

Mecânica Lagrangiana,

formulação alternativa mecânica Newtoniana

base: princípio de D'Alembert: trabalhos virtuais

princípio de Hamilton: princípio de minimização

Newton: força  $\rightarrow$  Q.: Qual  $\vec{F}_R$ ?

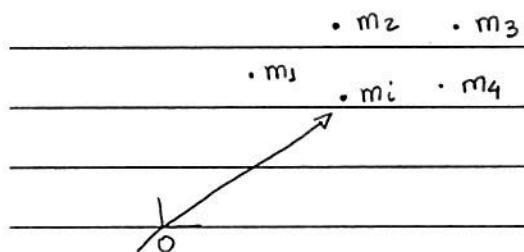
v.s.

Lagrange: energia  $\rightarrow$  Q.: Qual a Lagrangiana do sistema?

considerações iniciais: vínculos e coordenadas generalizadas

• Vínculos e coordenadas generalizadas,

consideran: sistema  $N$ -partículas interagentes, massas  $m_i$ , posição  $\vec{r}_i$ , sob força externa  $\vec{F}_i^{(e)}$



$$\text{Eq. de movimento: } \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (166.1)$$

↳ força sob  $i$  devido  $j$ .  
(forças internas)

se  $\vec{F}_{ij}$  conhecidas  $\rightarrow$  em princípio, solução eqs. (166.1)

$\hookrightarrow$  descrição movimento partículas  $m_i$ ;

entretanto, em alguns casos, o mov. partícula é limitado devido à de certos vínculos.

Definição:

• vínculos: condições que restringem o movimento de uma partícula.

• forças de vínculo: - forças associadas aos vínculos;  
(forças internas) - em geral, não são (inicialmente) conhecidas.

Ex. 1: partícula massa  $m$ , movimento sob superfície esférica radio  $R$ .

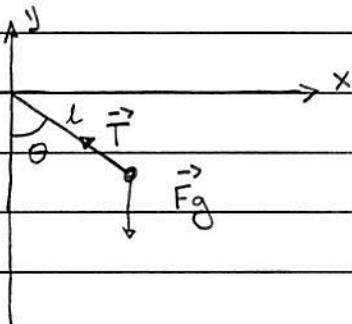
se movimento partícula descrito pelo vetor  $\vec{n} = \vec{n}(z)$

$$\hookrightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 : \text{Vínculo}$$

(167.1)

notas: coordenadas  $x, y, z$  não são independentes!

Ex. 2: pêndulo simples: partícula massa  $m$  + haste (sem massa) comprimento  $l$ , mov. plano  $xy$



se movimento partícula  $m$  descrito pelo vetor  $\vec{n} = \vec{n}(z)$

$$\hookrightarrow x = l \sin \theta$$

$$y = -l \cos \theta$$

$$z = 0$$

coordenadas  $x$  e  $y$   
não são independentes!

notas:  $\exists$  2 vínculos:  $z=0$  e  $x^2 + y^2 = l^2$  (167.2)

- forças sob  $m$ :  $\vec{F}_g$  e  $\vec{T}$

$\hookrightarrow$  tração: força de vínculo!

11

---

- classificação dos vínculos:

(A) holonômicos: eq. do vínculo pode ser escrita como uma igualdade, i.e.,

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad (168.1)$$

↳ índice partícula!

---

esse tipo de vínculo pode ser classificado como:

(A.1) scienonomous: eq. do vínculo independe explicitamente do tempo, i.e.,

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad (168.2)$$

---

(A.2) nheonomous: eq. do vínculo depende explicitamente do tempo, i.e., Eq. (168.1).

---

(B) não-holonômicos: eq. do vínculo não pode ser escrita como uma igualdade.

---

Exemplos vínculos holonômicos (A.1):

---

- Eq. (167.1)

---

- Eq. (167.2)

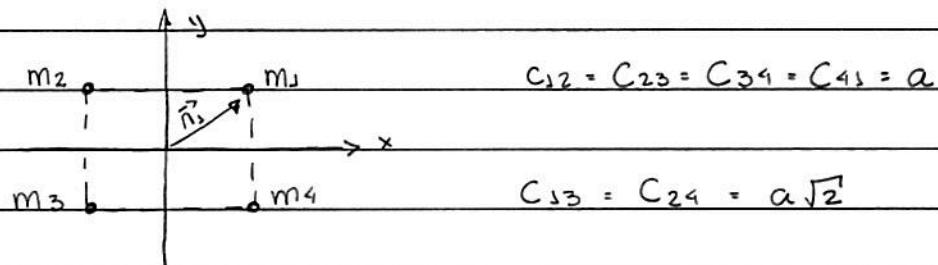
---

- corpo rígido: nesse caso, a distância entre as partículas do sistema são fixas, i.e.,

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0 \quad (168.3)$$

↳ ctes!

