

Gravitação

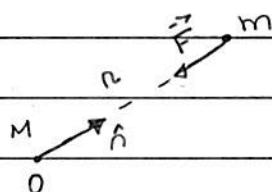
Interação gravitacional: interação fundamental da Natureza

interações fundamentais:	gravitacional	intensidade ↓
	nuclear fraca	
	eletromagnética	
	nuclear forte	

ideia: determinar potencial/campo gravitacional
p/ uma certa distribuição de massa

• Lei da gravitação de Newton:

considerar: partículas massas m e M ; massa M @ origem O .



experimento: $F \propto mM$
 $\propto 1/r^2$

↳ força sob partícula m devido M :

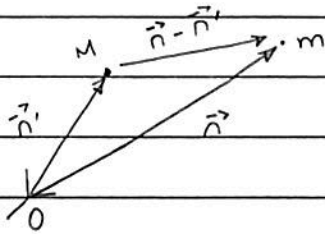
$$\vec{F} = - \frac{GmM}{r^2} \hat{n} \quad : \text{Lei da gravitação de Newton (12.3.1)}$$

onde: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

notar: - como $\vec{F} = F(r) \hat{n} \rightarrow \vec{F}$ é força central, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

↳ $\vec{F}$ é conservativa

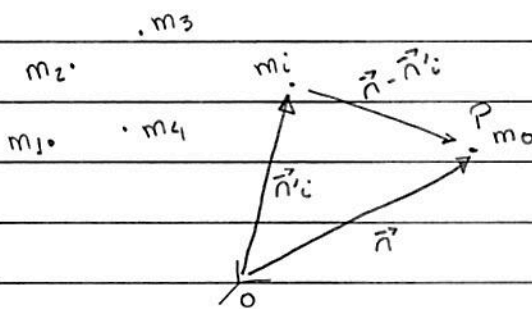
alternativa: força sob partícula m devido a M :



$$\vec{F} = -GmM \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (124.1)$$

Experimento: princípio de superposição válido p/ interação gravitacional

↳ p/ sistemas de N -partículas:



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N -Gm_0m_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} : \text{força sob } m_0 \text{ devido } m_i \quad (124.2)$$

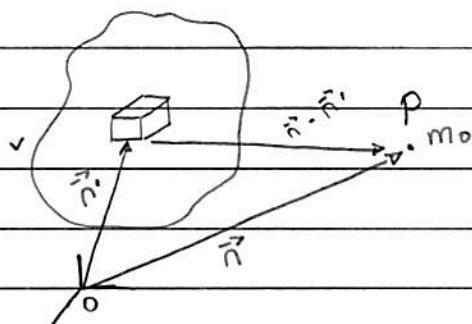
Eq. (124.2) pode ser generalizada p/ uma distribuição contínua de massa:

Lembrar: distribuição contínua de massa é caracterizada por uma densidade $\rho = \rho(\vec{r})$:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{(\Delta m)}{(\Delta V)} : \text{função escalar}$$

$\vec{r} \in \Delta V$

$$M = \int d^3r' \rho(\vec{r}') : \text{massa total distribuição de massa } \rho(\vec{r}).$$



ρ volume infinitesimal dv @ $\vec{r}'$: $dm = \rho(\vec{r}') dv$

$$\text{Eq. (124.2): } \vec{F}(\vec{r}) = -Gm_0 \sum_i \frac{\Delta V (\Delta m)}{(\Delta r)^3} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} -Gm_0 \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (125.1)$$

casos particulares:

- distribuição superficial de massa: $dm = \sigma(\vec{r}') ds$

↙ densidade superficial
(massa/área)

$$\text{Eq. (125.1): } \vec{F}(\vec{r}) = -Gm_0 \int_S d^2r' \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (125.2)$$

- distribuição linear de massa: $dm = \lambda(\vec{r}') dl$

↙ densidade linear
(massa/comprimento)

$$\text{Eq. (125.1): } \vec{F}(\vec{r}) = -Gm_0 \int_C dl \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (125.3)$$

podemos escrever (124.2) como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m_0 \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{-G m_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}_{\equiv \vec{g}(\vec{r})} = m_0 \vec{g}(\vec{r})$$

$\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$: campo gravitacional (função vetorial)

em detalhes,

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (126.1)$$

$$= -G \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

notas: - $\vec{g}$ independe massa (teste) m_0

- $\vec{g}$ depende apenas posição $\vec{r}$; propriedade do espaço

- $[g]$: aceleração ; $g = 9.80 \text{ m/s}^2$: $\approx$ superfície Terra

interpretação (126.1) : uma distribuição de massas $\rho = \rho(\vec{r})$ altera as propriedades do espaço, produzindo em cada pto P um campo gravitacional $\vec{g}$.

como $\vec{F} = F(r)\hat{n}$ é conservativa, temos que [Eq. (33.1)]

