

Revisão equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem:

considerar:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad (64.1)$$

onde $y = y(x)$, a, b : cte

• se $f(x) = 0$: $y'' + ay' + by = 0$: eq. homogênea (64.2)

propriedades (64.2):

(i) se $y_1 = y_1(x)$ é solução $\rightarrow y = c_1 y_1$ é sol.

(ii) se $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ são soluções

$\rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é sol.: princípio de superposição

(iii) se $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ são linearmente independentes

$\rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2$: sol. geral

Lembrar: condição p/ $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ funções linearmente independentes:

se $\lambda y_1 + \mu y_2 = 0 \rightarrow \lambda = \mu = 0$: única solução!

• sobre a solução (64.2):

$$\text{se } y(x) = e^{rx} \quad (64.3)$$

$$\hookrightarrow (64.2): (n^2 + an + b)e^{nx} = 0$$

$$\hookrightarrow n^2 + an + b = 0 \rightarrow n = \frac{-1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = \begin{cases} n_1 \\ n_2 \end{cases}$$

• 3 casos:

(i) $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{R}$,

$$\text{sol. geral: } y(x) = C_1 e^{n_1 x} + C_2 e^{n_2 x} \quad (64.5)$$

(ii) $n_1 = n_2 \in \mathbb{R}$,

$$\text{sol. geral: } y(x) = C_1 e^{n_1 x} + C_2 x e^{n_1 x} \quad (64.6)$$

linearmente

independentes!

(iii) $n_1 \neq n_2 \in \mathbb{C}$,

$$\text{nesse caso } a^2 - 4b < 0 \rightarrow n = \frac{-1}{2}a \pm \frac{i}{2}\sqrt{4b - a^2} \equiv \alpha \pm i\beta$$

$$\hookrightarrow y(x) = C_1 e^{\alpha x + i\beta x} + C_2 e^{\alpha x - i\beta x}$$

$$= e^{\alpha x} \left(\underbrace{(C_1 + C_2)}_{\equiv B_1} \cos \beta x + i \underbrace{(C_1 - C_2)}_{\equiv B_2} \sin \beta x \right)$$

$$\text{se } C_1 = C_2^* \rightarrow B_1, B_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{sol. geral: } y(x) = e^{\alpha x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x)$$

$$= A e^{\alpha x} \cos(\beta x - \delta) \quad (64.7)$$

hipótese: $f(x) \neq 0$,

consideram: $y = u(x)$: sol. (64.2), homogênea

$y = v(x)$: sol. (64.1), particular

$\hookrightarrow y(x) = u(x) + v(x)$: sol. (64.1).

notas: $y' = u' + v'$ e $y'' = u'' + v''$

Eq. (64.1): $y'' + ay' + b = f(x)$

$$\underbrace{(u'' + au' + b)}_{=0} + \underbrace{(v'' + av' + b)}_{=f(x)} = f(x)$$

Ex: considera a eq. diferencial

$$y'' + 4y = 2\cos x \quad (64.8)$$

\hookrightarrow eq. homogênea: $y'' + 4y = 0$

$$\text{se } y = e^{nx} \rightarrow (n^2 + 4)e^{nx} = 0 \rightarrow n = \pm 2i = \pm i\beta$$

sol. particular: $y_p(x) = B\cos x + C\sin x$

$$\hookrightarrow y'_p(x) = -B\sin x + C\cos x \text{ e } y''_p(x) = -B\cos x - C\sin x$$

$$\text{Eq. (64.8): } y''_p + 4y_p = 3B\cos x + 3C\sin x = 2\cos x$$

$$\hookrightarrow B = 2/3 \text{ e } C = 0.$$

$$\hookrightarrow y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= A \cos(2x - \delta) + \frac{2}{3} \cos x$$

$\hookrightarrow \sim$ condições iniciais!

Obs.: detalhes Eq. (64.7),

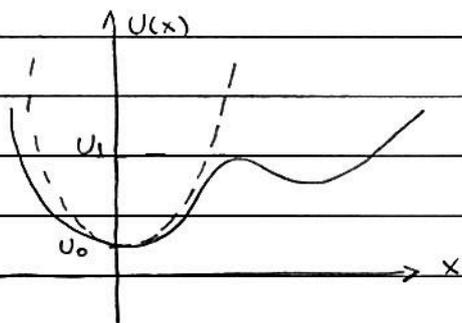
$y = y(x)$ pode ser escrita como:

$$y(x) = e^{\alpha x} \underbrace{(B_1^2 + B_2^2)^{1/2}}_{\equiv A} \cdot$$

$$\cdot \left(\underbrace{\frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}}_{\equiv \cos \delta} \cos \beta x + \underbrace{\frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}}_{\equiv \sin \delta} \sin \beta x \right)$$

Oscilações:

considerar: partícula massa m , movimento em 1-D, sob $U = U(x)$.



----- aproximação harmônica
p/ $U = U(x)$.

hipótese: $|x(t)|$ é "pequeno" tal que $U_0 < E \ll U_1$.

nesse caso, podemos aproximar $U(x)$ pela série de Taylor em torno de $x_0 = 0$, Eq. (23M.1):

$$U(x) \approx U_0 + x \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} + \frac{1}{2!} \frac{d^2 U}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 U}{dx^3} x^3 + \dots$$

$x_0 = 0$: pto de equilíbrio

estável $\rightarrow \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = 0$ e $\left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=0} \equiv k > 0$

$$\hookrightarrow U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2} k x^2 : \text{aproximação} \quad (65.1)$$

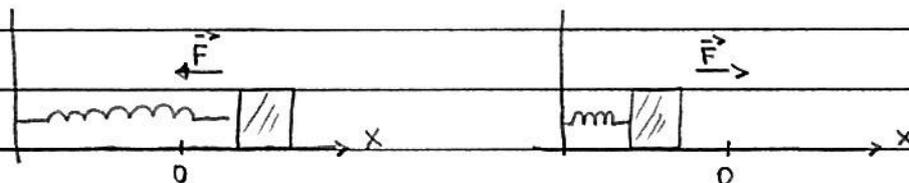
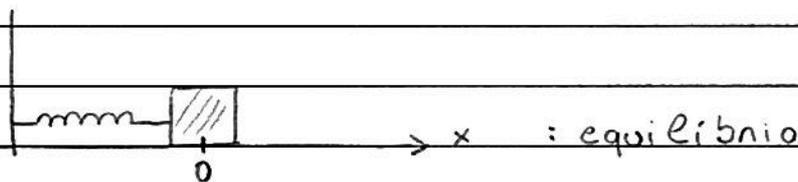
harmônica p/ $U(x)$

$$\text{como } F = - \frac{dU}{dx} \rightarrow F = -kx : \text{Lei de Hooke} \quad (65.2)$$

como $k > 0 \rightarrow \vec{F}$ é uma força restauradora:

sentido $\vec{F} =$ pto de equilíbrio!

Ex. força restauradora: sistema massa ⊕ mola



Obs. Eq. (65.1): $0 < k \ll |x(t)|$ "pequeno" ~ oscilações harmônicas (lineares)

se $\frac{d^n U}{dx^n} \Big|_{x=0}$, $n > 2$ incluídas \rightarrow oscilações não-lineares.

programa: estudar

(1) oscilador harmônico

(2) " " " ⊕ forças dissipativas

(3) " " " ⊕ " externas:

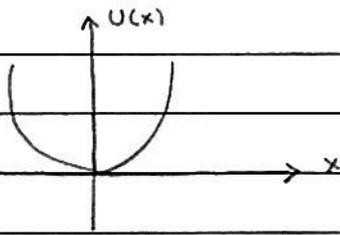
oscilações forçadas,

ressonância

(4) oscilações não lineares.

• Oscilador harmônico simples.

considerar: partícula massa m , movimento em 1-D,
sob $F = -kx$ ou sob $U(x) = +\frac{1}{2}kx^2$.



Eq. de movimento: $F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$\hookrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (67.1)

Solução, Eq (64.7):

$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta)$ (67.2)

amplitude
de oscilação

fase
frequência
oscilação

Condições iniciais: $x(t_0) = x_0 \rightarrow$ determinação A e δ ,
 $v(t_0) = v_0$

• características da solução (67.2):

• amplitude de oscilação $A = |x_{\text{MAX}}|$

• energia total:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m \omega_0^2}_k A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta)$$

(67.3)

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t - \delta)$$

$$\hookrightarrow E = T + U(x) = \frac{1}{2} k A^2$$

notas: $\cdot E = \text{cte}$, i.e., $E \neq E(t)$

$$\cdot E \propto A^2$$

$$\cdot \text{período } \tau_0: \omega_0 \tau_0 = 2\pi \rightarrow \tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\cdot \text{frequência } \nu_0: \nu_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\cdot \text{frequência angular } \omega_0: \omega_0 = 2\pi \nu_0$$

Obs.: comparem Eq. (67.2) c/ Ex. 2, pg. 36.

\cdot sobre a energia do oscilador:

$$\text{Eq. (67.3): } T(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t - \delta) : \text{energia cinética}$$

como $T = T(t)$ é uma função oscilatória, é interessante determinar

$$\langle T \rangle \equiv \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} dt T(t) : \text{valor médio de } T(t) \quad (68.1)$$

em um período τ_0

$$\text{como } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\hookrightarrow \langle T \rangle = \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{1}{4} k A^2 \int_0^{\tau_0} dt (1 + \cos 2\omega_0 t) = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{1}{2} E$$

$$\tau_0 \cdot \frac{1}{2\omega_0} \sin(\underbrace{2\omega_0 \tau_0}_{4\pi})$$

de modo análogo, verifica-se que:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} E$$

• comentário:

O.H. clássico: $E = \frac{1}{2} k A^2$, contínua, $E_{\min} = 0$

O.H. quântico: $E = \hbar \omega_0 (n + \frac{1}{2})$, discreta, $E_{\min} = \hbar \omega_0 / 2$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$

e $\hbar = \text{cte de Planck}$, $\hbar = h / 2\pi$.

• representação da solução (6.7.2);

$$\text{Eq. (6.7.2)} : x(t) = A \sin(\omega_0 t - \delta) = \sqrt{2E/k} \sin(\omega_0 t - \delta)$$

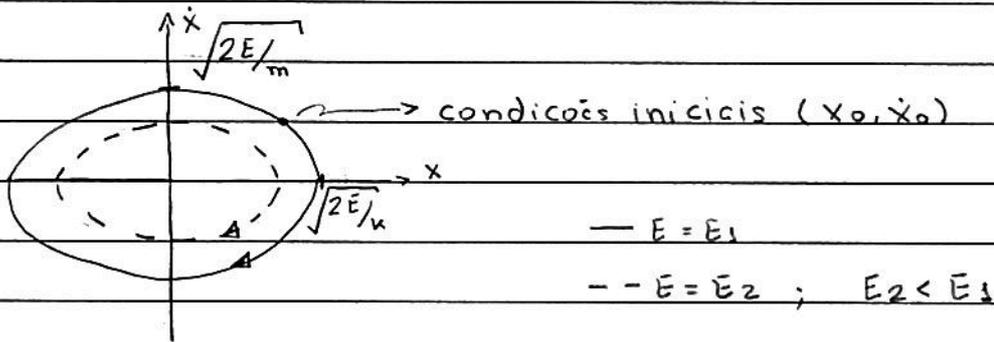
$$\dot{x}(t) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t - \delta) = \sqrt{2E/m} \cos(\omega_0 t - \delta)$$

: equações paramétricas $x(t)$ e $\dot{x}(t)$.

eliminando t :

$$\sin^2(\omega_0 t - \delta) + \cos^2(\omega_0 t - \delta) = \frac{x^2}{2E/k} + \frac{\dot{x}^2}{2E/m} = 1 \quad (6.9.1)$$

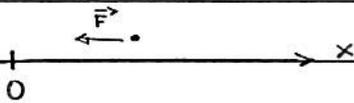
Eq. (6.9.1): elipse no espaço $x-\dot{x}$: espaço de fase.



notas: $x(0)$ e $\dot{x}(0) \rightarrow$ determinação A e $\delta \rightarrow$ det. E
 \hookrightarrow determinação da elipse.