Ex.: consideran sistema = 4 partículas massas  $\underline{m}_i$  localizadas nos vértices □ lado  $a$ .

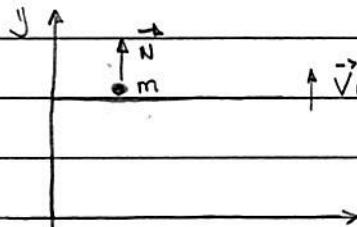


$$C_{12} = C_{23} = C_{34} = C_{41} = a$$

$$C_{13} = C_{24} = a\sqrt{2}$$

Exemplos vínculos holonômicos (A.2) :

- partícula massa  $\underline{m}$ , mov. 1-D restrito superfície base móvel :

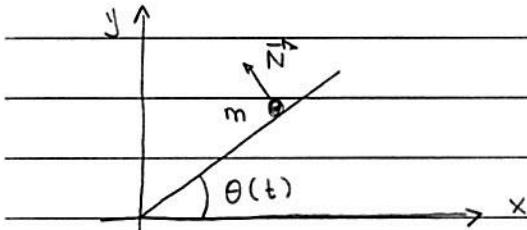


Eq. do vínculo:

$$\dot{y}(t) - \dot{y}_0 - v_0 t = 0 \quad (169.1)$$

notar:  $\vec{N}$  : força de vínculo

- partícula massa  $\underline{m}$ , mov. restrito plano inclinado, \* inclinação  $\theta = \theta(t)$  :



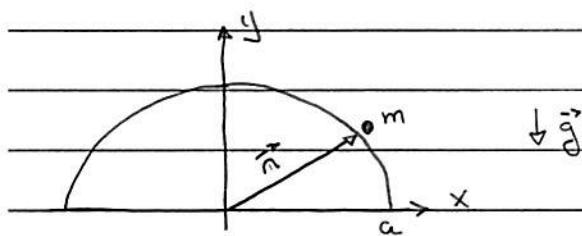
Eq. do vínculo:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - \tan \theta(t) = 0 \quad (169.2)$$

notar:  $\vec{N}$  : força de vínculo

Exemplo vínculo não-holonômico (desigualdade):

- partícula massa  $\underline{m}$ , movimento sob semi-círculo raio  $a$  sob  $\vec{F}_g$  (veja pg. 45),



se movimento da partícula é descrito pelo vetor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\hookrightarrow r^2 - a^2 = x^2 + y^2 - a^2 \geq 0 : \text{Eq. do vínculo} \quad (170.1)$$

notas: Eq. (170.1) não pode ser utilizada para eliminar variáveis dependentes da descrição.

$\hookrightarrow$  pg. 170.1

→ sequência: vamos considerar apenas vínculos holonômicos!

\* Em resumo: 3 vínculos  $\rightarrow$  duas dificuldades

(i) 3N eqs. de movimento (166.1) não são independentes  
pois as coordenadas  $\vec{r}_i$  não são independentes

(ii) forças de vínculo não são conhecidas a priori

- sobre dificuldade (i),

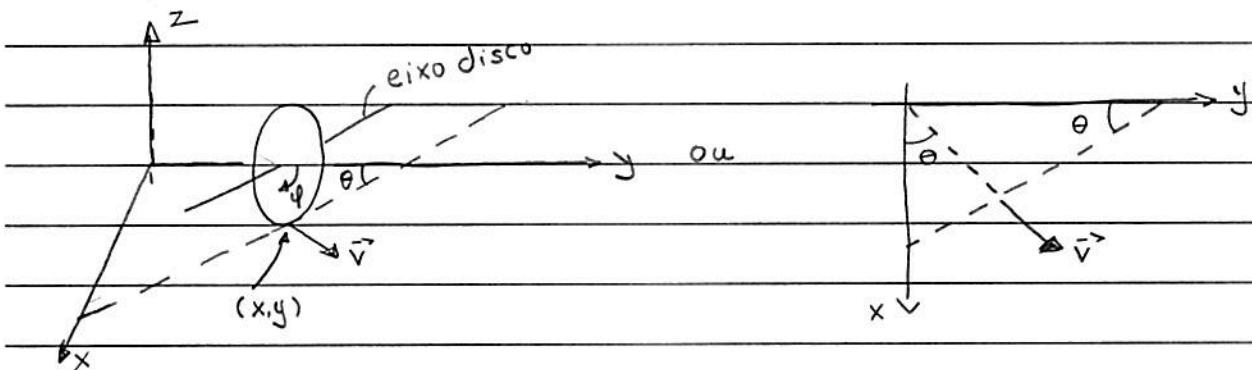
considerar sistema de N-partículas,

em princípio: 3N variáveis independentes = graus de liberdade  
entretanto, se 3 m vínculos (m eqs. de vínculo)