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

↳ energia potencial gravitacional

como $\vec{g}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r})/m_0 \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$

$$\hookrightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$$

(127.1)

↳ potencial gravitacional : função
escalar

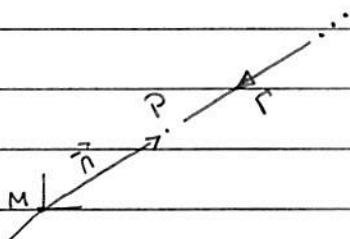
de modo análogo à energia potencial, temos que

$$\text{Eq. (34.1.0)} : \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{g}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

se $\phi(\vec{r}_0) = 0$: zero (pto de referência) do potencial

$$\hookrightarrow \phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{g}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad : \quad \text{potencial gravitacional} \quad (127.2)$$

Ex.: Determinar potencial gravitacional $\phi = \phi(\vec{r})$ p/ partícula massa M @ origem.



$$\text{Eq. (126.1)} : \vec{g}(\vec{r}) = - \frac{GM}{r^2} \hat{n} \quad (127.3)$$

como $g(r) \propto 1/r^2 \rightarrow \vec{r}_0 = +\infty$: escolha usual p/ distribuição localizada de massa

Lembrar que, pg. 50 : $d\vec{e} = dn\hat{n} + n d\theta\hat{\theta} + n \sin\theta d\phi\hat{\phi}$

p/ $\Gamma \rightarrow d\vec{e} = dn\hat{n}$

$$\text{Eq. (127.2)} : \phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{(-GM)\hat{n} \cdot (dn'\hat{n})}{n'^2} = - \frac{GM}{n} \quad (128.1)$$

notas : p/ partícula massa M : ϕ : escalar v.s. $\vec{g}$: vetor
 $\phi \propto 1/n$ $\vec{g} \propto 1/n^2$

• como $\vec{g} = \vec{F}/m_0 \rightarrow$ princípio de superposição ou p/ $\vec{g}(\vec{r})$

$\hookrightarrow$ p/ sistema de N -partículas m_i :

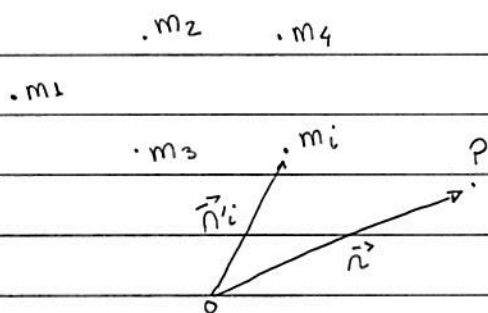
$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{g}_i(\vec{r})$$

$\rightarrow$ campo gravitacional m_i

$$\hookrightarrow - \int_{\vec{n}_0}^{\vec{r}} \vec{g}(\vec{r}') \cdot d\vec{e} = - \int_{\vec{n}_0}^{\vec{r}} \sum_i \vec{g}_i(\vec{r}') \cdot d\vec{e}$$

$$= - \sum_i \int_{\vec{n}_0}^{\vec{r}} \vec{g}_i(\vec{r}') \cdot d\vec{e} = \sum_i \phi_i(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$$

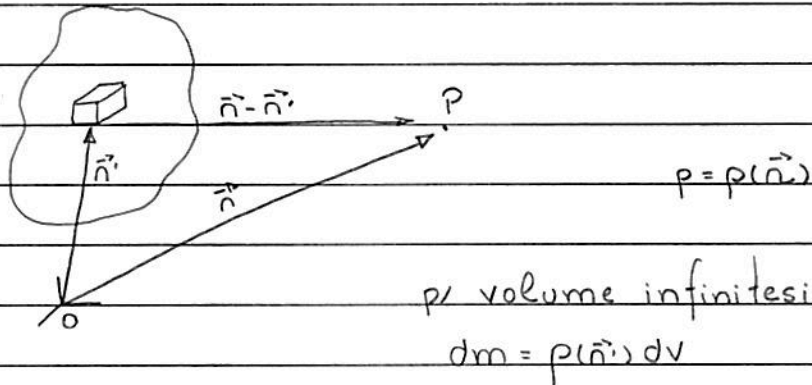
dessa forma (determinação direta $\phi(\vec{r})$) :



Obs.: comparem Eqs.
 (126.1) e (128.2)

$$\phi(\vec{r}) = \sum_i \phi_i(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (128.2)$$

· p/ uma distribuição contínua de massa,



$$\text{Eq. (128.2): } \phi(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{\Delta v (\Delta m_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}$$

$$\Delta v \rightarrow 0 \rightarrow -G \int_V d^3 r' \frac{p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (129.1)$$

Obs.: comparar Eqs. (126.1) e (129.1)

Obs.: Em alguns casos é interessante calcular $\phi = \phi(\vec{r})$ e determinar $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ a partir de $\vec{g} = -\vec{\nabla} \phi$.