Obs.: elipses não se cruzam pois a sol. Eq. (67.1) é única!

Ex. 1. P-5.10, Taylor: partícula massa m , movimento em 1-D.
 sob $F = -F_0 \sinh \alpha x$, F_0 e α : cte > 0 ;
 estudar o movimento da partícula.

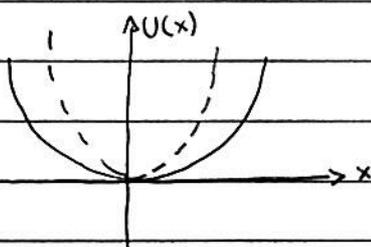


energia potencial:

$$U(x) = - \int F(x) dx = \frac{F_0}{\alpha} \cosh \alpha x + U_0$$

escolha $U(x=0) = 0 \rightarrow U_0 = -F_0/\alpha$

$$\hookrightarrow U(x) = \frac{F_0}{\alpha} (\cosh \alpha x - 1)$$



--- aprox. harmônica p/ $U(x)$

notas: $x=0$: pto de equilíbrio estável.

Eq. de movimento: $m\ddot{x} = -F_0 \sinh \alpha x$

consideram pequenas oscilações em torno pto de equilíbrio estável $x=0$:

como $\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$

$\hookrightarrow U(x) \approx -\frac{F_0}{\alpha} + \frac{F_0}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 + \dots \right) = \frac{1}{2} \underbrace{F_0 \alpha}_{=K} x^2 ; |x| \ll 1$

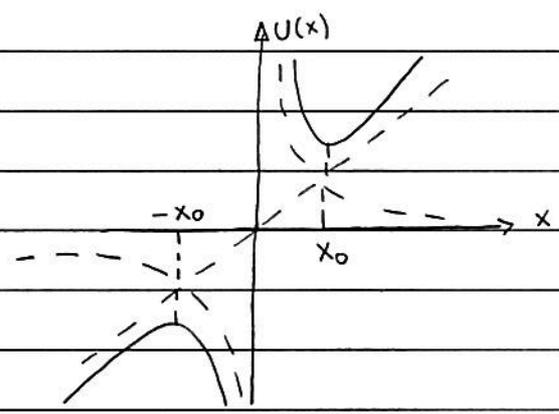
$\hookrightarrow F(x) = -\frac{dU}{dx} \approx -F_0 \alpha x ; |x| \ll 1.$

eq. de movimento:

$m\ddot{x} = -F_0 \sinh \alpha x \approx -F_0 \alpha x \rightarrow \ddot{x} + \frac{F_0 \alpha}{m} x = 0$

$\hookrightarrow \omega_0 = \sqrt{F_0 \alpha / m}$: frequência pequenas oscilações em torno $x=0$.

Ex. 2, P- 5.13, Taylor: partícula massa m , movimento em 1-D, sob $U=U(x)$; determinar pto de equilíbrio e ω pequenas oscilações.



$U(x) = U_0 \left(\frac{x}{a} + \frac{\lambda^2 a}{x} \right) ; U_0, a, \lambda : \text{cte} > 0$

$U(\lambda a) = 2 \lambda U_0$

ptos de equilíbrio:

$$\frac{dU}{dx} = U_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{\lambda^2 a}{x^2} \right) = 0 \rightarrow x_0 = \pm \lambda a$$

notas: $x_0 = \lambda a$: pto de equilíbrio estável

$x_0 = -\lambda a$: " " " instável

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{2U_0 \lambda^2 a}{x^3} \rightarrow \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=\lambda a} = \frac{2U_0}{\lambda a^2} \equiv K$$

$$\hookrightarrow U(x) \approx U(\lambda a) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{\lambda a} (x - \lambda a)^2 = 2\lambda U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{2U_0}{\lambda a^2} \right) (x - \lambda a)^2$$

: aproximação harmônica

$U(x)$ em torno $x_0 = \lambda a$

$$\hookrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2U_0}{\lambda m a^2}} : \text{frequência pequenas oscilações em torno } x_0 = \lambda a.$$

Ex. 3: veja Ex. 3. pg. 47.

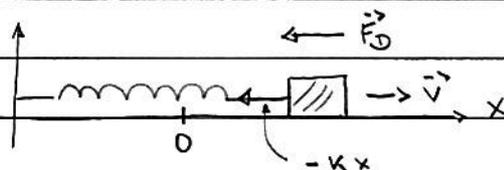
• Oscilações amortecidas.

considerar partícula massa m , movimento em 1-D

$$\text{sob } F = -Kx + F_D$$

hipótese: $F_D = -b\dot{x}$; $b > 0$.

Ex.: sistema massa + mola + atrito:



Eq. de movimento: $F = m \frac{dv}{dt} \rightarrow -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\hookrightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (73.1)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$: freq. de oscilação ($b=0$)

$\beta = b/2m$: parâmetro de amortecimento

sol. (73.1),

$$\text{se } x(t) = e^{nt} \quad (73.1) \rightarrow (n^2 + 2\beta n + \omega_0^2) e^{nt} = 0$$

$$\hookrightarrow n = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\hookrightarrow x(t) = A_1 e^{n_1 t} + A_2 e^{n_2 t} \quad (73.2)$$

$$\text{onde } n_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$n_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

notas: 3 casos distintos:

(1) $\omega_0^2 > \beta^2$: $n_{1/2} \in \mathbb{C}$: subamortecimento

(2) $\omega_0^2 = \beta^2$: $n_1 = n_2 \in \mathbb{R}$: amortecimento crítico

(3) $\omega_0^2 < \beta^2$: $n_{1/2} \in \mathbb{R}$: superamortecimento

vamos analisar os 3 casos separadamente.

(1) subamortecimento: $\omega_0^2 > \beta^2$

Definindo: $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$

$$\hookrightarrow \Omega_{1/2} = -\beta \pm i\omega_1$$

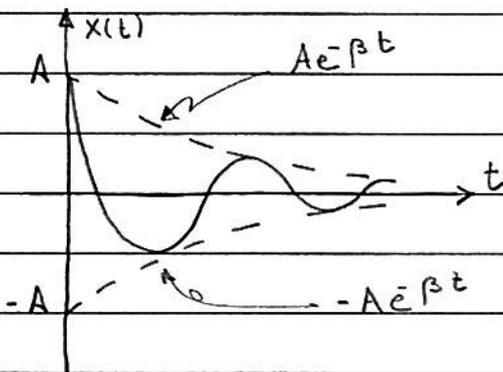
$$\text{Eq. (73.2)}: x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t})$$

(74.1)

$$= A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

ω_1 : "frequência angular": há oscilações mas o movimento não é periódico.

se condições iniciais: $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$ (veja detalhes abaixo):



notas: $1/\beta$: Δt tal que amplitude decai $1/e$ valor inicial

$\hookrightarrow \beta$: parâmetro de decaimento

(2) amortecimento crítico : $\omega_0^2 = \beta^2$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\beta$$

$$\text{Eq. (73.2)} : x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{\beta t} \tag{75.1}$$

↑ veja Eq. (64.6)

notar $\beta = \omega_0$: parâmetro de decaimento

(3) superamortecimento : $\omega_0^2 < \beta^2$

Definindo : $\omega_z^2 = \beta^2 - \omega_0^2 > 0$

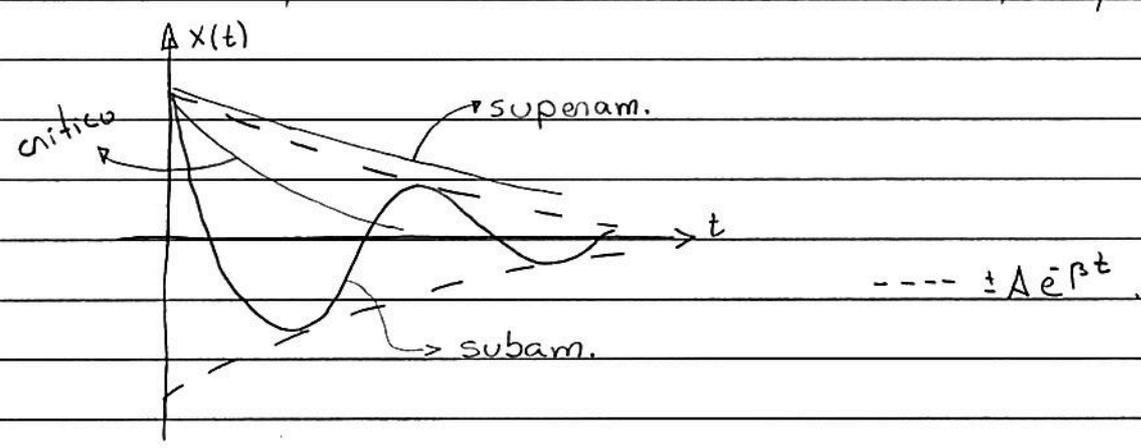
$$\hookrightarrow \alpha_{1/2} = -\beta \pm \omega_z$$

$$\text{Eq. (73.2)} : x(t) = \underbrace{A_1 e^{-(\beta - \omega_z)t}}_{\text{"decaimento lento"}} + \underbrace{A_2 e^{-(\beta + \omega_z)t}}_{\text{"decaimento rápido"}} \tag{75.2}$$

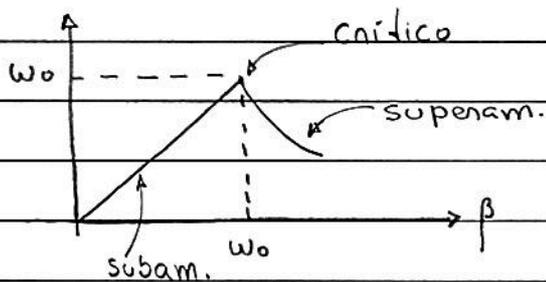
"decaimento lento" "decaimento rápido"

$\hookrightarrow \beta - \omega_z = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$: parâmetro de decaimento

se condições iniciais : $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$, verifica-se que



• sobre o parâmetro de decaimento:



↳ parâmetro de decaimento máximo p/ amortecimento crítico.

• sobre a energia:

$$E = T + U(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\hookrightarrow \frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + k x)$$

$$= m \dot{x} (\underbrace{\ddot{x} + \omega_0^2 x}_{-2\beta \dot{x}}) = -b \dot{x}^2$$

Eq. (73.1)

notas: $(-b \dot{x}) \cdot \dot{x} = (\text{força}) \times (\text{velocidade})$

Ex. 1: detalhes solução (74.1), subamortecimento;

condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$.

$$\text{Eq. (74.1): } x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

$$\hookrightarrow \dot{x}(t) = -A e^{-\beta t} (\beta \cos(\omega_1 t - \delta) + \omega_1 \sin(\omega_1 t - \delta))$$

$$x(0) = A \cos \delta = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -A (\beta \cos \delta - \omega_1 \sin \delta) = 0$$

$$\hookrightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{\beta}{\omega_1} \rightarrow \sin \delta = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega_1^2}} = \frac{\beta}{\omega_0}$$

$$\cos \delta = \frac{\omega_1}{\sqrt{\beta^2 + \omega_1^2}} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

$$\hookrightarrow A = \frac{x_0}{\cos \delta} = \frac{x_0 \omega_0}{\omega_1}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \dot{x}(t) &= -x_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_1} e^{-\beta t} \left(\underbrace{\frac{\beta}{\omega_0}}_{\sin \delta} \cos(\omega_1 t - \delta) + \underbrace{\omega_1}_{\omega_0} \sin(\omega_1 t - \delta) \right) \\ &= -x_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_1} e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t) \end{aligned}$$

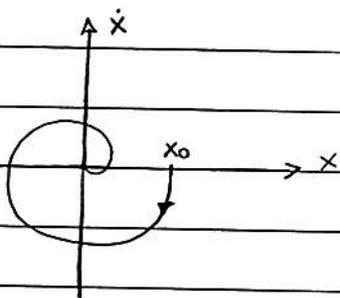
$$\hookrightarrow x(t) = x_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$

: equação paramétrica

$$\dot{x}(t) = -x_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_1} e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t)$$

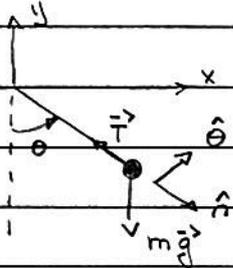
espinal espaço

de fase $x - \dot{x}$



Obs.: Companion c/ O.H. simples, pg. 70.

