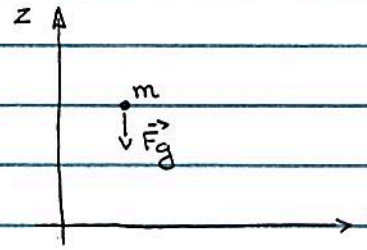
$\hookrightarrow v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$

$\hookrightarrow t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x')\right)}}$ (35.1)

Eq. (35.1): - método alternativo p/ determinar $x = x(t)$ a partir $U(x)$; veja Exs. 1 e 2 abaixo

- permite determinar as características do movimento de uma partícula, veja Exs. 3 e 4 abaixo.

Ex. 1: movimento vertical: partícula massa m sob $\vec{F}_g = m\vec{g}$ ⊕
c.i. $z(0) = h$ e $v(0) = 0$; determinar $z = z(t)$.



Eq. (34.1.0) → $U(z) = -\int_0^z (-mg\hat{z})\cdot(dz'\hat{z})$

como $\vec{F}_g = -mg\hat{z} = -\frac{dU}{dz}\hat{z}$ $\quad \cdot\ mgz$

$E = T + U(z) = U(h) \cdot mgh \rightarrow \frac{2}{m}\left(E - U(z)\right) = 2g(h-z)$

Eq. (35.1): $\pm t = \int_h^z \frac{dz'}{\sqrt{2g(h-z')}} = -\frac{1}{g}\left(2g(h-z)\right)^{1/2}$

$\hookrightarrow z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

Ex. 2: partícula massa m sob $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$;
determinar $x = x(t)$. p/ $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$.

como $\vec{F} = -\vec{\nabla}U \rightarrow F = -\frac{dU}{dx} = -kx$

$$\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right) = \frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{2E}{m}\left(1 - \frac{k}{2E}x^2\right)$$

Eq. (35.1): $$\pm t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\left(1 - \frac{kx'^2}{2E}\right)^{1/2}}$$

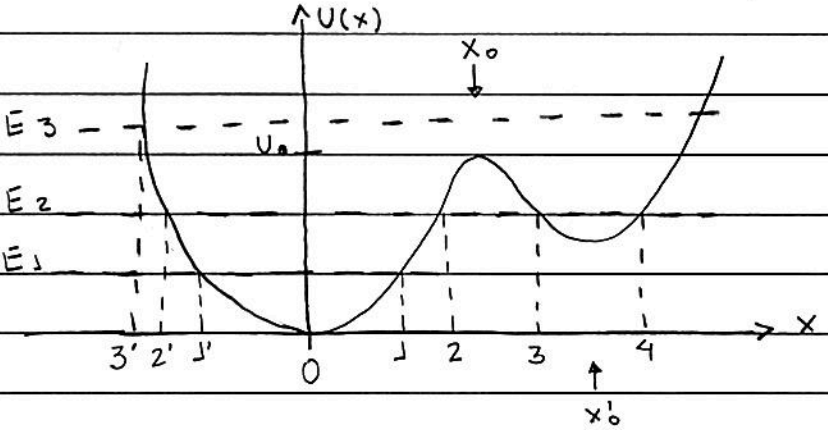
se $\sin^2 y = \frac{kx^2}{2E}$ $\rightarrow$ $dx' = \sqrt{\frac{2E}{k}}\cos y\, dy$; $\sin^2\theta = \frac{kx^2}{2E}$

$\hookrightarrow$ $$\pm t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} dy = \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k}}}_{\equiv 1/\omega}(\theta - \theta_0) \rightarrow \theta = \pm\omega t + \theta_0$$

como $$x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\theta \rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin(\omega t + \theta_0) \qquad (36.1)$$

Exercício: determinar relação entre E e v_0.

- Considerar partícula massa m sob $U = U(x)$;
determinar os possíveis movimento da partícula.



tilibra

ideia: determinar solução Eq. (35.1) p/ E fixo;
em princípio, solução numérica;

entretanto, como $E - U(x) \geq 0 \rightarrow U(x) \leq E$ é possível afirmar (análise qualitativa):

(i) Se $E = E_1 \rightarrow x_1' \leq x(t) \leq x_1$

x_1' e x_1: pontos de retorno

↳ $E = T + U(x) = U(x_1) = U(x_2)$

(ii) Se $E = E_2 \rightarrow x_2' \leq x(t) \leq x_2$: região I

ou

$x_3 \leq x(t) \leq x_4$: região II

nesse caso: região I ou II ~ condições iniciais.

(iii) Se $E = E_3 \rightarrow x(t) \geq x_3'$.

notar (i) e (ii): movimentos limitados no espaço.

· hipótese: $0 < E << U_0$

nesse caso, podemos considerar a expansão de $U(x)$ em torno de $x = 0$:

$$U(x) \approx U(0) + x \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} + \frac{1}{2!} x^2 \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} + \frac{1}{3!} \left.\frac{d^3U}{dx^3}\right|_{x=0} + \ldots,$$

Veja pg. 23M

tilibra

//

como $U(0) = 0$ e

$U(0)$: mínimo energia potencial $\rightarrow U'(0) = 0$

$\hookrightarrow x = 0$: ponto de equilíbrio.

$$\hookrightarrow U(x) = \frac{1}{2} x^2 \underbrace{\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0}}_{\equiv \kappa} \quad ; \quad 0 < E << U_0 \qquad (38.1)$$

notar: se $\kappa > 0$: pto de equilíbrio estável

" $\kappa < 0$: " " " instável

Eq. (38.1) : aproximação harmônica p/ $U = U(x)$.

de modo análogo, podemos afirmar que:

x'_0 : pto de equilíbrio estável

x_0 : " " " instável.