· sobre o potencial gravitacional.

$$\text{Lembrar que Eq. (32.1): } W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{e} = -(U_2 - U_1)$$

$$\hookrightarrow W = \int_{\infty}^{\vec{r}} (-\vec{F}) \cdot d\vec{e} = -m_0 \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{g}(\vec{r}') \cdot d\vec{e} = m_0 \phi(\vec{r}) = U(\vec{r}) \quad (129.2)$$

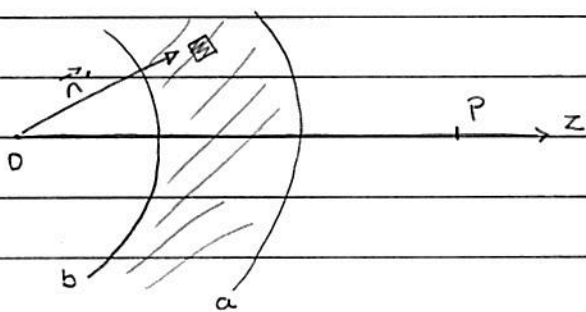
onde assumimos que $U(\infty) = m_0 \phi(\infty) = 0$

Eq. (129.2) permite afirmar que: $\phi(\vec{r})$ é o trabalho/massa realizado por uma força externa p/ movimentar massa m_0 de ∞ até sua posição $\vec{r}$.

notas: $U(\vec{r}) = m_0 \phi(\vec{r})$

associada à partícula m_0 ← associado a uma determinada distribuição de massa.

Ex. 1: Ex. 5.2 G: Considerar camada esférica homogênea, raios $b < a$; determinar $\phi = \phi(\vec{r})$ e $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$.

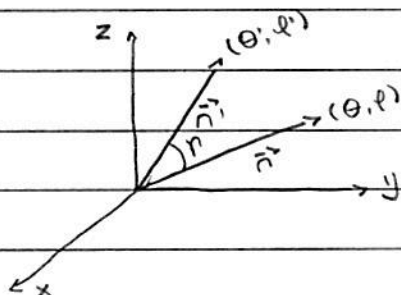


$$\text{Eq. (129.1): } \phi(\vec{r}) = -G \int \frac{d^3 r' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

casca homogênea: $\rho(\vec{r}') = \rho = \text{cte}$

$d^3 r' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'$: elemento de volume

coordenadas esféricas, pg. 50



notas: $|\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma)^{1/2}$

notas relação entre $r, (\theta, \phi)$ e (θ', ϕ') !

devido à simetria do sistema, podemos considerar $\vec{n} = z \hat{z}$

$$\hookrightarrow |\vec{n} - \vec{n}'| = ((z\hat{z} - n'\hat{n}) \cdot (z\hat{z} - n'\hat{n}))^{1/2}$$

$$= (z^2 + n'^2 - 2zn'\hat{z} \cdot \hat{n})^{1/2} = (z^2 + n'^2 - 2zn'\cos\theta')^{1/2}$$

Eq. (129.1) :

$$\phi(0,0,z) = -G\rho \int_b^a n'^2 dn' \underbrace{\int_0^\pi d\theta' \frac{\sin\theta}{(n'^2 + z^2 - 2zn'\cos\theta')^{1/2}}}_{(I)} \int_0^{2\pi} d\phi$$

Exercício: mostrar que $(I) = \frac{1}{n'z} ((n'+z) - |n'-z|)$

$$\hookrightarrow \phi(0,0,z) = -\frac{2\pi G}{z} \int_b^a n' dn' ((n'+z) - |n'-z|)$$

devido à simetria esférica, temos que

$$\phi(r) = -\frac{2\pi G}{r} \int_b^a n' dn' ((n'+r) - |n'-r|) \quad (131.1)$$

Vamos considerar 3 casos :

$$(i) \ r > a \rightarrow |n'-r| = r - n'$$

$$\hookrightarrow \phi(r) = -\frac{4\pi G}{r} \int_b^a dn' n'^2 = -\frac{G}{r} \rho \cdot \frac{4\pi}{3} (a^3 - b^3) = -\frac{GM}{r}$$

= M : massa total

i.e., $\phi(r) \sim$ potencial massa M

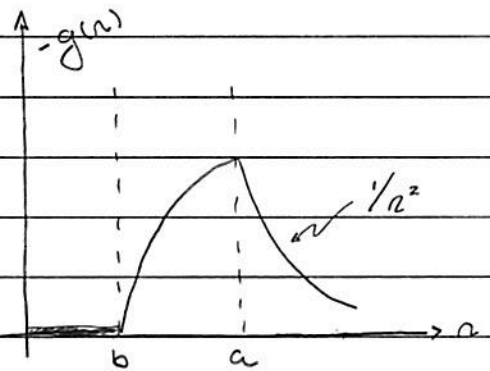
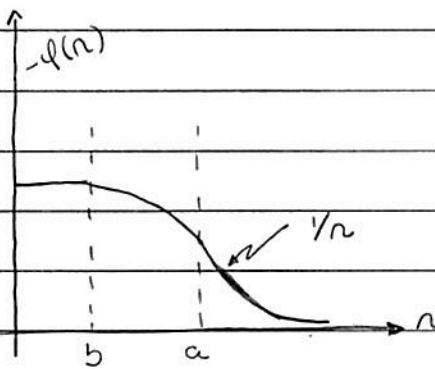
@ origem = centro camada esférica, veja