Ex. 2: pêndulo simples: partícula massa m , comprimento pêndulo $= l$, movimento plano $x-y$ ⊙ força resistiva; estudar movimento p/ pequenas oscilações.



inicial: força resistiva $\vec{F}_D = 0$.

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = (mg\cos\theta - T)\hat{n} - mg\sin\theta\hat{e}$$

Eq. de movimento (43.1) (coordenadas polares):

$$F_n = mg\cos\theta - T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

(78.1)

$$F_\theta = -mg\sin\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

como $r = l \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (78.1): } F_n = mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$

(78.1)

$$F_\theta = -mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

p/ pequenas oscilações em torno eixo y ou $\theta = 0$:

$$\sin\theta \approx \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{=\omega^2}\theta = 0 \quad ; \quad \text{eq. de movimento osc. harmônico}$$

① força resistiva \vec{F}_D ,

hipótese $F_D \propto v$ mov. \rightarrow $F_D \propto v\hat{\theta} = l\dot{\theta} = l\dot{\theta}$
 direção $\hat{\theta}$

$$\hookrightarrow \vec{F}_D = -2mb(l\dot{\theta})\hat{\theta}$$

\hookrightarrow sinal $\sim \dot{\theta} < 0$, veja abaixo!

$$\text{Eq. (78.1)} : F_n = mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$

(79.1)

$$F_\theta = -mg\sin\theta - 2mbl\dot{\theta} = ml\ddot{\theta}$$

em particular

$$\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g/l\sin\theta = 0$$

pl pequenas oscilações em torno de $\theta = 0$:

$$\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g/l\theta \approx 0$$

(79.2)

escolha: $F_D \sim$ amortecimento crítico $\rightarrow b = \omega_0 = \sqrt{g/l}$, veja pg. 73

sol. (79.2) = Eq. (75.1):

$$\theta(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\beta t} ; \beta = b = \omega_0!$$

$$\hookrightarrow \dot{\theta}(t) = A_2 e^{-\beta t} + (-\beta)(A_1 + A_2 t) e^{-\beta t}$$

condições iniciais: $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\hookrightarrow \theta(0) = \theta_0 = A_1$$

$$\dot{\theta}(0) = A_2 - \beta A_1 = 0 \rightarrow A_2 = \beta \theta_0$$

$\hookrightarrow \theta(t) = \theta_0 (1 + \beta t) e^{-\beta t}$

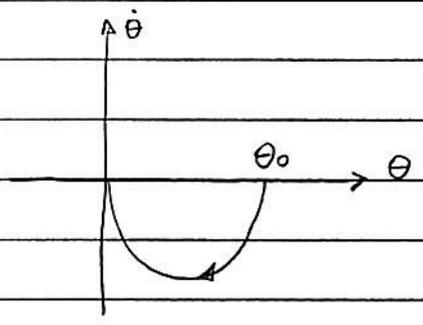
(80.1)

$\dot{\theta}(t) = -\theta_0 \beta^2 t e^{-\beta t}$

notas: $\dot{\theta}(t) < 0$: consistente expressão F_D !

Eq. (80.1) no espaço de fase $\theta - \dot{\theta}$:

t	θ	$\dot{\theta}$
0	θ_0	0
t	$< \theta_0$	< 0
∞	0	0



Obs.: comparar c/ oscilador harmônico simples, pg. 70: elipses!

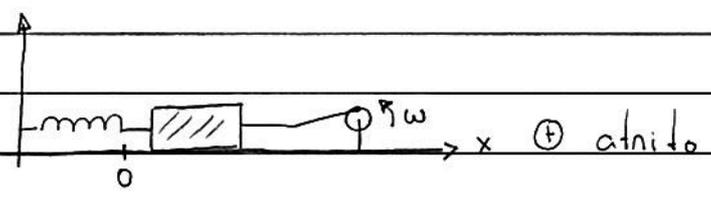
· Oscilações forçadas = O.H. \oplus força externa

considerar: partícula massa m , movimento em 1-D, sob $F = -Kx + F_D + F(t)$

hipótese: $F_D \propto -b\dot{x}$: amortecimento / força dissipativa

$F(t) = F_0 \cos \omega t$: força externa

Ex.: sistema massa \oplus mola \oplus atrito \oplus $F(t)$



Eq. de movimento:

$$F = m \frac{dv}{dt} \rightarrow -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\hookrightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t \quad (81.1)$$

onde:

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} : \text{freq. natural de oscilação (} b=0 \text{ e } F(t)=0 \text{)}$$

$$\beta = b/2m : \text{parâmetro de amortecimento}$$

$$A = F_0/m$$

(81.2)

ω : frequência força externa

sol. Eq. (81.1):

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (81.3)$$

onde: $x_h(t) = A_1 e^{n_1 t} + A_2 e^{n_2 t}$: sol. eq. homogênea ($F(t)=0$)

$$n_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

A_1 e $A_2 \sim$ condições iniciais

$$x_p(t) = D \cos(\omega t - \delta) : \text{sol. particular} \quad (81.4)$$

\hookrightarrow notar: frequência $F(t)$!

Determinação D e δ .

como $\dot{x}_p(t) = -D\omega \sin(\omega t - \delta)$ e $\ddot{x}_p(t) = -D\omega^2 \cos(\omega t - \delta)$

em (81.1) (veja abaixo):

$$\text{tg } \delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad : \text{ fase} \quad (82.1)$$

$$D(\omega) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \quad : \text{ amplitude} \quad (82.2)$$

\hookrightarrow sol. (81.1):

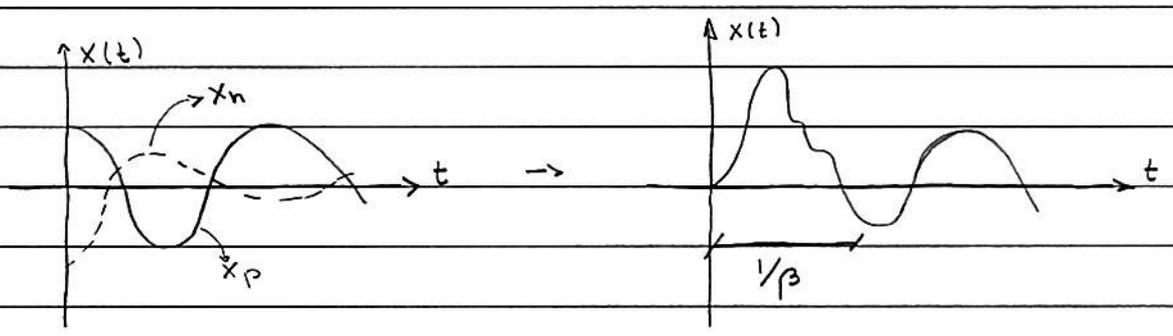
$$x(t) = A_1 e^{\eta_1 t} + A_2 e^{\eta_2 t} + D(\omega) \cos(\omega t - \delta) \quad (82.3)$$

notas:

$x(t \gg 1/\beta) = x_p(t)$, pois $x_h(t \gg 1/\beta) \rightarrow 0$

$\hookrightarrow x_h(t)$: solução transitória

Ex.:



$L > p / t \gg 1/\beta :$

$$x(t) = x_p(t) = D(\omega) \cos(\omega t - \delta) : \text{regime estacionário} \quad (83.1)$$

sobre Eq. (83.1) :

• $x(t)$ é a resposta do sistema à força externa (perturbação)

$$F(t) = F_0 \cos \omega t ;$$

• freq. resposta = freq. excitação ω ;

• \exists dissipação ($\beta \neq 0$) $\rightarrow \exists$ diferença de fase δ entre a resposta $x(t)$ e a excitação $F(t)$;

• $x_p(t) \neq$ c.i., apenas $x_h(t)$ (transitória) \propto c.i.,

• sobre a amplitude da resposta $D(\omega)$:

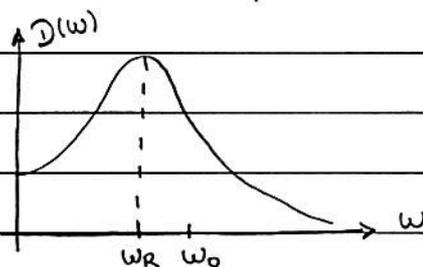
Eq. (82.3) : - $D \propto A$: amplitude excitação, ou

• $D = D(\omega)$: espenado D_{\max} p/ $\omega = \omega_0$,

entretanto, verifica-se que (veja abaixo) :

$$\frac{dD(\omega)}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} : \text{freqüência de ressonância} \quad (83.2)$$

$L > \exists$ efeitos dissipativos $\rightarrow \omega_R < \omega_0$!

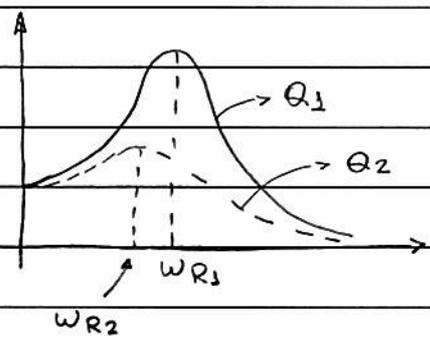


ω_0 e β : fixos.

Definindo: $Q \equiv \frac{\omega_R}{2\beta}$: fator de qualidade (84.1)

~ medida efeitos dissipativos!

notas:



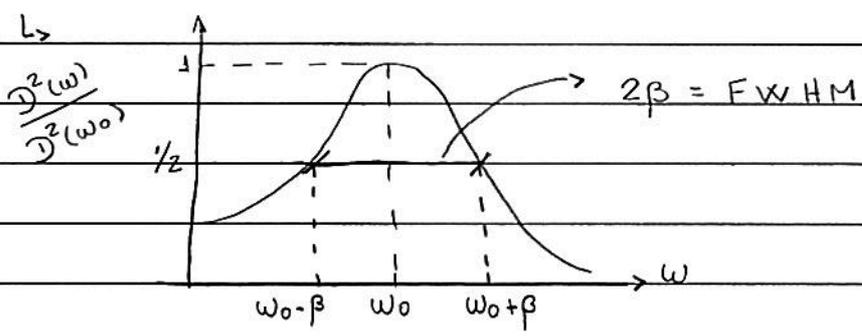
$Q_1 > Q_2$
 "menor" "maior"
 "dissipação" "dissipação"

hipótese: $\beta \ll \omega_0$

Eq. (83.2): $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0$

nesse caso, verifica-se que (veja abaixo):

$D(\omega_0 \pm \beta) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} D(\omega_0)$ (84.2)



full width at half maximum (FWHM)

se $\Delta\omega \equiv 2\beta$

Eq. (84.1): $Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, $\beta \ll \omega_0$.

detalhes (84.2):

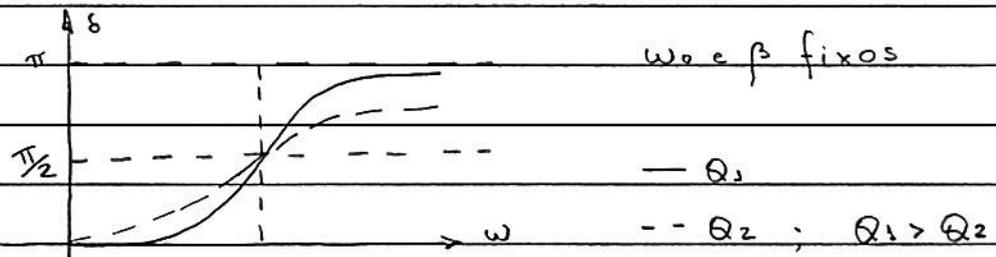
$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2 = (\omega_0 + \omega)^2(\omega_0 - \omega)^2 + 4\omega^2\beta^2 = (I)$$

$$\text{se } \omega = \omega_0 \pm \beta : (I) = (2\omega_0 \pm \beta)^2 \beta^2 + 4(\omega_0 \pm \beta)^2 \beta^2 \approx 8\omega_0^2 \beta^2$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}(\omega_0 \pm \beta) \approx \frac{A}{\sqrt{2} \sqrt{4\omega_0^2 \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{D}(\omega_0)$$