$\hookrightarrow s = 3N - m$  graus de liberdade (variáveis independentes)

Exemplo vínculo não-holônomico (forma diferencial):

considerar disco que gira (s/ deslizar) em torno eixo, raio  $a$ , mov. plano  $xy$ , eixo disco  $\parallel$  plano  $xy$ .



Movimento disco descrito por:

- coord.  $(x, y)$ : pto de contato disco plano  $xy$
- $\dot{\theta}$  e  $\dot{\varphi}$  (veja Fig.)

Como disco gira s/ deslizar, temos que

$$v = a\dot{\varphi}$$

$$\sqrt{x} = \dot{x} = v \cos \theta = a\dot{\varphi} \cos \theta$$

$$v_y = \dot{y} = v \sin \theta = a\dot{\varphi} \sin \theta$$

$$\hookrightarrow \frac{dx}{dt} = a\dot{\varphi} \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = a\dot{\varphi} \sin \theta$$

$$\hookrightarrow dx - a\dot{\varphi} \cos \theta = 0 \quad : \text{eqs. do vínculo} = \quad (170.2)$$

$$dy - a\dot{\varphi} \sin \theta = 0 \quad = \text{eqs. diferenciais}$$

notar: Eqs. (170.2) não podem ser integradas pois  
 $\theta = \theta(t)$  não é inicialmente conhecida!

$\hookrightarrow$  pg. 170

ideia: introduzir coordenadas generalizadas!

Definição:

coordenadas generalizadas: conjunto de  $s$  variáveis independentes  $q_j$  que determinam o estado do sistema e que se relacionam c/ as coordenadas cartesianas através da transformação

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (173.1)$$

ou

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t); \quad i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, s = 3N - m$$

de modo análogo, define-se as velocidades generalizadas que se relacionam c/ as velocidades  $\vec{v}_i$  através da transformação:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i(q_j, \dot{q}_j, t); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (173.2) \\ j = 1, 2, \dots, s = 3N - m$$

Obs.:

(i)  $K$  eqs. de vínculo c/ transf. (173.1);

(ii)  $q_j$ : não necessariamente conjunto h  
" " [comprimento]

(iii) transformações inversas:

$$q_j = q_j(\vec{r}_i, t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (173.3)$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) \quad j = 1, 2, \dots, s = 3N - m$$

Ex. 1: pêndulo simples; vimos que, pg. 167:

$$x = l \sin \theta$$

(172.1)

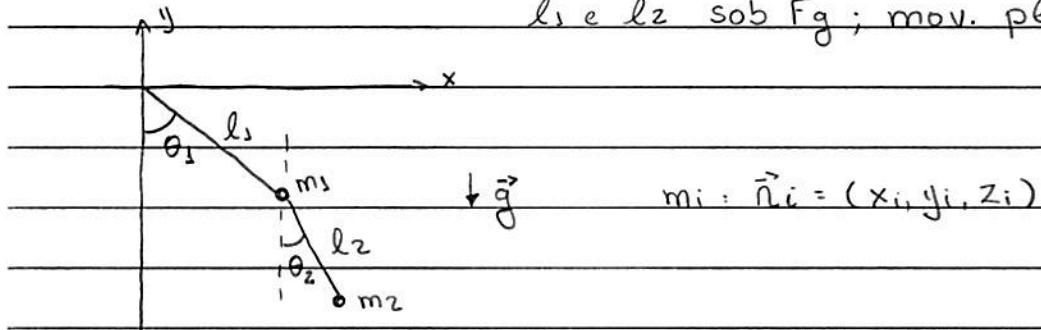
$$y = -l \cos \theta$$

$$\oplus 2 \text{ vínculos: } x^2 + y^2 = l^2 \text{ e } z = 0$$

$\hookrightarrow 3N - V = 3 \cdot 1 - 2 = 1$  grau de liberdade = coordenada generalizada  $\theta$ .

notar Eq. (172.1): eq. transformação entre coordenadas cartesianas e generalizada.