$$(ii) \quad n < b \rightarrow |n' - n| = n' - n$$

$$\hookrightarrow \phi(n) = -4\pi G\rho \int_b^a n' dn' = -2\pi G\rho (a^2 - b^2) : \text{cte}$$

$$(iii) \quad a < n < b,$$

$$\hookrightarrow \phi(n) = -2\pi G\rho \left(\int_b^n 2n'^2 dn' + \int_n^a 2nn' dn' \right) = -4\pi\rho G \left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3n} - \frac{n^2}{6} \right)$$



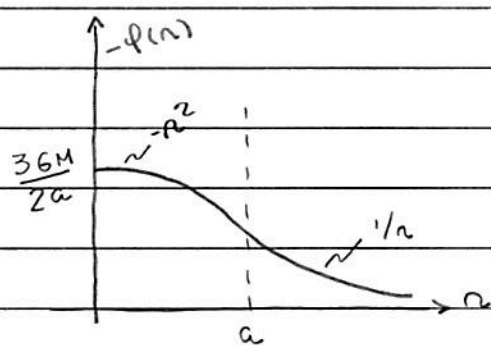
$$\text{como } \vec{g}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(r) = -\hat{n} \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

$$\hookrightarrow \vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & n < b \\ 4\pi\rho G \left(\frac{b^3}{3} - n \right) \frac{1}{n^2}, & b < n < a \\ -\frac{GM}{n^2}, & n > a \end{cases} \quad (132.1)$$

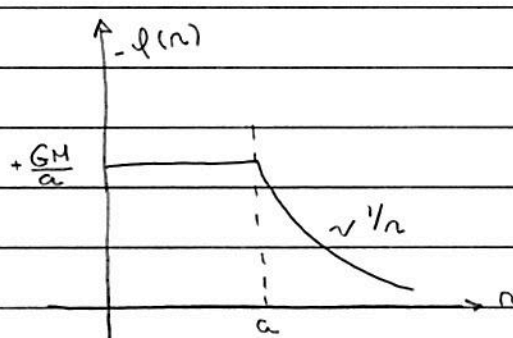
2 casos particulares:

(i) $b \rightarrow 0$: esfera uniforme, raio a ,

$$\hookrightarrow \phi(n) = \begin{cases} -4\pi G\rho \left(\frac{a^2}{2} - \frac{n^2}{6} \right), & n < a \\ -\frac{GM}{n}, & n > a \end{cases} \quad (132.2)$$



esfera uniforme



casca esférica uniforme

(iii) $b \rightarrow a$: casca esférica uniforme

Exercício : mostrar que (dica : $b = a - \epsilon$)

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{a}, & r < a \\ -\frac{GM}{r}, & r > a \end{cases} \quad (133.1)$$

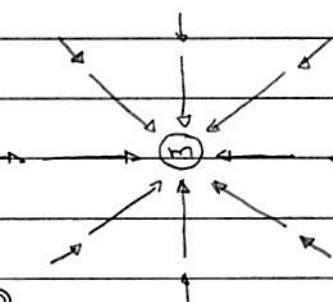
• Sobre o campo gravitacional $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$,

(i) representação $\vec{g}$:

$\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$: campo (função) vetorial

em particular p/ uma partícula massa m @ origem

Eq. (127.3) : $\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r^2} \hat{r}$

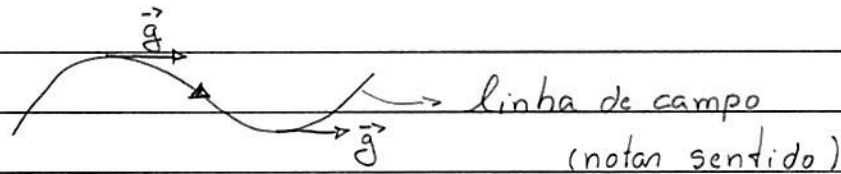


: campo vetorial

alternativa: representação $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ através linhas de campo
(lembrar eletrostática)

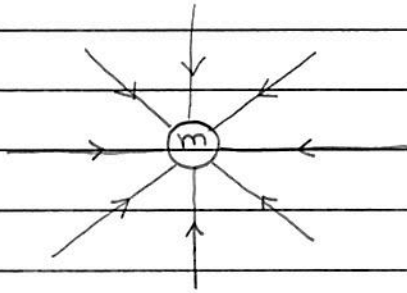
Definição linhas: Curva tangente no pto P indica
de campo: a direção campo vetorial $\vec{g}$

ideia:



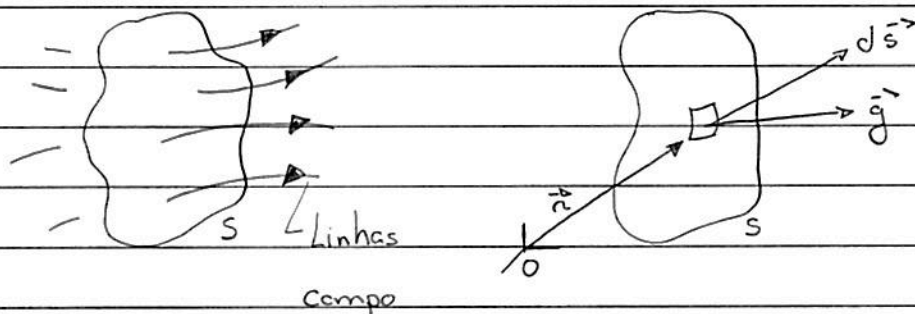
Obs.: densidade de linhas $\propto |\vec{g}|$!

↳ p/ partícula massa m @ origem:



(ii) fluxo campo gravitacional $\vec{g}$:

considerar superfície S arbitrária,



$$\Phi = \int_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} : \text{fluxo } \vec{g} \text{ através} \quad (134.1)$$

superfície S

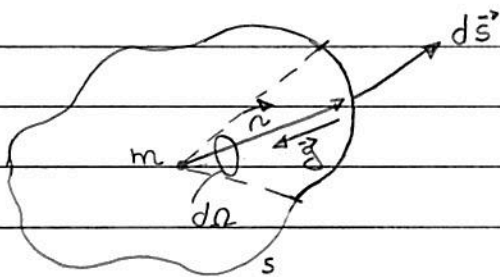
(veja pg. 181)

em particular, se superfície S fechada,

$$\Phi = \oint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (135.1)$$

Lembrar: p/ superfície S fechada, sentido $d\vec{S}$: "p/ fora".

• consideram: massa m @ origem $\subset$ superfície S fechada.



$$d\vec{S} = ds \hat{n}$$

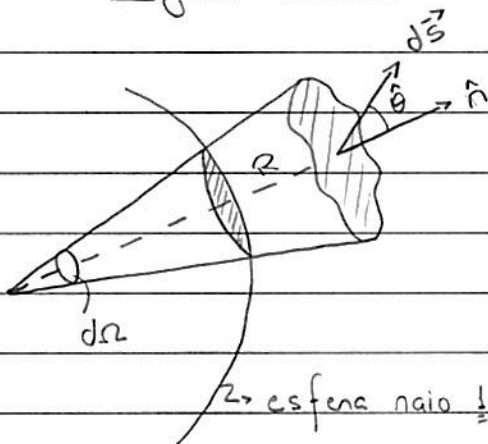
↳ direção da sup. S em $\vec{r}$!

$$\text{notar: } \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \left(-\frac{Gm}{r^2} \hat{n} \right) \cdot (ds \hat{n}) = -\frac{Gm \cos \theta ds}{r^2}$$

$= d\Omega$: ângulo sólido

$$\text{onde } \hat{n} \cdot \hat{n} = \cos \theta$$

Lembrar: ângulo sólido



$$d\Omega = \frac{1}{R^2} d\vec{S} \cdot \hat{n}$$

$$= \frac{1}{R^2} \cos \theta ds$$

↳ esfera raio 1

Eq. (135.1): $\Phi = \oint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = -Gm \oint_S d\Omega =$

$$= -Gm \oint_S d\Omega \quad \text{ESFERA} \\ \text{RAIO 1} \quad = -Gm \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi Gm$$

$$\hookrightarrow \Phi = \oint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = -4\pi Gm \quad (136.1)$$

Caso geral: N partículas $m_i \in$ interior sup. fechada S:

$$\Phi = \oint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{g}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \oint_S \vec{g}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

princípio

superposição

campo $\vec{g}$

$\sim$ massa m_i

$$= -4\pi G \sum_i m_i \quad : \text{distribuição} \quad (136.2) \\ \text{partículas } m_i$$

$$= -4\pi G \int_V d^3r \rho(\vec{r}) \quad : \text{distribuição} \quad (136.3) \\ \text{contínua de} \\ \text{massa}$$

Eq. (136.3) $\oplus$ teorema do divergente (veja pg. 214):

$$\oint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) d^3r = -4\pi G \int_V d^3r \rho(\vec{r})$$

$\hookrightarrow$ volume definido por S

ou

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + 4\pi G \rho) d^3r = 0$$

como o volume V é arbitrário

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r}) \quad (137.1)$$

como $\vec{g} = -\vec{\nabla} \phi$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = -\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}) : \text{Eq. de Poisson} \quad (137.2)$$

$$\text{onde } \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} : \text{Laplaciano de } \phi = \phi(\vec{r})$$

em particular, p/ regiões tais que $\rho(\vec{r}) = 0$

$$\hookrightarrow \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0 : \text{Eq. de Laplace} \quad (137.3)$$

Obs.: (i) dada distribuição de massa $\rho = \rho(\vec{r})$, o potencial gravitacional $\phi = \phi(\vec{r})$ associado pode ser obtido através Eq. (137.1) (forma integral) ou via a solução eqs. diferenciais (problema de contorno) (137.2) / (137.1).