• sobre a diferença de fase δ :

Eq. (82.1):



notas: - se $\omega \ll \omega_0 \rightarrow \delta \approx 0$: $x(t)$ e $F(t)$ em fase

- c.c. " e " fora de fase

• Alternativas estudo da ressonância: 2 casos

(A) Considerações sobre a energia cinética,

$$\text{Eq. (83.1)} : \dot{x}(t) = \dot{x}_p(t) = -\omega \mathcal{D}(\omega) \sin(\omega t - \delta)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \frac{\omega^2 A^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2} \sin^2(\omega t - \delta) \\ &= \bar{A}(\omega) = \omega^2 \mathcal{D}^2(\omega) \end{aligned}$$

como $T = T(t)$ é oscilatória, vamos considerar seu valor médio sobre um período, Eq. (68.1):

$$\text{como } \langle \sin^2(\omega t - \delta) \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \sin^2(\omega t - \delta) \quad ; \quad \omega \tau = 2\pi$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \frac{1}{2} (1 - \cos 2(\omega t - \delta))$$

$$= \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2\omega} (\sin(2\omega\tau - 2\delta) + \sin 2\delta) \right) = 1/2$$

$$\hookrightarrow \langle T \rangle = \frac{m^2}{4} \bar{A}(\omega) = \frac{m^2}{4} \frac{\omega^2 A^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2} \quad (86.1)$$

verifica-se que (exercício):

$$\frac{d\langle T \rangle}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_R = \omega_0$$

$$\text{Exercício: mostram que } \frac{d\langle U \rangle}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

notas:

$$\text{máxima amplitude } x(t) : \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \neq \text{ posição MAX}$$

$$\text{" " " } \langle T \rangle : \omega_R = \omega_0 \quad : \sim \exists \text{ efeitos}$$

$$\text{" " " } \langle U \rangle : \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \text{dissipativos} \\ (\beta \neq 0)$$

(B) sobre o trabalho feito sob oscilador pela força externa,

$$\text{potência: } P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = F\dot{x} = F\dot{x}_p = \frac{-A^2 m \omega \cos \omega t \sin(\omega t - \delta)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}^{1/2}$$

como $\cos \omega t \sin(\omega t - \delta) = \cos \omega t \sin \omega t \cos \delta - \cos^2 \omega t \sin \delta$

↳ exercício $\rightarrow \langle \cos \omega t \sin(\omega t - \delta) \rangle = -\frac{1}{2} \sin \delta$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \langle P_{ext} \rangle &= \frac{1}{2} \underbrace{A \omega}_{F_0} \underbrace{A \omega}_{\dot{x}_{p,MAX}} \sin \delta = \frac{1}{2} F_0 \dot{x}_{p,MAX} \sin \delta \\ &\quad \text{[força] [velocidade]} \end{aligned}$$

como (veja abaixo) $\sin \delta = \frac{2\omega\beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}^{1/2}$

$$\hookrightarrow \langle P_{ext} \rangle = A^2 m \frac{\omega^2 \beta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2} \quad (87.1)$$

devido a similitude c/ $\langle T \rangle$ [Eq. (86.1)]

↳ máximo $\langle P_{ext} \rangle$: $\omega_R = \omega_0$

· vamos verificar que $\langle P_{ext} \rangle = \langle P_{FORÇA DISSIPATIVA} \rangle$

temos que : $T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} k x_p^2$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}(T + U) = \dot{T} + \dot{U} = m \dot{x}_p \ddot{x}_p + k x_p \dot{x}_p$$

$$= m \dot{x}_p (\ddot{x}_p + \omega_0^2 x_p) = m \dot{x}_p \left(\frac{F(t)}{m} - 2\beta \dot{x}_p \right)$$

↑
Eq. (81.1)

Exercício: mostrar que $\langle \dot{T} + \dot{U} \rangle = 0$.

$$\hookrightarrow \langle \dot{T} + \dot{U} \rangle = \langle F(t) \dot{x}_p \rangle - \langle \dot{x}_p (b \dot{x}_p) \rangle = 0$$

$$= \langle P_{\text{ext}} \rangle - \langle P_{\text{Força Dissipativa}} \rangle$$

• detalhes Eqs. (82.1) e (82.2):

(81.4) em (81.1):

$$-D\omega^2 \cos(\omega t - \delta) - 2\beta D\omega \sin(\omega t - \delta) + \omega_0^2 D \cos(\omega t - \delta) = A \cos \omega t$$

$$\cos \omega t \left(-D(\omega^2 - \omega_0^2) \cos \delta + 2\beta D\omega \sin \delta \right) +$$

$$+ \sin \omega t \left(-D(\omega^2 - \omega_0^2) \sin \delta - 2\beta D\omega \cos \delta \right) = A \cos \omega t$$

$$\hookrightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \rightarrow \quad \sin \delta = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\hookrightarrow D(\omega) = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\beta\omega \sin \delta} = (82.2)$$

• detalhes Eq. (83.2):

$$\frac{dD(\omega)}{d\omega} = \frac{A(-1/2) \left(2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\omega\beta^2 \right)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2 \right)^{3/2}} = 0$$

$$\hookrightarrow \omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

Ex.: circuitos elétricos:

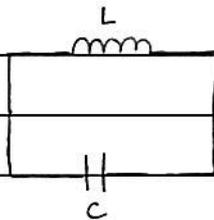
dispositivos:

—mm— resistor R : $V = RI$ ~ dissipação

—||— capacitor C : $V = \frac{1}{C} Q$ ~ energia eletrostática : $U = \frac{Q^2}{2C}$

—mm— indutor L : $V = L \frac{dI}{dt}$ ~ energia magnética : $U = \frac{1}{2} LI^2$

(A) circuito LC



Lei de Kirchhoff:

$$V_C + V_L = 0 \rightarrow \frac{1}{C} Q + L \frac{dI}{dt} = 0$$

como $I = \dot{Q}$ $\rightarrow L \ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0$: eq. o.H. (89.1)
p/ $Q = Q(t)$

solução : $Q(t) = A \cos(\omega_0 t - \delta)$: Eq. (67.2) (89.2)

$$\text{onde } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\hookrightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t - \delta)$$

se c.i. : $Q(0) = Q_0$ e $I(0) = 0 \rightarrow A = Q_0$ e $\delta = 0$

• sobre a energia do sistema:

$$\cdot U_C(t) = \frac{1}{2C} Q^2(t) = \frac{A^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t - \delta)$$

$$\cdot U_L(t) = \frac{1}{2} L I^2(t) = \frac{1}{2} L \omega_0^2 \underbrace{A^2}_{1/C} \sin^2(\omega_0 t - \delta)$$

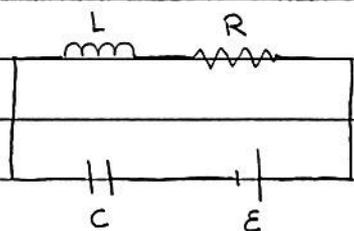
$$\hookrightarrow E = U_C(t) + U_L(t) = \frac{1}{2} \frac{A^2}{C} = \text{cte!}$$

• comparação c/ sistema massa-mola:

$$\text{Eq. (67.1)}: m\ddot{x} + kx = 0; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow Q \\ \dot{x} \rightarrow I \end{array} \right\} \begin{array}{l} c \rightarrow 1/k \\ m \rightarrow L \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{comparar Eqs. (67.1) e (89.1)} \\ \text{veja Eq. (90.1) abaixo} \end{array}$$

(B) circuito RLC ⊕ E



Lei de Kirchhoff:

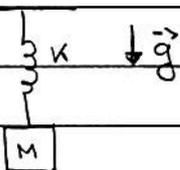
$$E = V_L + V_C + V_R$$

$$E = L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} Q + RI$$

$$\text{Como } I = \dot{Q} \rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = E \quad (90.1)$$

• se $E = \text{cte}$: circuito ~ sistema massa-mola

⊕ força externa cte



se $E = F(t) = E_0 \cos \omega t$

Sol. (90.1), regime estacionário : $Q(t) = Q_p(t) = D(\omega) \cos(\omega t - \delta)$: (81.4)

onde:

$D(\omega) = \frac{F_0/m}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2)^{1/2}} \rightarrow \frac{E_0/L}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2/L^2)^{1/2}}$

"sistema massa-mola"

$\beta = \frac{b}{2m} = \frac{R}{2L}$

"circuito"

$\omega_0 = \sqrt{LC}$

$I(t) = \dot{Q}(t) = -\omega D(\omega) \sin(\omega t - \delta)$

tensão no indutor:

$V_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega^2 D(\omega) \cos(\omega t - \delta) \equiv V(\omega)$

máximo V_L : $\frac{dV(\omega)}{d\omega} = 0$ exercício $\rightarrow \omega = \omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC - R^2C^2/2}}$

notas: 3 efeitos dissipativos $\rightarrow \omega_R \neq \omega_0$: comparan c/ comportamento amplitude o.H. forçado, Eq. (83.2).

Resposta oscilador harmônico à $F(t)$ qualquer,

até o momento: resposta $x(t)$ do o.H. à perturbação/excitação

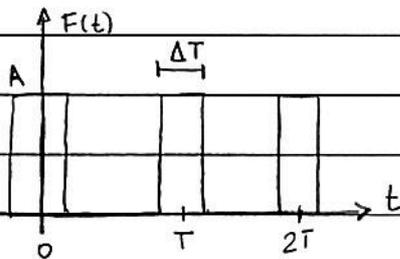
$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

ideia: considerar $F(t)$ arbitrária;

vamos considerar 2 casos:

(A) $F(t)$ periódica,

Ex.: $F(t)$ = pulso retangular.



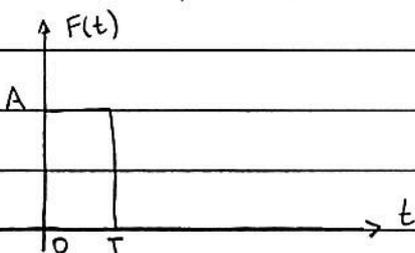
: o.H. ⊕ vários "kicks"

$$F(t) = \sum_{n>0} a_n F_n(t) = \sum_{n>0} a_n \cos(n\omega t - \phi_n) \quad \text{: série de Fourier } F(t)$$

resposta no regime estacionário : $x(t) = \sum_{n>0} a_n x_n(t)$: princípio de superposição

↓
resposta à $F_n(t)$

(B) $F(t)$ impulso,



$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

: o.H. ⊕ um "kick"

solução completa = homogênea \oplus particular

$$\text{resposta: } x(t) = \int_{-\infty}^t dt' G(t, t') F(t')$$

↳ Função de Green.

ideia: O.H. em repouso \oplus perturbação \rightarrow resposta $x(t)$.
(posição eq.) (impulso)

• Lembrar: série de Fourier.

considerar função $f = f(t)$ tal que

- f é periódica, período T , i.e., $f(t+T) = f(t)$
- "single-valued" e contínua por partes (= # finito descontinuidades)
- # máximos e mínimos finito em T

$$- \int_{t_0}^{t_0+T} dt |f(t)| < \infty \quad (93.1)$$

↳ $f(t)$ pode ser expandida em uma série de $\sin t$ e $\cos t$, i.e.,

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad (93.2)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad (93.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

determinação coeficientes \sim ortogonalidade entre
 a_n e b_n as funções $\sin t$ e $\cos t$

$$\text{temos que: } \int_{t_0}^{t_0+T} dt \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) = \frac{1}{2} T \delta_{n,m}, \quad n, m \neq 0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} dt \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) = 0$$

$$L \rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} dt \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) * \text{Eq. (93.2)} : \quad (m \neq 0)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} dt f(t) \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) = \frac{1}{2} a_0 \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} dt \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)}_{=0} +$$

$$+ \sum_{n \neq 0} a_n \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} dt \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)}_{\frac{1}{2} T \delta_{n,m}} +$$

$$+ b_n \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T} dt \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right)}_{=0} : \text{Eq. (93.3)!}$$

Obs.: uma função não-periódica pode ser escrita como (93.2) em um intervalo $a < t < b$.