Ex. 3 : partícula massa m sob

$$U(x) = -U_0 \frac{d^2(x^2+d^2)}{x^4+8d^4} \quad , \quad U_0 > 0 \text{ e } d > 0 ;$$

determinar as características do movimento.

É interessante reescrever $U(x)$ como

$$\bar{U}(y) \equiv \frac{U(x)}{U_0} = -\frac{(1+x^2/d^2)}{8+x^4/d^4} = -\frac{(1+y^2)}{(8+y^4)} \quad ; \quad y = \frac{x}{d}$$

tilibra

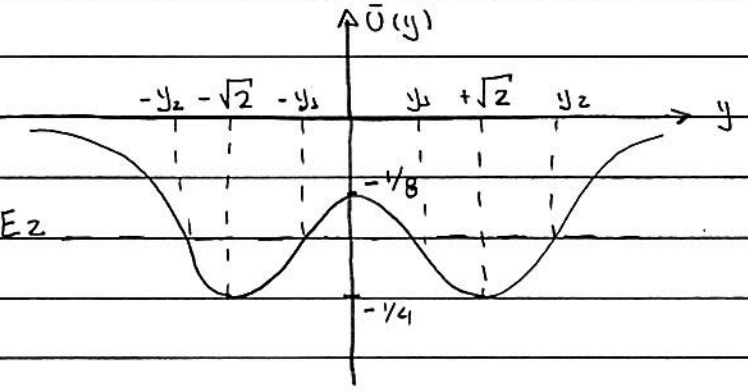
pontos de equilíbrio:

$$\frac{d\bar{U}}{dy} = 0 \rightarrow \frac{-2y}{8+y^4} + \frac{4y^3(1+y^2)}{(8+y^4)^2} = 0 \rightarrow y_0 = 0, \pm\sqrt{2}$$

ou $x_0 = 0, \pm\sqrt{2}\,d$

como $\bar{U}(0) = -1/8$; $\bar{U}(\pm\sqrt{2}) = -1/4$ e $\bar{U}(y \to \pm\infty) = 0$,

temos que



↳ $y_0 = 0$ ou $x_0 = 0$: pto de equilíbrio instável

$y_0 = \pm\sqrt{2}$ " $x_0 = \pm\sqrt{2}\,d$: " " " estável

casos particulares:

(i) $E = E_1 = -U_0/8$;

nesse caso o movimento é limitado, sendo que

$$\bar{U}(y) = -\frac{1}{8} = -\frac{(1+y^2)}{(8+y^4)} \rightarrow y = 0, \pm 2\sqrt{2}$$

: ptos de retorno

ou $x = 0, \pm 2\sqrt{2}\,d$

(ii) $E = E_2 = -3U_0/8$

↳ $-y_2 d \leq x(t) \leq -y_1 d$: região I

ou ~ condições iniciais.

$y_1 d \leq x(t) \leq y_2 d$: região II

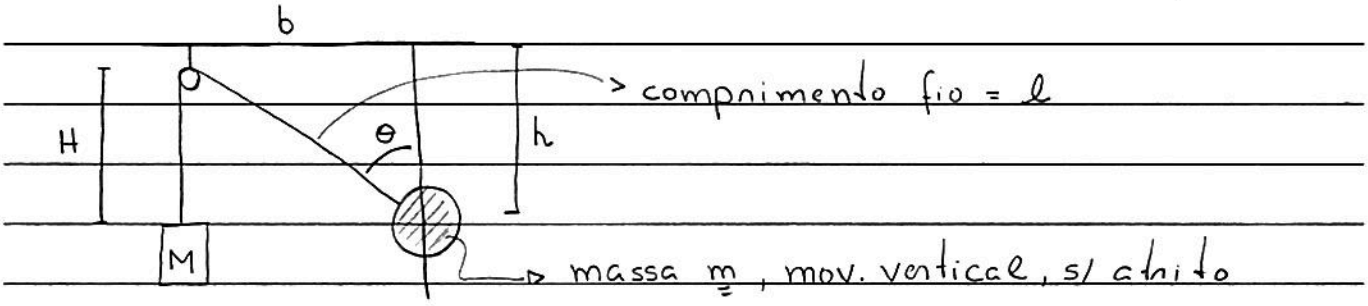
tilibra

/ /

Obs.: mecânica quântica: probabilidade finita para processo partícula região I → região II:

tunelamento!

Ex. 4, P-4.36, Taylor: considerar o sistema abaixo e estudar as condições de equilíbrio.



parâmetros sistema: m, M, ℓ, b

energia potencial: $U = -MgH - mgh$

como $b = (\ell - H)\sin\theta$, $h = (\ell - H)\cos\theta$ → $H = \ell - \frac{b}{\sin\theta}$; $h = \frac{b}{tg\theta}$

↳ $U(\theta) = -Mg\left(\ell - \frac{b}{\sin\theta}\right) - mgb\frac{1}{tg\theta}$

$$\frac{dU}{d\theta} = -Mgb\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} - mgb\left(\frac{-1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) = \frac{gb}{\sin^2\theta}\left(m - M\cos\theta\right)$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \rightarrow \cos\theta_0 = \frac{m}{M} \leq 1 \rightarrow \theta_0 = \cos^{-1}\left(m/M\right)$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -\frac{2gb\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(m - M\cos\theta\right) + \frac{Mgb}{\sin\theta}$$

tilibra

$\frac{d^2U}{d\theta^2}\Big|_{\theta=\theta_0} = Mgb/\sqrt{1-m^2/M^2} > 0$: θ_0 é pto equilíbrio estável