Ex. 2: pêndulo duplo: partículas  $m_1$  e  $m_2$   $\oplus$  hastas (sem massa)  $l_1$  e  $l_2$  sob  $\vec{F}_g$ ; mov. plano  $xy$



$$\hookrightarrow 4 \text{ vínculos: } x_1^2 + y_1^2 = l_1^2; \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 0$$

$\hookrightarrow 3 \cdot N - V = 3 \cdot 2 - 4 = 2$  graus de liberdade: coord. general.  
 $\theta_1$  e  $\theta_2$

temos que:

$$x_1 = +l_1 \sin \theta_1$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1$$

: eq. de transformação

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2$$

Ex. 3 : partícula massa  $m$  sob força central  $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$ ,  
 (veja pg. 59)

simetria  $\rightarrow$  mov. partícula descrito em termos coordenadas esféricas

$$\hookrightarrow x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \quad : \text{eq. de transformação}$$

$$z = r \cos\theta$$

de fato,  $3 \cdot N - v = 3 \cdot 3 - 0 = 3$  graus de liberdade =  
 coord. generalizadas  $r, \theta, \phi$ !

• sobre dificuldade (iii),

ideia: considerar procedimento que não considere as  
 forças de vínculo

• Princípio de D'Alembert,

Definição:

$\delta\vec{r}_i$ : deslocamento (infinitesimal) virtual: variação  
 instantânea no estado da partícula  $i$  consistente c/ os vínculos.

$$\delta t = 0 !$$

comparar:

$\delta\vec{r}_i$ : deslocamento (infinitesimal) real da partícula  
 $i$  em  $\delta t$ : nesse caso forças externas e vínculos  
 podem variar.

notar: Eq. de transformação (174.1)

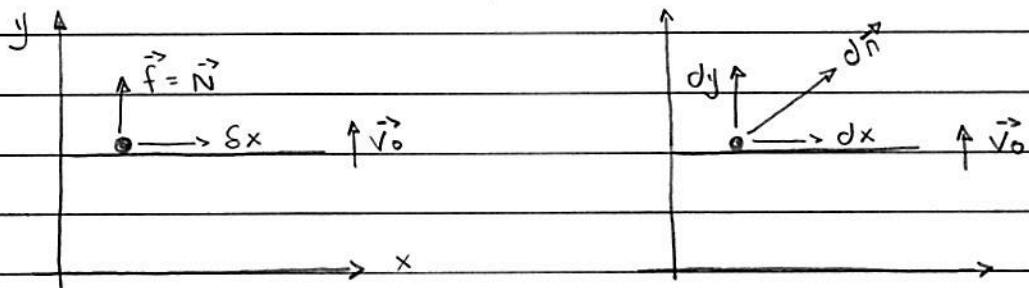
$$\hookrightarrow d\vec{n}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t} dt$$

(174.1)

$$\delta \vec{n}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} \delta q_j : \text{notar } \delta t = 0$$

deslocamento virtual  $q_j$

Ex. 1: partícula massa  $m$ , mov. 1-D nestrito superficie base móvel, veja pg. 169,



$$\delta \vec{n} = \delta x \hat{x}$$

$$d\vec{n} = dx \hat{x} + dy \hat{y}$$

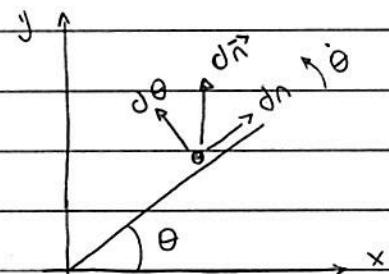
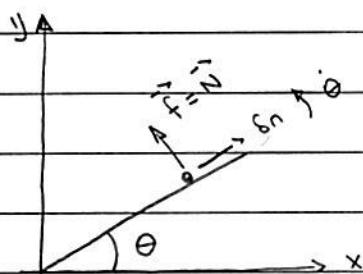
força de vínculo  $\vec{f} = \vec{N}$

notar: deslocamento virtual  $\delta \vec{n}$  é consistente c/  $\vec{f}$

$$\text{pois } \vec{f} \cdot \delta \vec{n} = 0;$$

$$\text{comparar: } \vec{f} \cdot d\vec{n} \neq 0 !$$

Ex. 2: partícula massa  $m$ , mov. nestrito plano inclinado, & inclinação  $\theta = \theta(t)$ , veja pg. 169.