Ex. 3: determinar a série de Fourier pulso retangular, pg. 92.

$$\text{Eq. (93.3)} : a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$= \frac{2A}{T} \int_0^{AT/2} dt 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n AT}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = 0$$

Como $F(t)$ é par $\rightarrow a_n \neq 0$ e $b_n = 0$

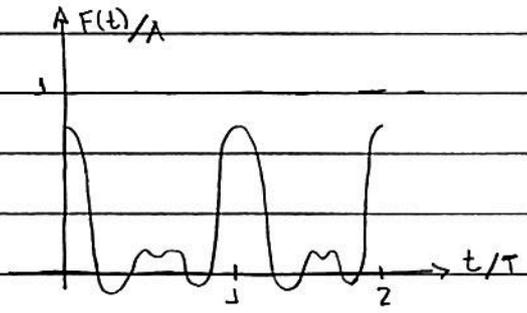
$$\hookrightarrow F(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \gg 1} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad : \text{ s\u00e9rie de Fourier } \quad (95.1)$$

p/ pulso retangular

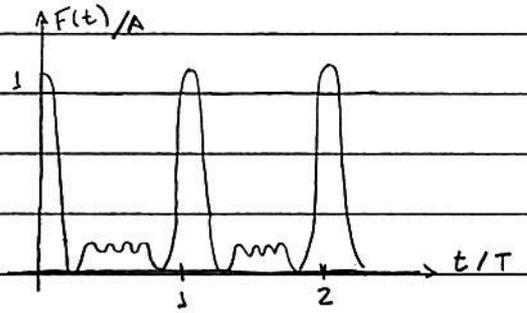
hip\u00f3tese : $\Delta T = 1/4$

$$\hookrightarrow \frac{F(t)}{A} = 0.25 + 0.24 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 0.23 \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) +$$

$$+ 0.20 \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) + 0.16 \cos\left(\frac{8\pi t}{T}\right) + \dots$$



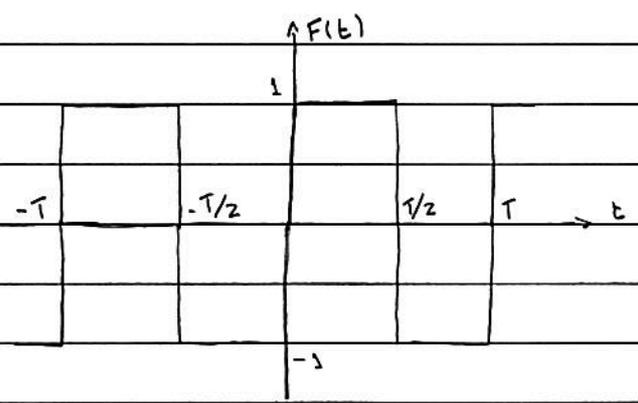
$n \leq 2$



$n \leq 6$

notas: poucos termos suficientes p/ boa aproxima\u00e7\u00e3o p/ $F(t)$!

Ex. 2: determinar a s\u00e9rie de Fourier da "onda quadrada":



Como $F(t)$ é ímpar $\rightarrow a_n = 0$ e $b_n \neq 0$

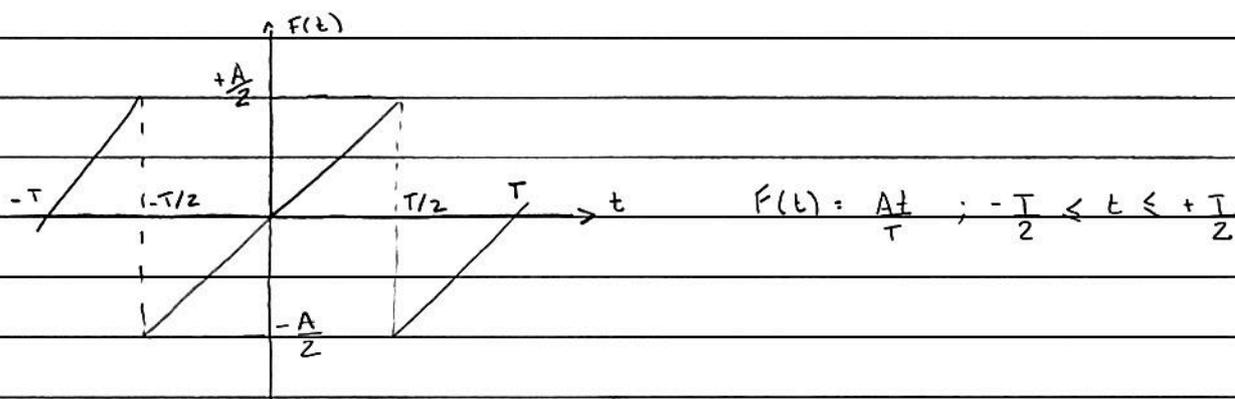
$$\text{Eq. (93.3): } b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} t \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow F(t) &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5 \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right) \quad (96.1) \end{aligned}$$

onde $\omega = 2\pi/T$: frequência angular.

Ex. 3: determinar a série de Fourier de "sawtooth".



Verifica-se que (exercício): $a_n = 0$ e $b_n = \frac{A}{n\pi} (-1)^{n+1}$

$$\hookrightarrow F(t) = \frac{A}{\pi} \left(\sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) + \dots \right)$$

(96.2)

(A) $F(t)$ periódica,

considera oscilador harmônico forçado;

a eq de movimento (81.3) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \right) x(t) = F_0 \cos \omega t = F(t) \quad (97.1)$$

definindo $\hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b$: operador

$$\hookrightarrow (97.1) : \hat{L} x(t) = F(t) \quad (97.2)$$

\hat{L} : operador linear pois : $\hat{L}(x_1(t) + x_2(t)) = \hat{L}x_1(t) + \hat{L}x_2(t)$

$$\hookrightarrow \text{se } \hat{L}x_1 = F_1 \quad \rightarrow \hat{L}(c_1x_1 + c_2x_2) =$$

$$\text{e } \hat{L}x_2 = F_2$$

$$= c_1 \hat{L}x_1 + c_2 \hat{L}x_2 = \text{princípio de superposição}$$

$$= c_1 F_1 + c_2 F_2 \quad ;$$

caso geral : se $\hat{L}x_n(t) = F_n(t)$, i.e.,

$x_n(t)$ é sol. Eq. (97.1) p/ $F(t) = F_n(t)$

$$\hookrightarrow \hat{L}x(t) = \hat{L}\left(\sum_{n=1}^N c_n x_n(t)\right) = \sum_{n=1}^N c_n \hat{L}x_n(t) = \sum_{n=1}^N c_n F_n(t)$$

$$= F(t)$$

$$\text{notar : se } F(t) = \sum_n c_n \cos(\omega_n t) = \sum_n c_n F_n(t)$$

\hookrightarrow no regime estacionário temos que, veja pgs. 81 e 82 ;

$$x_n(t) = D(\omega_n) \cos(\omega_n t - \delta_n)$$

$$\text{onde } D(\omega_n) = \frac{1/m}{\left((\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\omega_n^2 \beta^2 \right)^{1/2}} \quad (97.3)$$

$$c_n = \text{tg}^{-1} \left(\frac{2\omega_n \beta}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \right)$$

$$\hookrightarrow x(t) = \sum_n C_n X_n(t) \quad : \text{ s\u00e9rie de Fourier } \quad (98.1)$$

p/ resposta $x(t)$.

procedimento p/ a determina\u00e7\u00e3o resposta $x(t)$ p/ $F(t)$ peri\u00f3dica:

dado $F(t)$ \rightarrow determina-se os coeficientes C_n \rightarrow determina-se $x(t)$!
 (= a_n e b_n)

Ex.: consideramos O.H. for\u00e7ado sob $F(t)$ = "onda quadrada";
 determinamos $x(t)$ no regime estacion\u00e1rio.

$$\text{Eq. (96.1)}: F(t) = \sum_{n \gg 1} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(n\omega t); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\hookrightarrow C_n = \frac{4}{(2n+1)\pi} \quad \text{e} \quad \omega_n = \frac{2n\pi}{T}$$

$$\hookrightarrow x(t) = \sum_{n \gg 1} \frac{4}{(2n+1)\pi} \mathcal{D}(\omega_n) \sin(\omega_n t - \delta_n)$$

onde $\mathcal{D}(\omega_n)$ e δ_n : Eq. (97.1).

• lembrar: fun\u00e7\u00e3o delta de Dirac.

Defini\u00e7\u00e3o fun\u00e7\u00e3o delta de Dirac $\delta(x)$:

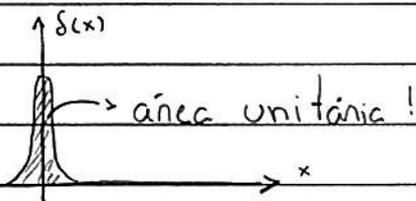
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x-a) = f(a) \quad (98.2)$$

tilibra

onde $f = f(x)$ \u00e9 uma fun\u00e7\u00e3o arbit\u00e1ria suave.

alternativa (definição informal):

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (99.1)$$

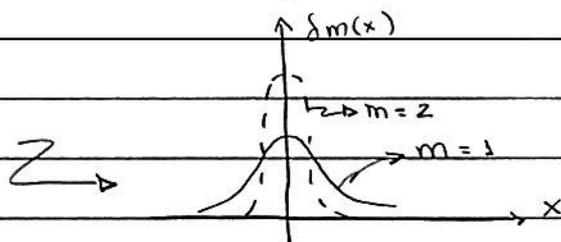


de fato, $\delta(x)$ é uma função generalizada = limite sequência de funções.

e.g., $\delta(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sin mx}{\pi x}$

$$\delta(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2 x^2}$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon/\pi}{x^2 + \epsilon^2}$$



identidades (verifica-se que):

$$(1) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0 \rightarrow \delta(-x) = \delta(x)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) \frac{d}{dx} \delta(x-x') = -f'(x')$$

$$(3) \frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x), \quad \text{onde} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{função} \\ \text{de Heaviside} \end{array}$$

$$(4) \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x')} \quad (99.2)$$

(B) $F(t)$ impulso.

considerar o.H. amortecido \oplus força externa $F(t)$;
eq. de movimento, veja pg. 81;

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (100.1)$$

sol. : $x(t) = X_h(t) + X_p(t)$

onde $X_h(t) = e^{-\beta t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t)$; $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

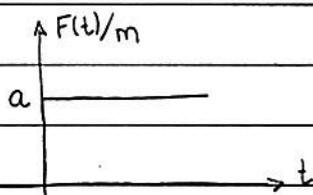
e $X_p(t) \sim F(t)$.

• \neq caso (A), vamos considerar a sol. transitória $X_h(t)$.

• vamos considerar 2 casos particulares inicialmente.