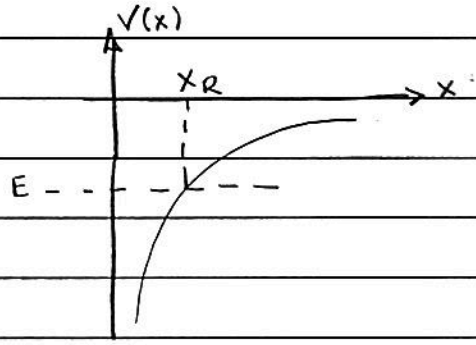
Ex. 5 : partícula massa m sob $F = -\frac{K}{x^2}$, $x>0$ e $K = cte > 0$;

determinar as características do movimento e $x = x(t)$.

como F é conservativa

↳ Eq. (34.1.0) : $U(x) = -\int_{\infty}^{x} -\frac{K}{x'^2}\,dx' = -\frac{K}{x}$

↳ zero potencial



Eq. (35.1) : $v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{K}{x}\right)}$: mov. sentido $+x$ " " $-x$

↳ $t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left(1+\frac{K}{Ex}\right)}^{1/2}}$ (40.1)

hipótese $v>0$.

(i) se $E>0$: ∄ pto de retorno

∃ velocidade limite $v_L = v(x\to+\infty) = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

//

(ii) se $E < 0$: $\exists$ pto de retorno $x_R \sim V = 0$, i.e., $x_R = \frac{K}{(-E)}$

(iii) Se $E = 0$: $v = \sqrt{2K/mx}$ (40.2)

pto de retorno $x_R \to +\infty$ e $V_L = V(x \to +\infty) = 0$

De fato, Eq. (40.2) : velocidade de escape do potencial

notar: se $x(0) = x_0$

$v(0) = \sqrt{\frac{2K}{mx_0}} \to E = T + U(x) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{x} = 0$ p/ $t = 0$!

· solução Eq. (40.1),

hipótese $E < 0$, $t_0 = 0$ e $x(0) = x_R = K/(-E)$

$$\hookrightarrow t = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{-2E}{m}}\left(\frac{-1 + \frac{K}{-Ex}}{}\right)^{1/2}}$$

se $\cos\theta = \sqrt{\frac{-Ex}{K}} \to \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-E}{Kx}}\, dx \to dx = \frac{2K}{(-E)} \cos\theta \sin\theta\, d\theta$

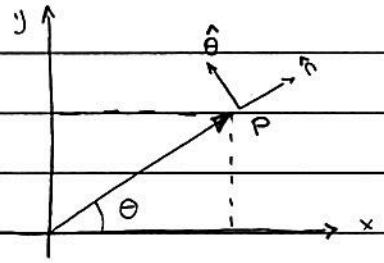
Lexercício $\to t = \sqrt{\frac{mK^2}{2}} \frac{1}{(-E)^{3/2}} \int_0^{\theta} 2\cos^2\theta'\, d\theta'$

$$\hookrightarrow \theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta = \sqrt{\frac{2K}{mx_R^3}}\, t$$: sol. numérica $\sim x = x(t)$.

$\oplus$ $x = \frac{K}{(-K)} \cos^2\theta = x_R \cos^2\theta$

tilibra

· Movimento partícula em 2-D : coordenadas polares



ponto P : descrito através de coordenadas cartesianas (x,y) ou coordenadas polares (r,θ)

como $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ → $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

vetores unitários (base) : $\hat{r}, \hat{\theta}$

↳ $\vec{r} = r\hat{r}$

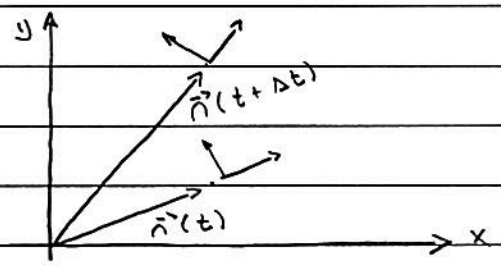
verifica-se que (veja figura acima) :

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta \qquad (41.1)$$
$$\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$$

caso geral : $\vec{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta}$

importante : ≠ versores cartesianos $\hat{x}, \hat{y}$, os vetores unitários $\hat{r}, \hat{\theta}$ não são fixos, dependem p/ o ?
(veja figura).

tilibra



$\rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} \neq 0$ e $\frac{d\hat{\theta}}{dt} \neq 0$

↳ p/ escrever a 2ª lei [Eq. (5.2)] em coordenadas polares, é necessário determinar $d\hat{r}/dt$ e $d\hat{\theta}/dt$!

como $\hat{x}$ e $\hat{y}$ fixos, Eq. (41.1)

↳ $$\frac{d\hat{r}}{dt} = (-\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta)\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\theta}$$

(42.1)

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = (-\hat{x}\cos\theta - \hat{y}\sin\theta)\dot{\theta} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

↳ velocidade:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

↳ $v_r = \dot{r}$: radial (42.2)

$v_\theta = r\dot{\theta}$: angular (transversal)

↳ aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{\theta}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

(42.3)

$$= a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

tilibra

/ /

notan: se $r = R = cte$

↳ $v_r = 0$ $\quad a_r = -R\dot{\theta}^2 = -v^2/R$: aceleração centrípeta

$v_\theta = R\dot{\theta} = R\omega = v$ $\quad a_\theta = R\ddot{\theta}$ (43.1.0)

· 2ª Lei, Eq. (5.2):

$$\vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} = m\vec{a}$$

↳ direção r : $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ (43.1)

" θ : $F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

sobre Eq. (43.1):

(i) se $\theta = cte \rightarrow F_r = m\ddot{r}$ ~ $F = ma$ p/ mov. apenas na direção radial

$F_\theta = 0$

(ii) se $r = cte$: movimento circular

↳ $F_r = -mr\dot{\theta}^2 = -\frac{mv^2}{r}$: força centrípeta

$F_\theta = mr\ddot{\theta}$ ~ aceleração direção tangencial.