(ii) notar analogia Eq. (137.1) c/ Lei de Gauss (eletrostática):

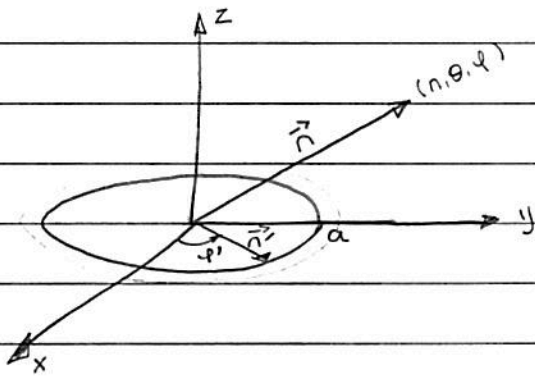
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad (\text{forma integral})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad (\text{forma diferencial})$$

(iii) determinação de soluções analíticas das Eqs. de Laplace e Poisson e Teoria do potencial.

(iv) exemplos sol. Eqs. (137.1) e (137.3) veja Cap. 3, Griffiths.

Ex. 2: P 6.15, Symon: considera anel uniforme massa M e raio a ; determina $\varphi(\vec{r})$ e $\vec{g}(\vec{r})$



Eq. (129.1) p/ distribuição linear de massa:

$$\varphi(\vec{r}) = -G \int \frac{\lambda dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (138.1)$$

onde

$$\lambda = M/2\pi a \quad dl = a d\varphi'$$

$$\vec{r}' = \hat{x} a \cos\varphi' + \hat{y} a \sin\varphi'$$

Vamos considerar 3 casos particulares,

(i) $\vec{r} = z\hat{z}$: potencial p/ pto. e eixo $\hat{z}$,

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - a\cos\varphi'\hat{x} - a\sin\varphi'\hat{y}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (a^2 + z^2)^{1/2}$$

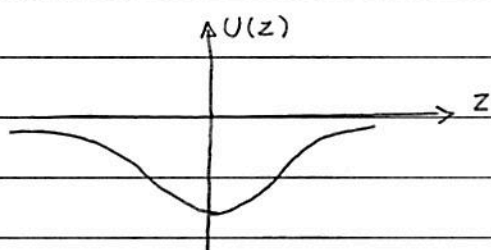
$$\text{Eq. (138.1): } \phi(0,0,z) = - \frac{GM}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{a d\phi'}{(a^2+z^2)^{1/2}} = - \frac{GM}{(a^2+z^2)^{1/2}} \quad (139.1)$$

$$\text{como } \vec{g} = -\vec{\nabla}\phi = -\hat{z} \frac{d\phi}{dz}$$

$$\hookrightarrow \vec{g}(0,0,z) = -GMz \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z} \quad (139.2)$$

considerar partícula massa m que se movimenta ao longo eixo $\hat{z}$ sob $\phi(z)$:

$$U(z) = m\phi(z) = - \frac{GMm}{(a^2+z^2)^{1/2}} : \text{energia potencial partícula}$$



notas: $z=0$: pto de equilíbrio estável

$$\vec{F} = m\vec{g} = -GMm \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \hat{z} :$$

hipótese: $z \ll a$.

$$\hookrightarrow F = -GMm \frac{z}{a^3} \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-3/2} \approx -GMm \frac{z}{a^3} \left(1 - \frac{3z^2}{2a^2}\right)$$

$$\approx - \frac{GMm}{a^3} z$$

$\hookrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$: frequência pequenas oscilações ao longo eixo z em torno $z=0$.