(i) $F(t) = \theta(t)$: função degrau.

nesse caso :



$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a, & t > 0, a > 0 \end{cases}$$

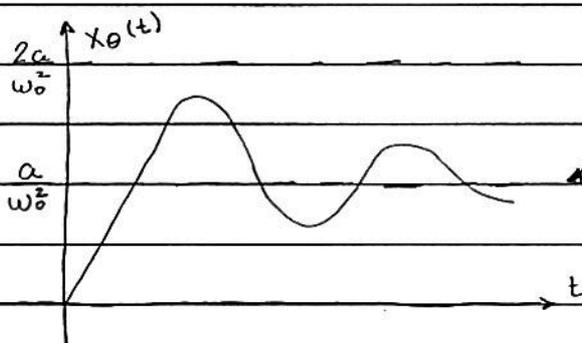
Eq. (100.1) : $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a, t > 0$

Verificamos $\rightarrow X_p(t) = \frac{a}{\omega_0^2}$

$\hookrightarrow x(t) = e^{-\beta t} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t) + \frac{a}{\omega_0^2}, t > 0$

se c.l. $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ exercício $\rightarrow A_1 = -\frac{a}{\omega_0^2}$ e $A_2 = -\frac{\beta a}{\omega_1 \omega_0^2}$

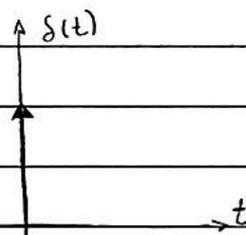
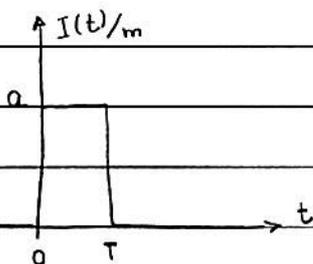
$$\hookrightarrow x_{\theta}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{a}{\omega_0^2} \left(1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta e^{-\beta t}}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right), & t > 0 \end{cases} \quad (101.1)$$



efeito $F(t)$: deslocam pto de equilibrio $x=0 \rightarrow a/\omega_0^2!$

(ii) $F(t) = I(t)$: impulso

nesse caso:
$$\frac{I(t)}{m} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a, & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$$



como $I(t) = F(t) - F(t-T) = a(\theta(t) - \theta(t-T))$

\hookrightarrow sol eq de $x(t) = x_{\theta}(t) - x_{\theta}(t-T)$: princípio de superposição
movimento :

Eq. (101.1)

$$\hookrightarrow x(t) = \frac{a e^{-\beta t}}{\omega_0^2} \left(e^{\beta T} \cos \omega_1 (t-T) - \cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \left(e^{\beta T} \sin \omega_1 (t-T) - \sin \omega_1 t \right) \right) \quad (101.2)$$

$$\text{ou } x(t) = \frac{a}{\omega_0^2} e^{-\beta t} \left(\underbrace{\cos \omega_1 t \left(e^{\beta T} \cos \omega_1 T - \frac{\beta}{\omega_1} e^{\beta T} \sin \omega_1 T - 1 \right)}_{(I)} + \right. \\ \left. + \sin \omega_1 t \left(\underbrace{e^{\beta T} \sin \omega_1 T + \frac{\beta}{\omega_1} e^{\beta T} \cos \omega_1 T - \frac{\beta}{\omega_1}}_{(II)} \right) \right) \quad (102.1)$$

vamos considerar o limite $T \rightarrow 0$

$$a \rightarrow \infty \quad \text{c/ } b = T \cdot a = \text{cte}$$

nesse caso $I(t) \rightarrow \delta(t)$!

notas:

$$(I) = (1 + \beta T) \left(1 - \frac{1}{2} (\omega_1 T)^2 \right) - \frac{\beta}{\omega_1} (1 + \beta T) \omega_1 T - 1$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{2} (\omega_1 T)^2 + \beta T - \beta T - (\beta T)^2 - \cancel{1} \sim T^2$$

$$\hookrightarrow \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ a \rightarrow +\infty}} a \cdot (I) = \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ a \rightarrow +\infty}} a T^2 = 0$$

$$(II) \approx (1 + \beta T) \omega_1 T + \frac{\beta}{\omega_1} (1 + \beta T) \cdot 1 - \frac{\beta}{\omega_1}$$

$$\approx \omega_1 T + \beta \omega_1 T^2 + \frac{\beta^2 T}{\omega_1} \approx \frac{1}{\omega_1} \underbrace{(\omega_1^2 + \beta^2)}_{\omega_0^2} T$$

$$\hookrightarrow \lim_{\substack{T \rightarrow 0 \\ a \rightarrow +\infty}} a \cdot (II) = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \underbrace{(aT)}_{=b}$$

$$\hookrightarrow x(t) = \frac{b}{\omega_1} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t, \quad t > 0 \quad (102.2)$$

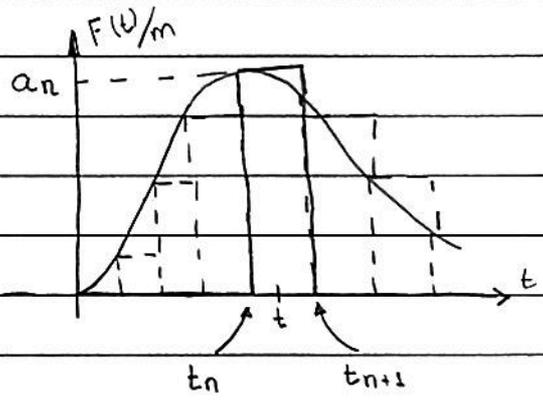
$$t \rightarrow t - t_0 : x(t) = \frac{b}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_0)} \sin \omega_1 (t-t_0); \quad t > t_0 \quad (102.3)$$

: resposta osciladora

impulso $I(t)$ em $t = t_0$!

como $F(t)$ qualquer = soma impulsos retangulares
 \hookrightarrow (102.3) pode ser utilizada p/ determinar $x(t)$.

notas:



$$\text{como } F_n(t) = \begin{cases} a_n + m & ; t_n < t < t_{n+1} \\ 0 & ; \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(t) ; t_N < t < t_{N+1} : F(t) = \sum \text{ impulsos retangulares até } t_{N+1} !$$

considerando $b = a_n T$ e $t_0 = t_n$ em (102.3)

$$\hookrightarrow x_n(t) = \frac{a_n T}{\omega_1} e^{-\beta(t-t_n)} \sin \omega_1(t-t_n)$$

peço principio de superposição:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t) ; t_N < t < t_{N+1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \underbrace{a_n}_{= F_n} \underbrace{e^{-\beta(t-t_n)} \sin \omega_1(t-t_n)}_{= G(t, t_n)} \end{aligned}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} : \begin{array}{l} F_n \rightarrow F(t_n = t') \\ G(t, t_n) \rightarrow G(t, t') \end{array} \quad \sum_n \tau \rightarrow \int_{-\infty}^t dt'$$

$$\hookrightarrow x(t) = \int_{-\infty}^t dt' G(t, t') F(t') \quad (104.1)$$

$$\text{onde } G(t, t') = \begin{cases} 0 & , t < t' \\ \frac{1}{m\omega_s} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_s(t-t') & , t > t' \end{cases} \quad (104.2)$$

Eq. (104.2) : Função de Green

OBS : • condições iniciais incluídas em (104.1)

• (104.2) ok p/ c.i. $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

• (104.2) ok p/ subamortecimento

Ex. : consideramos o H. amortecido sob

$$F(t) = F_0 e^{-\gamma t} ; t > 0$$

⊕ c.i. $x(0) = \dot{x}(0) = 0$; determinam a resposta $x = x(t)$.

notas : duas escalas de tempo : $1/\beta \sim$ decaimento

$1/\gamma \sim$ tempo característico $F(t)$.

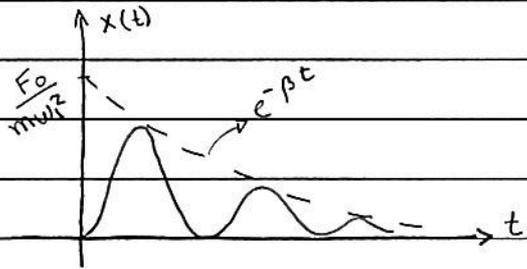
$$\text{Eq. (104.1)} : x(t) = \frac{F_0}{m\omega_s} \int_0^t dt' e^{-\gamma t'} e^{-\beta(t-t')} \sin \omega_s(t-t')$$

$$= \frac{F_0/m}{(\gamma - \beta)^2 + \omega_s^2} \left(e^{-\gamma t} - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_s t - \frac{(\gamma - \beta)}{\omega_s} \sin \omega_s t \right) \right)$$

///

hipótese: $\beta = \delta$

$$\hookrightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1^2} e^{-\beta t} (1 - \cos\omega_1 t)$$



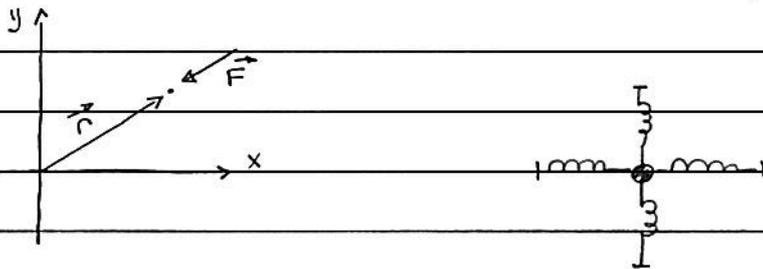
· Lembra que: Eq. (104.2) ou p/ oscilador subamortecido.

Exercício: determinar $G(t, t')$ p/ oscilador criticamente amortecido:

• Oscilador harmônico em 2-D,

consideramos: partícula massa m , movimento em 2-D, sob

$$\vec{F} = -\kappa \vec{r} = -\kappa x \hat{x} - \kappa y \hat{y} \quad ; \text{ oscilador harmônico (106.1)} \\ \text{isotrópico}$$



Eq. de movimento: $\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\kappa \vec{r} \quad ; \quad \kappa = \text{cte} > 0$

↳ direção x : $m \ddot{x} = -\kappa x \rightarrow \ddot{x} + \omega_{0x}^2 x = 0$

(106.2)

" y : $m \ddot{y} = -\kappa y \rightarrow \ddot{y} + \omega_{0y}^2 y = 0$

onde $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$: Q.H. isotrópico

sol. (106.2) : $x(t) = A \cos(\omega_0 t - \alpha)$ (106.3)

$y(t) = B \cos(\omega_0 t - \beta)$: eq. paramétrica
trajetória

eliminando t em (106.3), verifica-se que (exercício)

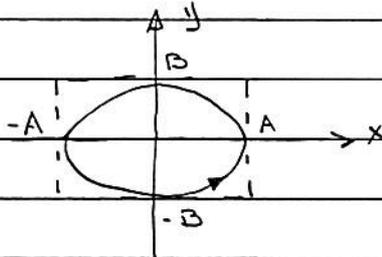
$$B^2 x^2 - 2ABxy \cos \delta + A^2 y^2 = A^2 B^2 \sin^2 \delta \quad ; \text{ eq. da (106.4)}$$

trajetória

onde $\delta \equiv \alpha - \beta$.

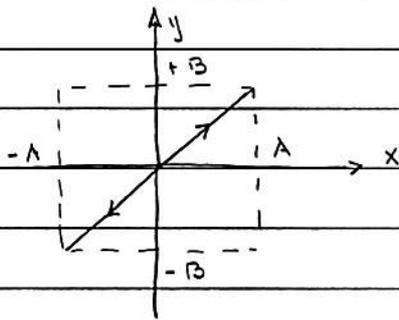
casos particulares:

(i) $\delta = \pm \pi/2$: Eq. (106.4) : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$: trajetória =
= ellipse



se $A = B$: círculo

(ii) $\delta = 0$: Eq. (106.4) : $B^2x^2 - 2ABxy + B^2y^2 = 0$



$(Bx - Ay)^2 = 0 \rightarrow y = \frac{B}{A}x$: trajetória =
= reta

(iii) $\delta = \pm \pi$: Eq. (106.4) : $y = -\frac{B}{A}x$

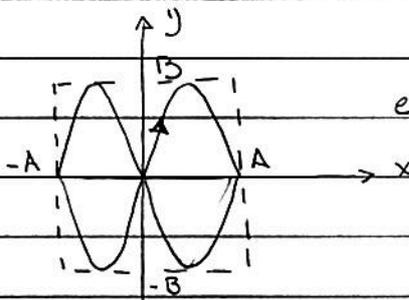
hipótese : $\omega_{0x} \neq \omega_{0y}$: O.H. anisotrópico

2 casos : (i) se $\exists n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ tais que

$\frac{\omega_{0x}}{n_x} = \frac{\omega_{0y}}{n_y}$: frequências : trajetória
comensuradas fechada

(ii) c.c. : frequências : trajetória
incomensuradas aberta

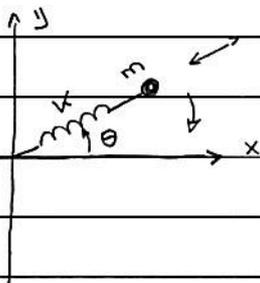
Ex.:



eq. trajetória = curva de Lissajous.