(iii) $F_\theta = 2m\dot{r}\dot{\theta}$: força de Coriolis.

· momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mr\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z} \quad (43.2)$$

tilibra

/ /

notar: $\frac{dL}{dt} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = rF_\theta$ ↑ Eq. (43.1)

como $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = r\hat{r} \times (F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}) = rF_\theta \hat{z}$

↳ $\frac{dL}{dt} = N$: Eq. (31.3.0) !

Ex. 1: considerar partícula cuja trajetória é dada por

$r(t) = be^{kt}$: eq. paramétrica
$\theta(t) = ct$; b, k, c - cte espiral;

determinar $\vec{v}$, $\vec{a}$ e o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{a}$.

Eq. (42.2): $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$= bke^{kt}\hat{r} + bce^{kt}\hat{\theta} = be^{kt}(k\hat{r} + c\hat{\theta})$

Eq. (42.3): $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

como $\ddot{r} = bk^2e^{kt}$ e $\ddot{\theta} = 0$

↳ $\vec{a} = be^{kt}(k^2 - c^2)\hat{r} + 2kcbe^{kt}\hat{\theta}$

ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{v}$:

$\vec{a} \cdot \vec{v} = b^2e^{2kt}(k\hat{r} + c\hat{\theta}) \cdot ((k^2 - c^2)\hat{r} + 2kc\hat{\theta})$

$= b^2e^{2kt}\, k(k^2 + c^2)$

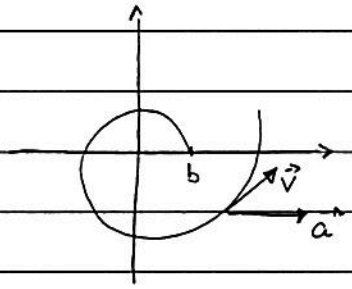
tilibra

como: $|\vec{v}| = be^{kt}(k^2+c^2)^{1/2}$ e $|\vec{a}| = be^{kt}(k^2+c^2)$

↳ $\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{av} = \hat{a}\cdot\hat{v} = \frac{k}{(k^2+c^2)^{1/2}} =$ cte no tempo!

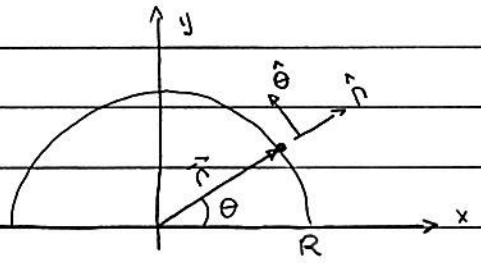
Verifica-se que: $a_{//} = \vec{a}\cdot\hat{v} = be^{kt}k(k^2+c^2)^{1/2}$

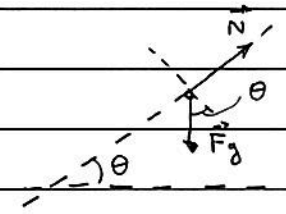
(exercício) $a_\perp = (a^2 - a_{//}^2)^{1/2} = be^{kt}c(k^2+c^2)^{1/2}$



; $b, k, c > 0$

Ex. 2: movimento ao longo de um semi-círculo I: partícula massa m sob $\vec{F}_g = m\vec{g}$ ⊕ condições iniciais: $\theta(0) = \pi/2 - \epsilon$, $r(0) = R$ e $\vec{v}(0) = 0$; determinar velon θ_0 qdo partícula deixa semi-círculo.





$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} = N\hat{r} - mg\sin\theta\,\hat{r} - mg\cos\theta\,\hat{\theta}$

Eq. de movimento (5.2): $\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

Eq. (43.1): direção $\hat{r}$: $N - mg\sin\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ (45.1)

" $\hat{\theta}$: $-mg\cos\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

tilibra

como a partícula se movimenta ao longo do semi-círculo
↳ $n = R = cte$

Eqs. (45.1): $N - mg\sin\theta = -mR\dot{\theta}^2$ (46.1)

$-mg\cos\theta = mR\ddot{\theta}$

em princípio: sol. eq. diferencial (46.1) ⊕ $N = 0$ → determinação θ.!

alternativa: como $n = R = cte$ → Eq. (43.1.0): $R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$

↳ $N = mg\sin\theta - mR\dot{\theta}^2 = m\left(g\sin\theta - \frac{v^2}{R}\right)$

$E = T + U(y) = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\theta =$

$= U(R, \theta = \pi/2) = mgR$

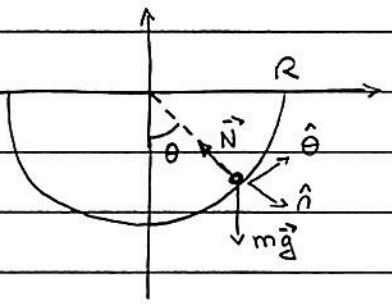
↳ $\frac{v^2}{R} = 2g(1 - \sin\theta)$

↳ $N = m\left(g\sin\theta - \frac{v^2}{R}\right) = mg(3\sin\theta - 2)$

$N = 0 \rightarrow \sin\theta = \frac{2}{3} = \frac{y}{R} \rightarrow y = \frac{2R}{3}$.

tilibra

Ex. 3: partícula massa m sob $\vec{F}_g = m\vec{g}$, movimento restrito semi-círculo raio R; determinar $\theta = \theta(t)$.