$$\hookrightarrow \delta \vec{n} = \delta n \hat{n} \quad \rightarrow \vec{f} \cdot \delta \vec{n} = 0$$

$$d \vec{n} = d n \hat{n} + d \theta \hat{\theta} \quad \vec{f} \cdot d \vec{n} \neq 0$$

se  $\vec{F}_i$  : força nesueteante sob partícula  $m_i$ ;

p/ deslocamento virtual  $\delta \vec{n}_i$ , temos que

$$S_{W_i} = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{n}_i : \text{trabalho virtual sob } m_i \text{ devido } \vec{F}_i \quad (175.1)$$

hipótese: sistema em equilíbrio, i.e.,  $\vec{F}_i = 0$   
(caso estático)

consideram:  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i$

↓      ↓

fonças de vínculo (interna)  
" aplicadas (externas)

$$\hookrightarrow S_W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{n}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{n}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{n}_i = 0$$

↑ sistema em

equilíbrio!

(175.2)

\* Hipótese: trabalho virtual devido às fonças de vínculo é nulo

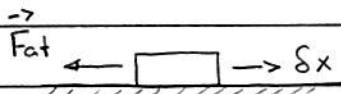
$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{n}_i = 0 : \text{princípio do trabalho virtual} \quad (175.3)$$

notam:

(i) como  $\delta \vec{n}_i$  não são independentes (devido aos vínculos),  
não é possível concluir que  $\vec{F}_i^{(e)} = 0$ ;

(ii) fonças de vínculo eliminadas !!!

comentário sobre forças de atrito: considerar partícula massa  $m$ , mov. em 1-D ⊕ atrito



$$\hookrightarrow \delta_{\text{N}at} = \vec{F}_{\text{at}} \cdot \vec{\delta n} = -F_{\text{at}} \delta x \neq 0 : F_{\text{at}} \notin \text{nesse formalismo!}$$

Eqs. (174.1) ⊕ (175.3) :

$$\sum_{j=1}^s \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} \cdot \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

$\equiv Q_j$  : componente j força generalizada

$$\hookrightarrow \sum_j Q_j \delta q_j = 0 \quad (176.1)$$

como  $\delta q_j$  independentes  $\rightarrow$  condição de

$$\text{equilíbrio} : Q_j = 0 \quad (176.2)$$

Obs.:  $[Q_j]$  não necessariamente força (lembrem  $[q_j]$  não necessariamente [comprimento]);  
entretanto  $[Q_j \delta q_j]$ : energia.

Ex.: pêndulo simples, veja Pg. 167,

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{F}_g = -mg\hat{j} ; \text{ coord. generalizada} : \theta$$

$$x = l \sin \theta \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = l \cos \theta ; \quad \frac{dy}{d\theta} = l \sin \theta$$

$$y = -l \cos \theta$$

$$\hookrightarrow Q_\theta = \vec{F}^{(e)} \cdot \vec{\partial n} = F_x^{(e)} \frac{dx}{d\theta} + F_y^{(e)} \frac{dy}{d\theta} = -mg l \sin \theta$$

$$\Omega_\theta = 0 \rightarrow \theta_0 = 0 \text{ e } \pi$$

notar: ptos de equilíbrio determinados e força de vínculo  
 $\vec{f} = \vec{n}$  não considerada!

Ex. 2: pêndulo simples 2: partícula massa  $m$ , carga  $q$   $\oplus$   
 haste (s/ massa), mov. plano  $xy$ , sob  $\vec{F}_g$  e  
 campo elétrico uniforme  $\vec{E} = E_0 \hat{x}$ ; determinar  
 pto de equilíbrio

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{F}_g + q\vec{E} = -mg\hat{j} + qE_0\hat{x}$$

$$\hookrightarrow \Omega_\theta = \frac{F_x^{(e)} dx}{d\theta} + \frac{F_y^{(e)} dy}{d\theta} = qE_0 l \cos\theta - mg l \sin\theta$$

$$\Omega_\theta = 0 \rightarrow \tan\theta_0 = qE_0/mg$$

· próxima etapa: generalizam Eq. (175.3) p/ caso dinâmico.