$\omega_{0y} = 2\omega_{0x}$ ($\delta = 0$)

Ex. P 3.43 M: partícula massa m e mola cte = κ ,
movimento em 2-D; estudar movimento
da partícula



nesse caso: $\vec{F} = -\kappa(r-a)\hat{n}$; κ e a : cte > 0

notas: \vec{F} é uma força central, veja pgs. 59-63.

Eq. de movimento (coordenadas polares):

$$\text{Eq. (43.1): } m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 = F_r = -\kappa(r-a) \quad (108.1)$$

$$m\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = F_{\theta} = 0 \quad (108.2)$$

$$\text{Eq. (108.2): } r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} \rightarrow \frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -2 \frac{dr}{r dt}$$

$$\hookrightarrow \int \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2 \int \frac{dr}{r} \rightarrow \ln \dot{\theta} = -2 \ln r + \text{cte}$$

$$\hookrightarrow r^2 \dot{\theta} = \text{cte de movimento}$$

como momento angular \vec{L} , Eq. (43.2):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m r \hat{n} \times (\dot{r} \hat{n} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) = m r^2 \dot{\theta} \hat{z}$$

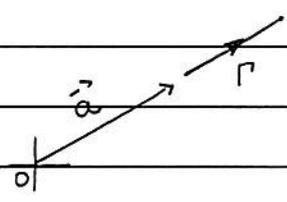
(108.3)

$\hookrightarrow L = m r^2 \dot{\theta} = \text{cte de movimento}$, ou p_{θ} força central.

energia: como \vec{F} é conservativa e $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r)$, temos que

Eq. (34.1.0):

$$U(r) = - \int_{a, r}^r \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{e} = \int_{a, r}^r k(r-a) \hat{n} \cdot dn \hat{n} = \frac{1}{2} k(r-a)^2$$



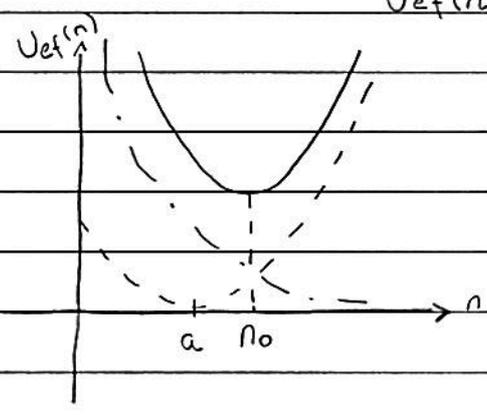
$$\hookrightarrow E = T + U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k(r-a)^2 :$$

etc de movimento

como $\dot{\theta} = L/mr^2$

$$\hookrightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} k(r-a)^2 + \frac{L^2}{2mr^2}}_{U_{ef}(r)} : \text{problema radial} = \text{partícula em 1-D}$$

sob $U_{ef}(r)$, veja Eq.(6.1.1)



- $\frac{1}{2} k(r-a)^2$
- .-.-.- $L^2/2mr^2$
- U_{ef}

\exists min em $U_{ef}(r) \rightarrow$ possibilidade órbita circular!

vamos determinar a frequência órbita circular!

$$\text{como } \left. \frac{dU_{\text{ef}}}{dn} \right|_{n=n_0} = 0 \rightarrow \kappa(n_0 - a) - \frac{L^2}{m n_0^3} = 0 \quad (110.1)$$

$\hookrightarrow L^2 = m \kappa n_0^3 (n_0 - a)$: relação em L e n_0 !

$$\text{como } L^2 = m^2 n_0^4 \dot{\theta}^2 = m^2 n_0^4 \omega^2 = m \kappa n_0^3 (n_0 - a)$$

$$\hookrightarrow \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m} \frac{(n_0 - a)}{n_0}} \quad : \text{freq. mov. angular} \quad (110.2)$$

considerar pequenas oscilações radiais em torno da órbita circular $n = n_0$.

$$\text{Eq. (108.3): } \ddot{n} - n \dot{\theta}^2 = \ddot{n} - \frac{L^2}{m^2 n^3} = -\frac{\kappa}{m} (n - a) \quad (110.3)$$

Eq. (108.3)

$$\text{se } n = n_0 + \zeta \quad ; \quad |\zeta| \ll 1$$

$$\hookrightarrow \ddot{n} = \ddot{\zeta} \quad \text{e} \quad \frac{1}{n^3} = \frac{1}{(n_0 + \zeta)^3} = \frac{1}{n_0^3} \left(1 + \frac{\zeta}{n_0}\right)^{-3} \sim \frac{1}{n_0^3} \left(1 - \frac{3\zeta}{n_0}\right)$$

verifica-se que (exercício) Eq. (110.3):

$$\ddot{\zeta} + \underbrace{\left(\frac{\kappa}{m} + \frac{3L^2}{m^2 n_0^4}\right)}_{\equiv \omega_1^2} \zeta + \frac{1}{m} \underbrace{\left(\kappa(n_0 - a) - \frac{L^2}{m n_0^3}\right)}_{= 0, \text{ Eq. (110.1)}} = 0$$

$$\hookrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{m} + \frac{3\kappa(n_0 - a)}{m n_0}} = \sqrt{\frac{\kappa}{m} \left(4 - \frac{3a}{n_0}\right)} \quad : \text{freq. p/ pequenas oscilações radiais !}$$

• alternativa pr determinar w_1 : $\frac{d^2 U_{ef}}{dn^2} \Big|_{n=n_0}$

notas:

(i) w_1 indica a estabilidade da órbita circular;

$w_1 > 0$ se $\frac{4 - 3a}{n_0} > 0$!

(ii) pr órbita quase circular, a relação entre w e w_1 indica se órbita fechada ou aberta;

condição pr órbita fechada: $\frac{w}{n} = \frac{w_1}{n_1} \rightarrow \sqrt{\frac{n_0 - a}{4n_0 - 3a}} = \frac{n_1}{n_2}$; $n, n_1 \in \mathbb{Z}$.

• hipótese: sistema massa-mola em 2-D ⊕ força dissipativa $F_D \propto v$.

se $\vec{F}_D = -b\dot{n}\hat{n} - b\dot{\theta}\hat{\theta}$

↳ eqs. de movimento (108.1) e (108.2):

$m\ddot{n} - m\dot{\theta}^2 = -k(n-a) - b\dot{n}$ (111.1)

$m\dot{\theta} + 2m\dot{n}\dot{\theta} = -b\dot{\theta} \equiv -2\beta\dot{\theta}$ (111.2)

Eq. (111.2): $\frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \frac{2}{n} \frac{dn}{dt} = -2\beta$; ≠ pg. 108

↳ $\frac{d \ln \dot{\theta}}{dt} + \frac{d \ln n^2}{dt} = \frac{d \ln (n^2 \dot{\theta})}{dt} = -2\beta$

↳ $\ln(n^2 \dot{\theta}) = -2\beta t + C$

↳ $L = mn^2 \dot{\theta} = L_0 e^{-2\beta t}$: ∃ efeitos dissipativos

↳ $\vec{l} \neq$ cte de movimento.

Ex. P 2.45 e 2.54, Symon: consideramos oscilador harmônico amortecido, movimento em 1-D, sob força cl. F_0

(a) Eq. de movimento, veja pg. 81:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}$$

solução: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ (112.1)

onde $x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$

hipótese: $\omega_0^2 > \beta^2$: subamortecimento

$$\hookrightarrow x(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (112.2)$$

alternativa sol. (112.1):

se $y = x - a$

$$\hookrightarrow (112.1): \quad \ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 (y+a) = \frac{F_0}{m}$$

se $a = +\frac{F_0}{m\omega_0^2} \rightarrow \ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$

$$\hookrightarrow \text{p/ subamortecimento: } y(t) = e^{-\beta t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t)$$

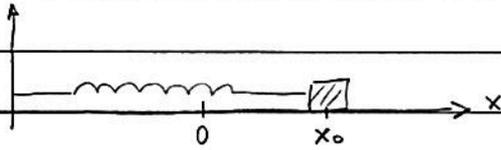
$$\hookrightarrow x(t) = y(t) + \frac{F_0}{m\omega_0^2} : \text{ Eq. (112.2)}$$

notas: efeito F_0 : desloca posição de equilíbrio

$$x=0 \text{ p/ } x = F_0/m\omega_0^2 !$$

(b) consideram o.H. simples ($\beta=0$) sob força de atrito

$$F_{ext} = \pm \mu mg ; \text{ determinam } x = x(t).$$



nesse caso :

$$F_{ext}(t) = \begin{cases} -\mu mg, & v > 0 \\ +\mu mg, & v < 0 \end{cases}$$

$$\text{Eq. de movimento: } \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{\mu mg}{m}, \quad v > 0 \quad (113.1)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = +\frac{\mu mg}{m}, \quad v < 0 \quad (113.2)$$

$$\text{sol. (113.1): } x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha) - \mu g / \omega_0^2, \quad v > 0 \quad (113.3)$$

$$\text{" (113.2): } x(t) = B \cos(\omega_0 t + \beta) + \mu g / \omega_0^2, \quad v < 0 \quad (113.4)$$

hipótese : c.i. $x(0) = x_0 > 0$ e $\dot{x}(0) = 0$

nesse caso : $x(t=0^+)$: Eq. (113.4)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow x(0) &= B \cos \alpha + \mu g / \omega_0^2 = x_0 \rightarrow \alpha = 0 \text{ e } B = x_0 - \mu g / \omega_0^2 \\ \dot{x}(0) &= -B \omega_0 \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow x(t) = (x_0 - \mu g / \omega_0^2) \cos \omega_0 t + \mu g / \omega_0^2, \quad 0 \leq t \leq \pi / \omega_0$$

notas : $x(t > \pi / \omega_0)$: Eq. (113.3)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{c.i. : } x(t = \pi / \omega_0) &= 2\mu g / \omega_0^2 - x_0 \\ \dot{x}(t = \pi / \omega_0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow x(t = \pi/\omega_0) = A \cos(\pi + \alpha) - \frac{\mu g}{\omega_0^2} = 2\mu g/\omega_0^2 - x_0$$

$$\dot{x}(t = \pi/\omega_0) = -A\omega_0 \sin(\pi + \alpha) = 0 \rightarrow \alpha = 0$$

$$A = x_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2}$$

$$\hookrightarrow x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu g}{\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}; \quad \frac{\pi}{\omega_0} < t < \frac{2\pi}{\omega_0}$$

notas: $x(0) = x_0$

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -x_0 + \frac{2\mu g}{\omega_0^2}$$

$$x\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = x_0 - \frac{4\mu g}{\omega_0^2}$$

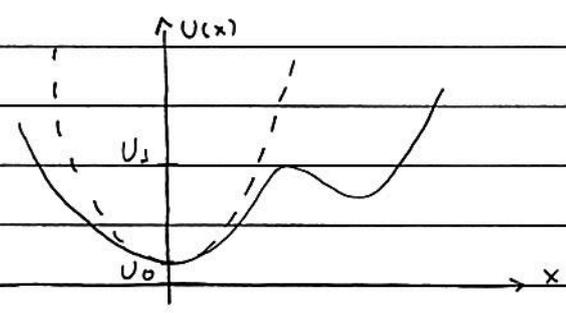
$$\hookrightarrow \text{decaimento amplitude de oscilação/meio-período} = \frac{2\mu g}{\omega_0^2}$$

• Oscilações não-lineares,

[Ref.: Sec. 3.7, Fowles and Cassiday, Analytical mechanics.]

considerar: partícula massa m , movimento em 1-D,

sob $U = U(x)$,



----- : aproximação harmônica p/ $U(x)$.