(ii) $\vec{r} = y \hat{y}$: potencial p/ pto $\in$ eixo $\hat{y}$.

$$\hookrightarrow \vec{r} - \vec{r}' = -a \cos \varphi' \hat{x} + (y - a \sin \varphi') \hat{y}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (a^2 + y^2 - 2ay \sin \varphi')^{1/2}$$

$$\text{Eq. (138.1)} : \varphi(a, y, 0) = \varphi(y) = -\frac{GM}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{a d\varphi'}{(a^2 + y^2 - 2ay \sin \varphi')^{1/2}} :$$

: integral elíptica

hipótese : $y \ll a$.

$$(\quad)^{-1/2} = \frac{1}{a} \left(1 + \underbrace{\frac{y^2}{a^2} - \frac{2y \sin \varphi'}{a}}_{\epsilon} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \dots \right)$$

exercício $\uparrow$ $\sim \frac{1}{a} \left(1 + \frac{y \sin \varphi'}{a} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{a^2} (3 \sin^2 \varphi' - 1) + O(y^3/a^3) \right)$

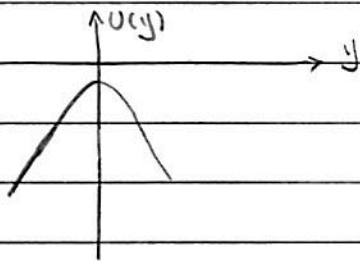
$$\hookrightarrow \varphi(y) \approx -\frac{GM}{2\pi a} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left(1 + \frac{y}{a} \sin \varphi' + \frac{1}{2} \frac{y^2}{a^2} (3 \sin^2 \varphi' - 1) \right)$$

$$\approx -\frac{GM}{a} \left(1 + \frac{1}{4} y^2/a^2 \right) \quad (140.1)$$

$$\text{como } \vec{g} = -\vec{\nabla} \varphi = -\hat{y} \frac{d\varphi}{dy} = \frac{GM}{2a^3} y \hat{y} \quad (140.2)$$

considerar partícula massa m que se movimenta ao longo eixo y sob $\varphi(y)$:

$$U(y) = m\phi(y) = -\frac{GMm}{a} \left(1 + \frac{1}{4} y^2/a^2 \right)$$



notas: $y=0$: pto de equilíbrio
instável

$\hookrightarrow$ (i) $\oplus$ (ii): $\vec{n}=0$ é pto de sela de $\phi=\phi(\vec{n})$.

(iii) $a \gg a$: nesse caso, é possível determinar uma expressão aproximada p/ $\phi(\vec{n})$ p/ $\vec{n}$.

como $\vec{n} = n(\sin\theta \cos\phi \hat{x} + \sin\theta \sin\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z})$

e $\vec{n}' = a \cos\phi' \hat{x} + a \sin\phi' \hat{y}$

exercício $\rightarrow |\vec{n} - \vec{n}'| = (a^2 + n^2 - 2an \sin\theta \cos(\phi - \phi'))^{1/2}$

$\hookrightarrow |\vec{n} - \vec{n}'|^{-1} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{a^2}{n^2} - \frac{2a \sin\theta \cos(\phi - \phi')}{n} \right)^{-1/2}$

ϵ

$\approx \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon + \frac{3}{8} \epsilon^2 + \dots \right)$

exercício $\rightarrow \sim \frac{1}{n} \left(1 + \frac{a}{n} \sin\theta \cos(\phi - \phi') + \frac{1}{2} \frac{a^2}{n^2} (-1 + 3 \sin^2\theta \cos^2(\phi - \phi')) \right)$

$+ O(a^3/n^3)$

$= \frac{1}{n} * (I)$

$$\text{Eq. (138.1)}: \phi(\vec{r}) \approx -\frac{GM}{2\pi a} \frac{a}{r} \int_0^{2\pi} d\phi' + (I)$$

$$\text{Exercício} \rightarrow \phi(\vec{r}) \approx -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} (1 - 3\cos^2\theta) + O\left(\frac{a^4}{r^4}\right) \right)$$

↘ entre $\hat{z}$ e $\vec{r}$!

$$\hookrightarrow \phi(r, \theta) \approx -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{GMa^2}{r^3} (3\cos^2\theta - 1) \cdot \frac{1}{2}; \quad r \gg a \quad (142.1)$$

$$\text{como } \vec{g} = -\vec{\nabla}\phi(r, \theta) = -\hat{n} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\hookrightarrow \vec{g}(r, \theta) = -\frac{GM}{r^2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{a^2}{r^2} (1 - 3\cos^2\theta) \right) \hat{n}$$

$$+ \frac{3}{4} \frac{GM}{r^2} \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta \hat{\theta}; \quad r \gg a \quad (142.2)$$

Obs.: Eq. (142.1) pode ser escrita como

$$\phi(r, \theta) \approx -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{GMa^2}{r^3} P_2(\cos\theta) + \dots$$

onde $P_l(x)$: polinômio de Legendre, $l = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{exemplos: } P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

veja P 6.16, Symon !

alternativa: determinação $\vec{g} = \vec{g}(0,0,z)$,

Eq. (126.1) p/ distribuição linear de massa:

$$\vec{g}(0,0,z) = \vec{g}(z) = -G \int dl \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

nesse caso: $\vec{r} = z \hat{z}$

$$\vec{r}' = a \hat{p} = a \cos \phi' \hat{x} + a \sin \phi' \hat{y}$$

↳ Lembrar: $\hat{p}$ não é fixo!