Eq. de movimento p/ partícula  $m_i$ :

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (177.1)$$

Eq. (177.1) pode ser escrita como

$$\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

$$\hookrightarrow \sum_i (\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt}) \cdot \delta\vec{n}_i = 0 : \text{comparar Eq. (175.2)}$$

$$\text{como } \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{f}_i$$

$$\hookrightarrow \sum_i (\vec{F}_i^{(e)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt}) \cdot \delta \vec{n}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{n}_i = 0$$

④ hipótese: trabalho virtual devido às forças de vínculo é nulo

$$\hookrightarrow \sum_i (\vec{F}_i^{(e)} - \frac{d\vec{p}_i}{dt}) \cdot \delta \vec{n}_i = 0 : \text{princípio de D'Alembert} \quad (178.1)$$

próxima etapa: expressar (178.1) em termos  $\delta q_j$ !

similar (176.1), temos que

$$\sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot \delta \vec{n}_i = \sum_j Q_j \delta q_j \quad (178.2)$$

sobre o segundo termo (178.1),

• Resultados preliminares (R.1), (R.2) e identidade (I.1):

$$(i) \text{Eq. (174.1)}: \vec{v}_i = \frac{d\vec{n}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} \quad (R.1)$$

$$(ii) \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t} \right)$$

$$= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{n}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{n}_i}{\partial q_j \partial t}$$

por outro lado

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\vec{v}_i)}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \\ \frac{d(\vec{v}_i)}{dt} &= \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \right\} \frac{\partial(\vec{n}_i)}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\vec{n}_i)}{dt} &= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{n}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{n}_i}{\partial q_j \partial t} \\ \frac{d(\vec{n}_i)}{dt} &= \sum_k \frac{\partial^2 \vec{n}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{n}_i}{\partial q_j \partial t} \end{aligned} \right\} (R.2)$$

identidade:

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left( m_i \vec{v}_i \cdot \vec{\delta n}_i \right) = \sum_i \underbrace{\frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{\delta n}_i}_{(*)} + m_i \vec{v}_i \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} (\vec{\delta n}_i)}_{\partial \vec{n}_i / \partial q_j}$$

$$(R.1) \quad \vec{\delta n}_i = \partial \vec{v}_i / \partial q_j$$

$$(R.2) \quad \vec{\delta n}_i = \partial \vec{v}_i / \partial q_j$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \quad (I.1)$$

notar:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{d \vec{p}_i}{dt} \cdot \vec{\delta n}_i &= \sum_i \left( m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} \right) \cdot \left( \sum_j \frac{\vec{\delta n}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \\ &= \sum_j \left( \sum_i m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\vec{\delta n}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \end{aligned} \quad (*)$$

$$(I.2) \quad \vec{\tau} = \sum_j \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) \delta q_j \quad (179.1)$$

Eqs. (178.1), (178.2) e (179.1):

$$\sum_j \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial q_j} - \vec{Q}_j \right) \delta q_j = 0$$

hipótese (1): vínculos holomônicos  $\rightarrow q_j$  são independentes  
 $\hookrightarrow \delta q_j$  são independentes

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial q_j} - \vec{Q}_j = 0 \quad (179.1)$$

hipótese (2) :  $\vec{F}_i^{(e)}$  : forças conservativas  $\rightarrow \vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i U$

$$\hookrightarrow Q_j = \sum_i \frac{\vec{F}_i^{(e)} \cdot \partial \vec{n}_i}{\partial q_j} = - \sum_i (\vec{\nabla}_i U) \cdot \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j}$$

$$= - \sum_i \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial U}{\partial n_{i,\alpha}} \frac{\partial n_{i,\alpha}}{\partial q_j} = - \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (179.1)} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0 \quad (180.1)$$

como  $U = U(q_j)$  p/ sistemas conservativos

$$\hookrightarrow \text{Eq. (180.1)} : \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0$$

Definição :

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv T - U : \text{Lagrangeiana} \quad (180.2)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 ; j=1,2,\dots,s : \begin{matrix} \text{Eq. de} \\ \text{Lagrange} \end{matrix} \quad (180.3)$$

Ex. 1: partícula massa  $m$  sob força conservativa  $\vec{F}$ ;  
determinar eqs. de movimento.

coordenadas generalizadas = coord. cartesianas  $x, y, z$ .