$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} = -N\hat{n} + mg\cos\theta\,\hat{n} - mg\sin\theta\,\hat{\theta}$$

Eq. de movimento (43.1):

direção $\hat{n}$: $F_n = mg\cos\theta - N = m(\ddot{n} - n\dot{\theta}^2)$ (47.1)

" $\hat{\theta}$: $F_\theta = -mg\sin\theta = m(n\ddot{\theta} + 2\dot{n}\dot{\theta})$

como $n = R = cte$:

$$mg\cos\theta - N = -mR\dot{\theta}^2$$
$$-mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}$$

↳ $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$: sol. numérica (47.2)

sol. analítica aproximada:

hipótese: $\theta(t=0) = \theta_0 << 1$ e $\theta << 1$ → $\sin\theta \approx \theta$

↳ Eq. (47.2): $\ddot{\theta} + \omega^2\theta \approx 0$; $\omega = \sqrt{g/R}$: frequência pequenas oscilações.

sol.: $\theta(t) = A\cos(\omega t + \delta)$: movimento oscilatório (veja cap. 3!)

tilibra

/ /

Ex. 4, P-3.68, Nonin: partícula massa m sob $\vec{F} = ma\dot{n}\dot{\theta}\hat{\theta}$, onde $a > 0$; determinar $\dot{n} = \dot{n}(n)$.

hipótese: movimento partícula: plano xy.

Eq. de movimento (43.1):

$$F_n = m(\ddot{n} - n\dot{\theta}^2) = 0$$

$$F_\theta = m(n\ddot{\theta} + 2\dot{n}\dot{\theta}) = ma\dot{n}\dot{\theta}$$

↳ $\ddot{n} = n\dot{\theta}^2$ (48.1)

$n\ddot{\theta} = (a-2)\dot{n}\dot{\theta} = k\dot{n}\dot{\theta}$; $k = a-2$ (48.2)

Eq. (48.2): $n\frac{d\dot{\theta}}{dt} = k\frac{dn}{dt}\dot{\theta} \rightarrow \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = k\frac{dn}{n}$

↳ $\ln\dot{\theta} = k\ln n + A \rightarrow \dot{\theta} = An^k$

em (48.1): $\ddot{n} = An^{2k+1}$

como $\ddot{n} = \frac{d\dot{n}}{dt} = \frac{d\dot{n}}{dn}\frac{dn}{dt} = \dot{n}\frac{d\dot{n}}{dn}$

↳ $\int \dot{n}\,d\dot{n} = A\int n^{2k+1}\,dn$

hipótese: $a = 3 \rightarrow k = 1 \rightarrow 2k+1 = 3$

↳ $\frac{1}{2}\dot{n}^2 = \frac{A}{4}n^4 + C$ ou $\dot{n} = \pm\sqrt{An^4 + B}$

tilibra Exercício: considerar casos $a = 1$ e $a = 2$.

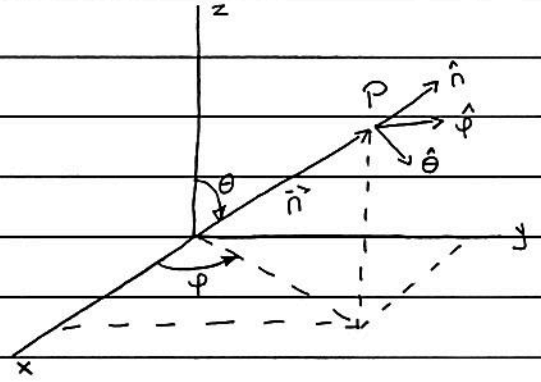
//

· Movimento partícula em 3-D : coordenadas curvilíneas

(1) coordenadas esféricas ~ força central

(2) " cilíndricas

(1) coordenadas esféricas.



pto $\underline{P}$: descrito através coord. cartesianas (x,y,z) ou coord. esféricas (r,θ,φ)

como $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\hat{r}$

↳ $x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

vetores unitários (base) : $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$

verifica-se que:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta \\ \hat{\theta} &= \hat{x}\cos\theta\cos\varphi + \hat{y}\cos\theta\sin\varphi - \hat{z}\sin\theta \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \end{aligned} \qquad (49.1)$$

tilibra

caso geral: $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$

* importante: ≠ versores cartesianos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, os vetores unitários $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ não são fixos, dependem pto P.

· deslocamento infinitesimal: $d\vec{\ell} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$

· elemento volume: $dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

· op. gradiente: $$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \qquad (50.1)$$

se $\vec{A} = \vec{A}(r,\theta,\varphi) = A_r(r,\theta,\varphi)\hat{r} + A_\theta(r,\theta,\varphi)\hat{\theta} + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\hat{\varphi}$

↳ · $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \qquad (50.2)$$

· $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\theta(\sin\theta\, A_\varphi) - \partial_\varphi A_\theta\right)\hat{r}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi A_r - \partial_r(r A_\varphi)\right)\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\partial_r(r A_\theta) - \partial_\theta A_r\right)\hat{\varphi} \qquad (50.3)$$

· $$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta f) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \qquad (50.4)$$

Eq. (50.4): Laplaciano

tilibra

· Obs. (1) : sobre o op. gradiente (50.1).

$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$

como $\vec{\nabla} f = (\vec{\nabla} f)_r \hat{r} + (\vec{\nabla} f)_\theta \hat{\theta} + (\vec{\nabla} f)_\varphi \hat{\varphi}$

e $d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{\varphi}$

↳ $\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla} f)_r\,dr + (\vec{\nabla} f)_\theta\, r\,d\theta + (\vec{\nabla} f)_\varphi\, r\sin\theta$

$= df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$ → Eq. (50.1) !