$$\hookrightarrow \vec{r} - \vec{r}' = z \hat{z} - a \hat{p} = z \hat{z} - a \cos \phi' \hat{x} - a \sin \phi' \hat{y}$$

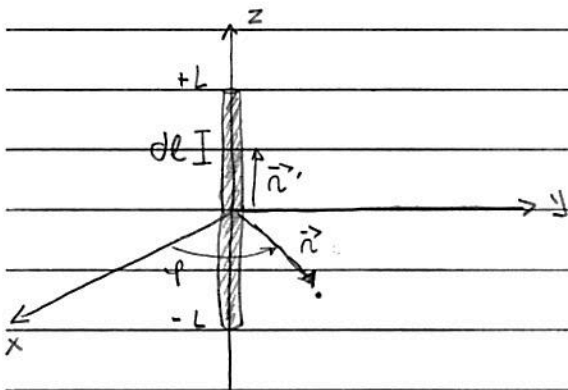
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (a^2 + z^2)^{1/2}; \quad dl = a d\phi'$$

$$\hookrightarrow \vec{g}(z) = -G \lambda a \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z \hat{z} - a \cos \phi' \hat{x} - a \sin \phi' \hat{y}}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -G \underbrace{(2\pi a \lambda)}_M \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$= -\frac{GMz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Ex. 3: P 5.7, Marion : considerar distribuição linear uniforme
 [P 4.24, Taylor de massa, densidade linear λ ,
 veja também P 6.14, Symon] comprimento $2L$; determinar
 $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}) = \varphi = \varphi(\vec{r})$.



considerar caso particular: $\vec{g} = \vec{g}(p, \varphi, z=0)$

por simetria $\vec{g} \propto \hat{p}$ e $g \propto g(p)$

Eq. (126.1) p/ distribuição linear de massa:

$$\vec{g}(p, \varphi) = -G \int dl \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

nesse caso: $\vec{r} = p\hat{p} = p\cos\varphi\hat{x} + p\sin\varphi\hat{y}$:

$$\vec{r}' = z'\hat{z} ; \quad dl = dz'$$

$$\hookrightarrow \vec{r} - \vec{r}' = p\cos\varphi\hat{x} + p\sin\varphi\hat{y} - z'\hat{z} ; \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (p^2 + z'^2)^{1/2}$$

$$\vec{g}(p, \varphi) = -G\lambda \int_{-L}^{+L} dz' \frac{p\cos\varphi\hat{x} + p\sin\varphi\hat{y} - z'\hat{z}}{(p^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$\vec{g}(p, \varphi) = -G\lambda p \underbrace{(\cos\varphi \hat{x} + \sin\varphi \hat{y})}_{\hat{p}} \int_{-L}^{+L} \frac{dz'}{\underbrace{(p^2 + z'^2)^{3/2}}_{p^2(p^2 + z'^2)^{1/2}}}$$

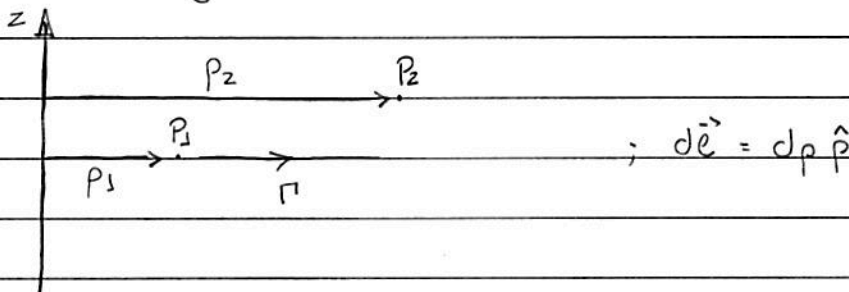
$$\left. p^2(p^2 + z'^2)^{1/2} \right|_{z'=-L}^{z'=+L}$$

$$\hookrightarrow \vec{g}(p) = -\frac{G\lambda 2L}{p(p^2 + L^2)^{1/2}} \hat{p} = -\frac{GM}{p(p^2 + L^2)^{1/2}} \hat{p} \quad (144.1)$$

caso particular $L \rightarrow +\infty$:

$$\text{Eq. (144.1)} : \vec{g}(p) = -\frac{2G\lambda}{p} \hat{p} \quad (144.2)$$

• potencial gravitacional,



$$\text{Eq. (127.2)} : \varphi(p_2) - \varphi(p_1) = - \int_{\gamma, \Gamma}^2 \vec{g}(p) \cdot d\vec{e}$$

$$= - \int_{p_1}^{p_2} -\frac{2G\lambda}{p} \hat{p} \cdot (dp \hat{p}) = 2G\lambda (\ln p_2 - \ln p_1)$$

se $\varphi(p_1 = a) = 0$: zero (pto de referência) potencial

$$\hookrightarrow \varphi(p) = 2G\lambda \ln\left(\frac{p}{a}\right) \quad (144.3)$$