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \leftarrow U = U(\vec{r})$$

$$\hookrightarrow L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\vec{r})$$

temos que:  $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$      $\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$      $\frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z}$

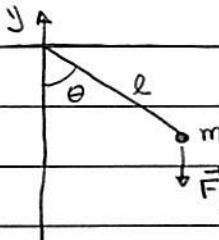
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \ddot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \ddot{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \ddot{z}$$

$$\text{Eq. (180.3)}: \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt} (m \ddot{x}) = 0$$

$$\hookrightarrow m \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$$

$$\text{similar: } m \ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y \quad \leftarrow m \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z.$$

Ex. 2: pêndulo simples: partícula massa  $m$  + haste (sem massa)  
comprimento  $l$ , sob  $\vec{F}_g$ , mov. plano  $xy$ ; determinar  
eq. de movimento.



coord. generalizada:  $\theta$

$$\text{como } x = l \sin \theta \rightarrow \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$y = -l \cos \theta \quad \dot{y} = l \dot{\theta} \sin \theta$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{e} \quad U = mg y = -mg l \cos \theta$$

$$\hookrightarrow L = L(\theta) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mg l \cos \theta$$

$$\text{temos que: } \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg l \sin \theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}$$

$$\text{Eq (180.3): } \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \rightarrow -mg l \sin \theta - m l^2 \ddot{\theta} = 0$$

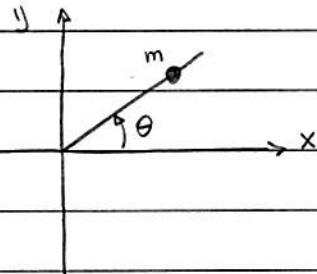
$$\hookrightarrow \ddot{\theta} + g/l \sin \theta = 0 : \text{eq. de movimento.}$$

notar: força de vínculo: tração não é explicitamente considerada

Ex. 3: consideram sistema = barra (sem massa), mov. plâano xy,

notação w.r.t. eixo z, velocidade angular  $\omega$  + massa m,

mov. (sem atrito) ao longo barra; determinar eq.  
de mov. massa m.



coord. cartesianas partícula m

$$x = n \cos \theta \quad \text{e} \quad y = n \sin \theta$$

$$\oplus \text{ vínculo (dependente tempo)} \quad \theta = \omega t \rightarrow x = n \cos \omega t$$

$$y = n \sin \omega t$$

$$\hookrightarrow \text{coord. genêral.} = n$$

$$\text{como } \dot{x} = \dot{n} \cos \omega t - n \omega \sin \omega t$$

$$\dot{y} = \dot{n} \sin \omega t + n \omega \cos \omega t$$

$$\hookrightarrow T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m(\dot{n}^2 + \omega^2 n^2) = L$$

$$\text{como } \frac{\partial L}{\partial n} = m \omega^2 n \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{n}} = m \dot{n}$$

$$\text{Eq. (180.3)} : \frac{\partial L}{\partial n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{n}} \right) = 0 \rightarrow m \omega^2 n - m \ddot{n} = 0$$

$$\hookrightarrow \ddot{n} - \omega^2 n = 0 \quad : \text{eq. de movimento}$$

hipótese : condições iniciais  $n(0) = n_0$  e  $\dot{n}(0) = v_0$

$\hookrightarrow$  verifica-se que :  $n(t) = n_0 \cosh(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$ .  
[exercício]

comentário sobre potenciais generalizados,

hipótese : sistema não-conservativo, vínculos holonômicos,  
sob forças generalizadas  $Q_j$  tais que

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right), \quad (183.1)$$

onde  $U = U(q_j, \dot{q}_j)$  : potencial generalizado

notam Eqs. (179.1)  $\oplus$  (183.1) :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 : \text{Eq. de Lagrange (180.3)!}$$

Ex.: partícula carregada sob campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  (veja abaixo).

· Princípio de Hamilton,

ideia: derivava Eq. de Lagrange (180.3) através de um princípio variacional

considerações iniciais (i) e (iii),

(i) Lembra: estado do sistema é definido pelas coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_s$ ,  $s = 3N - k$ .

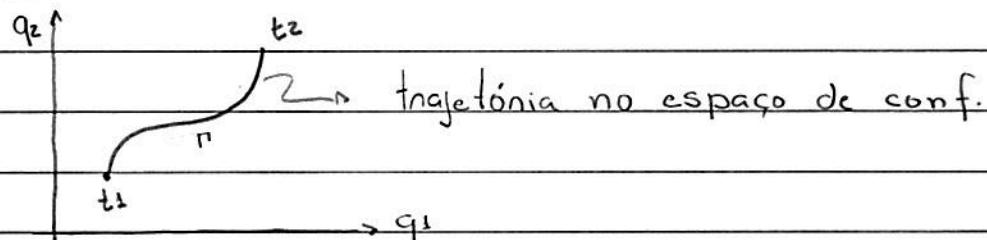
Definição: espaço de configurações: espaço, dimensão = s, definido pelas coord. generalizadas  $q_j$

↳ estado do sistema = pto no espaço de configurações.