· Obs. (2) : sobre Eq. (50.2).

Eq. (49.1) (exercício) → $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}$ $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}$ $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\hat{\varphi}$ $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\hat{\varphi}$

$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\hat{r} - \cos\theta\,\hat{\theta}$

↳ e.g.,

$\partial_\theta \vec{A} = \hat{r}\,\partial_\theta A_r + A_r\hat{\theta} + \hat{\theta}\,\partial_\theta A_\theta - A_\theta \hat{r} + \hat{\varphi}\,\partial_\theta A_\varphi$

↳ $\hat{\theta} \cdot \partial_\theta \vec{A} = A_r + \partial_\theta A_\theta$

de modo análogo p/ $\partial_r \vec{A}$ e $\partial_\varphi \vec{A}$

↳ Eq. (50.2)

tilibra

/ /

· velocidade:

verifica-se que $\frac{d\hat{n}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{\varphi}$

(exercício):

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\hat{n} + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi} \qquad (52.1)$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{n} - \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{\theta}$$

↳ $\vec{v} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d}{dt}(n\hat{n}) = \dot{n}\hat{n} + n\dot{\theta}\hat{\theta} + n\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}$ (52.2)

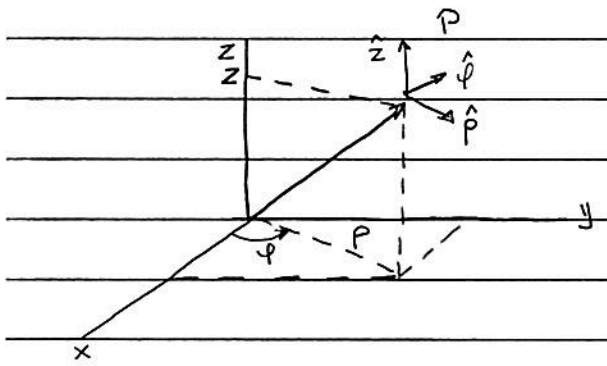
· aceleração (verifican):

$$\vec{a} = (\ddot{n} - n\dot{\theta}^2 - n\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\hat{n} + (n\ddot{\theta} + 2\dot{n}\dot{\theta} - n\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)\hat{\theta}$$

$$+ (n\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\,\dot{n}\dot{\varphi} + 2n\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi})\hat{\varphi} \qquad (52.3)$$

tilibra

(2) coordenadas cilíndricas.



pto P: descrito através coord. cartesianas (x, y, z) ou coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z)

como $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$

↳ $x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$z = z$

vetores unitários (base): $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$

verifica-se que:

$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$
$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \qquad (53.1)$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$

caso geral: $\vec{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}$

$= A_\rho(\rho, \varphi, z)\hat{\rho} + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\hat{\varphi} + A_z(\rho, \varphi, z)\hat{z}$

· deslocamento infinitesimal: $d\vec{\ell} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$

tilibra

· elemento volume: $dV = \rho d\rho d\varphi dz$

· op. gradiente: $\vec{\nabla} = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$ (54.1)

· $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (54.2)

· $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\varphi}$

$+ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$ (54.3)

· $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (54.4)

· velocidade:

como $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\varphi}\hat{\varphi}$ e $\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\hat{\rho}$

↳ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z}$ (54.5)

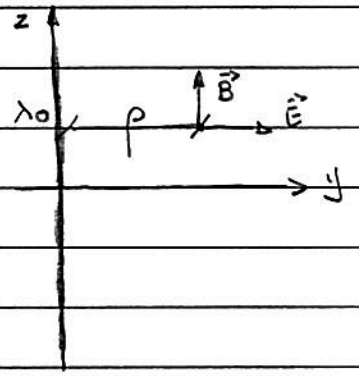
· aceleração (verificar):

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z}$ (54.6)

tilibra

// /

Ex. P. 3.75, Symon: partícula massa m e carga q sob campo magnético uniforme $\vec{B}$ ⊕ campo eléctrico $\vec{E}$ ~ distribuição linear de carga λ_0; estudar movimento partícula.



Considerar: $\vec{B} = B\hat{z}$

λ ao longo eixo $\hat{z}$ $\xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{Lei de}}$ $\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho}$

simetria do sistema → eq. de movimento em coordenadas cilíndricas.

Lei de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

↳ $\vec{F} = \frac{q\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho} + qB(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\rho} + \dot{z}\hat{z})\times\hat{z}$

$= \frac{q\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho} - qB\dot{\rho}\hat{\varphi} + qB\rho\dot{\rho}\hat{\rho}$

Eq. de movimento $\vec{F} = m\vec{a}$ ⊕ Eq. (54.6):

tilibra

direção $\hat{\rho}$: $\frac{q\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho} + q\beta\rho\dot{\varphi} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)$ (56.1)

" $\hat{\varphi}$: $-q\beta\dot{\rho} = m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})$ (56.2)

" $\hat{z}$: $0 = m\ddot{z}$: mov. uniforme (56.3)

definindo : $\lambda = \frac{q\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 m}$ e $\omega = \frac{q\beta}{m}$

↳ Eq. (56.1) : $\frac{\lambda}{\rho} + \omega\rho\dot{\varphi} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$ (56.4)

Eq. (56.2) : $-\omega\dot{\rho} = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$ (56.5)

Eqs. (56.4) e (56.5) : sistema eq. diferenciais não-lineares e acopladas.