$x = 0$: pto de equilíbrio estável ; nesse caso :

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2!} x^2 \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=0} + \frac{1}{4!} x^4 \left. \frac{d^4 U}{dx^4} \right|_{x=0} + \dots$$

(i) se $U_0 < E \ll U_1$:

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2} K x^2 ; \quad K = \left. \frac{d^2 U}{dx^2} \right|_{x=0} \quad ; \quad \text{aproximação harmônica p/ } U(x).$$

como $F = -\frac{dU}{dx} \rightarrow F = -Kx$

(ii) se $U_0 < E < U_1$:

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2} K x^2 - \frac{1}{4} \epsilon x^4 ; \quad \epsilon = -\frac{1}{3!} \left. \frac{d^4 U}{dx^4} \right|_{x=0}$$

$$\hookrightarrow F = -Kx + \epsilon x^3$$

↖ 1ª conexão aproximação harmônica p/ $U(x)$.

(115.1)

vamos considerar partícula sob (115.1).

Eq. de movimento:

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \ddot{x} = -kx + \epsilon x^3$$

$$\hookrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda x^3 \quad (116.1)$$

\hookrightarrow termo não-linear

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$\lambda \equiv \epsilon/m$$

não-linearidade \rightarrow princípio de superposição não é válido!

sol. Eq. (116.1): em geral, numérica

sol. analítica aproximada: método de aproximações sucessivas

1ª aproximação: $x_1(t) = A \cos \omega t$: sol. (116.1) p/ $\lambda = 0$ (116.2)

notas: $\omega \neq \omega_0$!

Eq. (116.2) em (116.1):

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t = \lambda A^3 \cos^3 \omega t$$

$$\text{identidade!} \quad \uparrow = \lambda A^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right)$$

$$\hookrightarrow (\omega_0^2 - \omega^2 - 3\lambda A^2/4) A \cos \omega t - \frac{1}{4} \lambda A^3 \cos 3\omega t = 0 \quad (116.3)$$

sol. trivial (116.3): $A = 0$!

hipótese: $\lambda \ll 1$,

$$\text{Eq. (116.3)}: (\omega_0^2 - \omega^2 - 3\lambda A^2/4) \cos \omega t \approx 0$$

$$\hookrightarrow \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{3\lambda A^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2}: \text{1}^\circ \text{ aproximação} \quad (117.1)$$

p/ frequência

notas: $\omega \propto$ amplitude de oscilação $A \neq$ o.H. simples!

$$\cdot \text{2}^\circ \text{ aproximação: } x_2(t) = A \cos \omega t + \underbrace{B \cos 3\omega t}_{\sim \text{Eq. (116.3)}} \quad (117.2)$$

Eq. (117.2) em (116.1): verifica-se que (exercício)

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3\lambda A^2}{4} - \frac{3\lambda AB}{4} - \frac{3\lambda B^2}{2}) A \cos \omega t +$$

$$+ (B\omega_0^2 - 9B\omega^2 - \frac{\lambda A^3}{4} - \frac{3\lambda B^3}{4} - \frac{3\lambda A^2 B}{2}) \cos 3\omega t +$$

$$- \frac{3\lambda AB}{4} (A+B) \cos 5\omega t - \frac{3\lambda AB^2}{4} \cos 7\omega t - \frac{\lambda B^3}{4} \cos 9\omega t = 0$$

se $\lambda B \ll 1$

$$\hookrightarrow (\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3\lambda A^2}{4}) A \cos \omega t + (B\omega_0^2 - 9B\omega^2 - \frac{\lambda A^3}{4}) \cos 3\omega t \approx 0$$

$$\hookrightarrow \omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{3\lambda A^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2}$$

$$B \approx \frac{+\lambda A^3/4}{\omega_0^2 - 9\omega^2} = \frac{-\lambda A^3}{32\omega_0^2 - 27\lambda A^2} \approx \frac{-\lambda A^3}{32\omega_0^2}$$

$$\hookrightarrow x_2(t) \approx A \cos \omega t - \frac{\lambda A^3}{32\omega_0^2} \cos 3\omega t \quad (117.3)$$

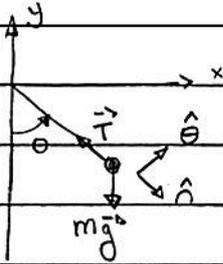
notas características solução:

• $\omega \propto$ amplitude de oscilação A

• $x = x(t)$: ⊕ harmônico de ordem superior: $\cos 3\omega t$

Ex. 1: pêndulo simples: partícula massa m , comprimento pêndulo = l ; estudar movimento

p/ pequenas oscilações ⊕ termos não-lineares.



hipótese: movimento em 2-D.

Eq. de movimento, veja Eq. (78.1):

$$F_r = mg \cos \theta - T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -ml\dot{\theta}^2$$

$$F_\theta = -mg \sin \theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = ml\ddot{\theta}$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

p/ pequenas oscilações em torno eixo y ou $\theta = 0$:

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 + \dots$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta \approx \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 \quad (118.1)$$

\hookrightarrow termo não-linear!

identificando $\lambda = \omega_0^2/6$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (117.1)}: \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{A^2}{8}\right)^{1/2}$$

: 1ª aproximação p/

ω na presença

termo não-linear θ^3 !

em termos de energia:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) = 2mgl \sin^2 \theta/2$$

$$\hookrightarrow E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + 2mgl \sin^2 \theta/2$$

$$\hookrightarrow \dot{\theta} = 2\omega_0 (e - \sin^2 \theta/2)^{1/2} ; \dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta) \tag{119.1}$$

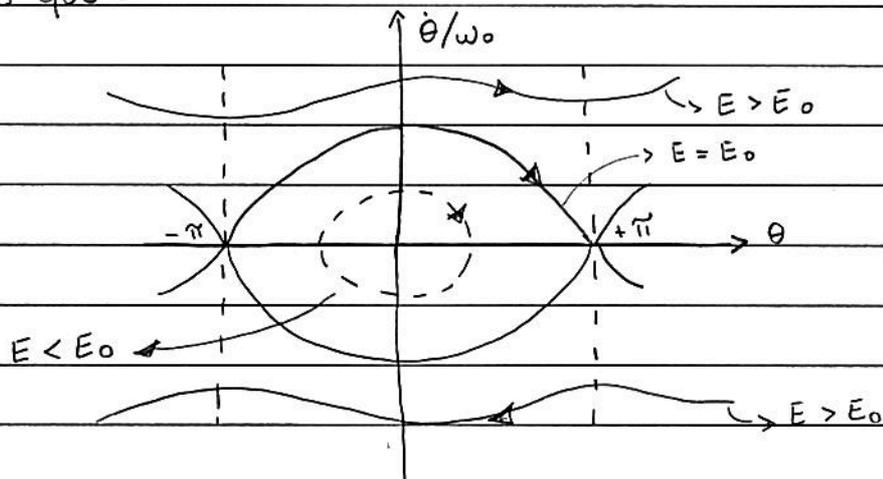
onde $e = \frac{E}{2mgl}$

como $e - \sin^2 \theta/2 > 0 \rightarrow \sin^2 \theta/2 < e$

\hookrightarrow se $e < 1$ ou $E < E_0 \equiv 2mgl \rightarrow -\theta_0 \leq \theta \leq +\theta_0$: movimento limitado.

se $e > 1$ ou $E > E_0 \equiv 2mgl \rightarrow \theta \in \mathbb{R}$: movimento não-limitado, periódico, mas não-oscilatório.

temos que:



: solução no espaço de fase $\theta - \dot{\theta}$!

Ex 2: oscilador auto-limitado,

consideramos oscilador harmônico sob força dissipativa não-linear, cuja equação de movimento é dada por:

$$\ddot{x} - \beta \left(a^2 - x^2 - \frac{\dot{x}^2}{b^2} \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (120.1)$$

Obs.: $\lim_{b \rightarrow \infty}$: Eq. (120.1) \rightarrow equação de van der Pol:

eq. utilizada p/ descrever efeitos acústicos não-lineares, veja P 4.4, M.

se $y = \dot{x}$, temos que:

$$y + \beta a^2 \underbrace{\left(-1 + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 b^2} \right) \right)}_{(I)} y + \omega_0^2 x = 0 \quad (120.2)$$

notas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 b^2} = 1 \quad : \text{ elipse no espaço } x-y=\dot{x}$$

\hookrightarrow se $(x, y = \dot{x}) \in$ elipse \rightarrow termo dissipativo (I) = 0

• " " \in interior elipse \rightarrow " (I) < 0

• " " \in exterior " \rightarrow " (I) > 0

verifica-se que independente c.i. $(x_0, y_0 = \dot{x}_0)$

$t \gg 1 \rightarrow$ (I) \rightarrow 0, i.e.,

oscilador não-linear \rightarrow oscilador harmônico (linear):

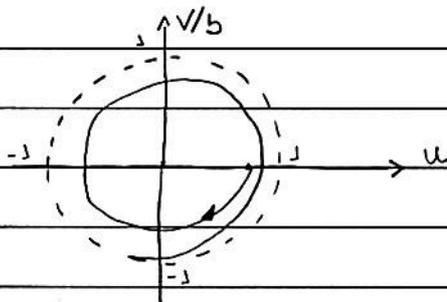
auto limitação.

se $x = au$

$y = av$

$$\text{Eq. (120.2)}: \dot{v} + \beta a^2 \left(-1 + (u^2 + v^2/b^2) \right) v + \omega_0^2 u = 0$$

sol. numérica:



Ex. 3: pêndulo simples \oplus força externa: similar Ex. 1 \oplus
força resistiva \oplus força externa.

hipóteses: $\vec{F}_D = -2mb\dot{\theta}\hat{\theta}$, veja Ex. 2, pg. 78

$$\vec{F}_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos \omega t \hat{\theta}$$

Eq. de movimento (79.5):

$$F_n = mg \cos \theta - T = -m\ell \dot{\theta}^2$$

(121.1)

$$F_\theta = -mg \sin \theta - 2mb\dot{\theta} + F_0 \cos \omega t = m\ell \ddot{\theta}$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \frac{F_0 \cos \omega t}{m\ell}$$

definindo: $\beta \equiv 2b$ e $\alpha \equiv F_0/m\ell$

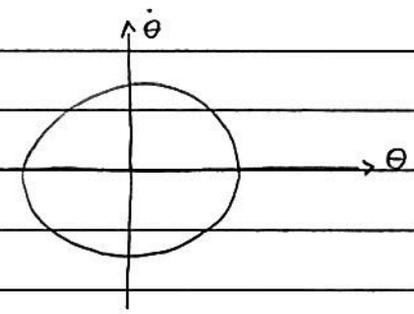
$$\hookrightarrow \ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = \alpha \cos \omega t \quad (121.2)$$

solução numérica (121.2) p/ $\omega_0 = 1$

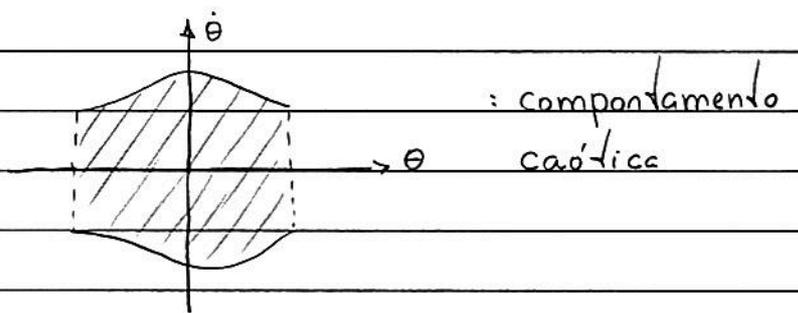
$$\omega = 2/3 \quad (\omega = 2\omega_0/3)$$

$$\beta = 1/2$$

$\alpha = 0.9$



$\alpha = 1.5$



não-linearidade eqs. de movimento \rightarrow possibilidade comportamento caótico

de fato, caos determinístico:

- evolução temporal \sim sol. eq. de movimento não-linear
- sensível às condições iniciais
- \neq processo aleatório.