Obs. : $\lambda = 0$ ⟶ Ex. 7, pg. 24.

Algumas considerações sobre solução sistema de equações,

Eq. (56.5) : $(\omega + 2\dot{\varphi})\dot{\rho} = -\rho\ddot{\varphi}$

↳ $-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\omega + 2\dot{\varphi}}\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$

↳ $-\int\frac{d\rho}{\rho} = \int\frac{d\dot{\varphi}}{\omega + 2\dot{\varphi}} \rightarrow -\ln\rho = \frac{1}{2}\ln(\omega + 2\dot{\varphi}) + K'$

se $K = e^{-2K'} \rightarrow \rho^2(\omega + 2\dot{\varphi}) = K$: <u>cte de movimento</u>

ou $\dot{\varphi} = \frac{K}{2\rho^2} - \frac{1}{2}\omega$ (56.6)

tilibra

Eq. (56.4): $\dot{\varphi}^2 + \omega\dot{\varphi} + \frac{\lambda}{\rho^2} - \frac{\ddot{\rho}}{\rho} = 0$: eq. p/ $\dot{\varphi}$!

↳ $$\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}\omega \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{4} - \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\ddot{\rho}}{\rho}} \qquad (57.1)$$

hipótese 1: particula executa movimento circular ao redor eixo z.

nesse caso: $\rho = \rho_0 \rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

$z = z_0 \rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$

Eq. (56.6): $\dot{\varphi}(t) = \frac{K}{2\rho_0^2} - \frac{1}{2}\omega = cte \rightarrow \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 = cte$! (57.2)

↳ Eq. (57.1): $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 = -\frac{1}{2}\omega \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{4} - \frac{\lambda}{\rho_0^2}}$: frequência mov. circular

Obs.: se $\lambda = 0 \rightarrow \dot{\varphi}_0 = -\omega$: frequência ciclotrônica Eq. (25.3)!

notar: Eq. (57.2) → determinação cte de movimento K:

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{K}{2\rho_0^2} - \frac{1}{2}\omega = -\frac{1}{2}\omega \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{4} - \frac{\lambda}{\rho_0^2}}$$

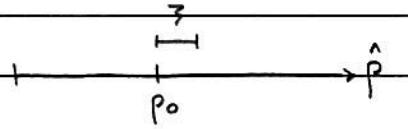
↳ $$\frac{K^2}{4\rho_0^4} = \frac{\omega^2}{4} - \frac{\lambda}{\rho_0^2} \qquad (57.3)$$

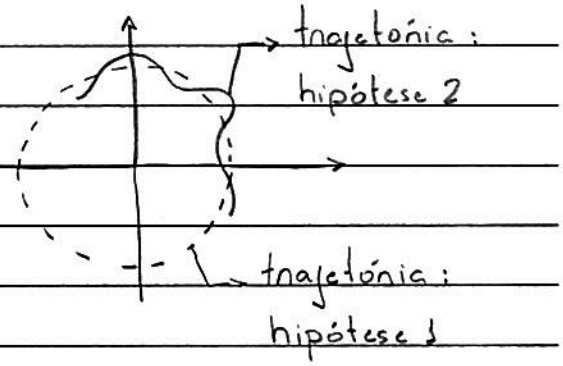
tilibra

sobre o movimento radial.

hipótese 2: assumir $\exists$ pequenos desvios em torno de $\rho = \rho_0$,

↳ $\rho = \rho_0 + \zeta$; $\frac{|\zeta|}{\rho_0} << 1$.





Eq. (56.6) = Eq. (57.1):

$$\dot{\psi}(t) = \frac{K}{2\rho^2} - \frac{1}{2}\omega = -\frac{1}{2}\omega \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{4} - \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\ddot{\rho}}{\rho}}$$

↳
$$\ddot{\rho} + \frac{\omega^2}{4}\rho - \left(\frac{\lambda}{\rho} + \frac{K^2}{4\rho^3}\right) = 0 \qquad (58.1)$$

como $\rho = \rho_0 + \zeta \rightarrow \ddot{\rho} = \ddot{\zeta}$

$$\frac{1}{\rho^n} = \frac{1}{(\rho_0+\zeta)^n} = \frac{1}{\rho_0^n}\left(1 + \frac{\zeta}{\rho_0}\right)^{-n} \simeq \frac{1}{\rho_0^n}\left(1 - \frac{n\zeta}{\rho_0}\right)$$

Exercício: mostrar que (58.1) assume a forma:

$$\ddot{\zeta} + \underbrace{\left(\omega^2 - \frac{2\lambda}{\rho_0^2}\right)}_{\equiv \omega_0^2}\zeta + \rho_0 \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{4} - \frac{\lambda}{\rho_0^2} - \frac{K^2}{4\rho_0^2}\right)}_{=0} \simeq 0$$: eq. oscilador harmônico

↳ partícula executa pequenas oscilações em torno trajetória circular $\rho = \rho_0$.

$\omega_0 = \left(\omega^2 - \frac{2\lambda}{\rho_0^2}\right)^{1/2}$: freq. mov. radial.

/ /

· Força central.

considerar partícula massa m sob

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{r} \quad : \text{força central} \qquad (59.1)$$

notar: $F(r) < 0$: atração ou

$F(r) > 0$: repulsão w.r.t. origem F

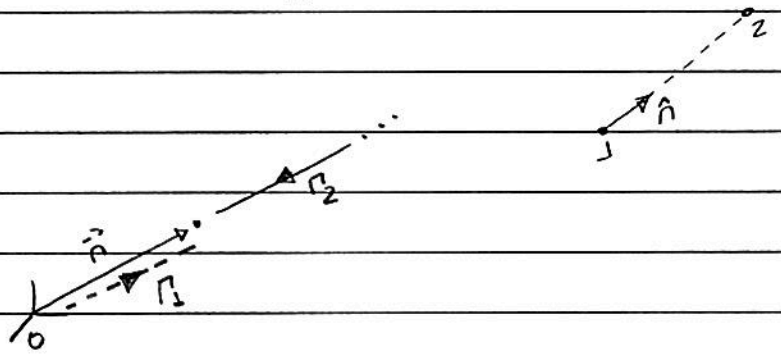
Eq. (50.3) : $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\hat{\theta}}{r\sin\theta}\partial_\varphi F_r - \frac{\hat{\varphi}}{r}\partial_\theta F_r = 0$

↳ $\vec{F}(\vec{r})$ é conservativa!

Ex.: · $\vec{F}(\vec{r}) = k\vec{r} = kr\,\hat{r}$

· $F(\vec{r}) = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$: força gravitacional

· $F(\vec{r}) = \frac{kq_1q_2}{r^2}\hat{r}$: interação Coulombiana



Eq. (34.3.0) :

· $U(\vec{r}) = -\int_{0,\Gamma_1}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{\ell} = -\int_0^{\vec{r}} (kr\hat{r}) \cdot (dr\,\hat{r}) = -\frac{1}{2}kr^2$

· $U(\vec{r}) = -\int_{\infty,\Gamma_2}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{\ell} = -\int_\infty^{\vec{r}} \left(\frac{k}{r}\hat{r}\right) \cdot (dr\,\hat{r}) = \frac{k}{r}$

tilibra

/ /

ideia: considerações gerais problema partícula massa m sob força central (59.1).

notar: tomque $\vec{N}$ w.r.t. origem O:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) = (\vec{r} \times \hat{r}) F(r) = 0$$

como Eq. (31.1.0): $\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow \vec{L}$: cte de movimento (60.1)

como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ e $\vec{L}$ = cte

↳ vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$ ∈ plano ⊥ $\vec{L}$: movimento em 2-D!

hipótese: $\vec{L} = L\hat{z} \rightarrow \vec{r}$ e $\vec{v}$ ∈ plano xy. (60.2)

(60.2) ⊕ simetria $\vec{F}$ → interessante escrever eq. de movimento em coordenadas polares.

Eq. (43.1): $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r = F(r)$ (60.3)

$$mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_\theta = 0 \quad (60.4)$$

notar: $r \times (60.4)$: $mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$ (Eq. (43.2))

$$= \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = \frac{dL}{dt} = 0 \text{ : ok c/ (60.1)!}$$

↳ $L = mr^2\dot{\theta}$: cte de movimento ~ c.i. (60.5)

como F é conservativa e $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r)$, temos que

tilibra

$E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + U(r) =$ cte de movimento

Eq. (42.2)

Obs.: determinação energia $E \sim$ c.i.

como $\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2 m r^2} (m r^2 \dot{\theta})^2 = \frac{L^2}{2 m r^2}$

$\hookrightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + U(r)$: energia em termos $r = r(t)$ apenas!

$\hookrightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \left(E - U(r) - \frac{L^2}{2 m r^2} \right)^{1/2}$

ou $t - t_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}} \left(E - U(r') - \frac{L^2}{2 m r'^2} \right)^{1/2}}$ (61.1)

onde c.i. $r(t_0) = r_0$

Eq. (60.5): $L = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{L}{m r^2(t')} dt'$ (61.2)

onde c.i. $\theta(t_0) = \theta_0$

notar: (61.1): determinação $r = r(t)$ em termos L, E, r_0 e θ_0!

⊕ (61.2): " $\theta = \theta(t)$

· definindo: $U_{ef}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2 m r^2}$: energia potencial efetiva (61.3)

energia pot. centrífuga

tilibra

//

↳ problema radial = problema 1-D, partícula sob $U_{ef}(r)$ (61.3), comparar Eqs. (35.1) e (61.1).

· procedimento alternativo:

Eq. (60.3): $m\ddot{r} = F(r) + mr\dot{\theta}^2 = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$ (62.1)

↳ força centrífuga

notar: $-\vec{\nabla}\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right) = \frac{L^2}{mr^3}\hat{r}$!

definindo: $u \equiv \frac{1}{r}$ ou $r \equiv \frac{1}{u}$

↳ $\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\dot{u} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{L}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

Eq. (62.1): $-\frac{L^2u^2}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{L^2}{m}u^3 + F(1/u)$

↳ $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$; $u = u(\theta)$ (62.2)

ou

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2}F(r) \; ; \; r = r(\theta) \qquad (62.3)$$

sol. Eq. (62.2) ou (62.3): determinação trajetória (órbita) $r = r(\theta)$ da partícula.

tilibra

/ /

Ex.: considerar partícula massa m, trajetória espiral $r = Ae^{k\theta}$, A e k cte; determinar F(r) correspondente.

como $\frac{1}{r} = \frac{e^{-k\theta}}{A}$ → $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-ke^{-k\theta}}{A}$ e $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{k^2e^{-k\theta}}{A}$

Eq. (62.3): $\frac{k^2e^{-k\theta}}{A} + \frac{e^{-k\theta}}{A} = -\frac{m}{L^2}A^2e^{2k\theta}F(r)$

↳ $F(r) = \frac{-L^2}{m}(1+k^2)\frac{1}{A^3e^{3k\theta}} = -\frac{L^2}{mr^3}(1+k^2)$

Exemplos: veja P-3.29 e P-3.32, Symon.

Obs.: detalhes $F(r) \propto 1/r^2$: F GIS !

tilibra