↳ pr intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

movimento sistema = trajetória no espaço de conf.

Ex.: sistema descrito pelas coord. generalizadas  $q_1$  e  $q_2$ ,



importante: curva  $r$  (trajetória no espaço de conf.)  $\neq$

trajetória partícula/partículas em  $(x, y, z)$ !

(iii) sistema monogênico: sistema tal que todas as forças (exceto vínculos) são derivadas de um potencial escalar generalizado  $U = U(q_j, \dot{q}_j, t)$ .

caso particular:  $U = U(q_j)$ : sistema conservativo.

princípio de Hamilton (sistemas monogênicos):

o movimento de um sistema no intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  é tal que a ação  $S$ ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (185.1)$$

é estacionária ( $\delta S = 0$ ) para a trajetória do sistema.

Lembrem cálculo variacional, pgs. 155;

considere funcional  $f = f[y_i(x), y'_i(x), x]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{e a integral } J = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y_i, y'_i, x]$$

se  $y_i = y_i(x)$  é tal que  $J$  é estacionária, i.e.,  $\delta J = 0$

$\hookrightarrow y_i = y_i(x)$  satisfaaz a eq. de Euler-Lagrange (156.1):

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

identificando :  $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{S}$        $y_i \rightarrow q_j$   
 $f \rightarrow L$        $y'_i \rightarrow \dot{q}_j$   
 $x \rightarrow t$

↳ eq. de Euler-Lagrange correspondente à ação (185.1) :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 : \text{Eq. de Lagrange (180.3)!} \quad (186.1)$$

$j = 1, 2, \dots, s = 3N - m$

Obs. :

(i) determinação (186.1) ~ variáveis  $y_i$  independentes, veja Eq. (155.3).  
 ↳ Eq. (186.1) ou sistemas monogênicos  
 c/ vínculos holonômicos.

(ii) se vínculos holomônios :

princípio de Eqs. Lagrange  
 Hamilton      condição  
 necessária e suficiente

(iii) nota:  $[S] = \text{energia} \times \text{tempo}$

(iv) princípio de D'Alembert : forma diferencial

base: deslocamento virtual  $\delta y_i$  : instantâneo  $\delta t = 0$ .

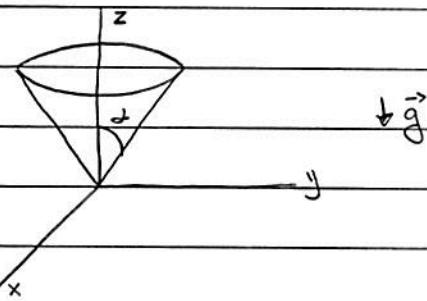
v.s.

princípio de Hamilton : forma integral

base : ação  $S \sim$  trajetória do sistema no  
 espaço de configurações no  
 intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

Ex. 1, Ex. 7.4, Marion: partícula massa  $m$  sob  $\vec{F}_g$ .

movimento restrito à superfície cone; determinar eqs. de movimento.



veja pg. 53

coord. generalizadas = coord. cilíndricas  $p, \varphi, z$

}  $\rightarrow p, \varphi$ :

mov. sob superfície cone  $\rightarrow$  vínculo  $\tan \alpha = p/z$

váriaveis

independentes!

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + p^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\sin^2\alpha \dot{p}^2 + p^2\dot{\varphi}^2)$$

vínculo

$$U = mgz = mgp \cot \alpha$$

$$\hookrightarrow L = T - U = \frac{1}{2}m(\sin^2\alpha \dot{p}^2 + p^2\dot{\varphi}^2) - mgp \cot \alpha$$

$$\text{como: } \frac{\partial L}{\partial p} = m\dot{\varphi}^2 - mg \cot \alpha \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} = m \sin^2 \alpha \dot{p}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m p^2 \dot{\varphi}$$

$$\text{Eq. (180.3): } \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \rightarrow mp^2\ddot{\varphi} = \text{cte} \quad (187.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}\right) = 0 \rightarrow m\dot{\varphi}^2 - mg \cot \alpha - m \sin^2 \alpha \ddot{p} = 0 \quad (187.2)$$

como  $\vec{l} = \vec{n} \times \vec{p} = m(p\hat{p} + z\hat{z}) \times (p\hat{p} + p\dot{\phi}\hat{\phi} + z\hat{z})$

$$= -mp\dot{\phi}z\hat{p} + m(pz - p\dot{z})\hat{p} + \underbrace{mp^2\dot{\phi}}_{l_z}\hat{z}$$

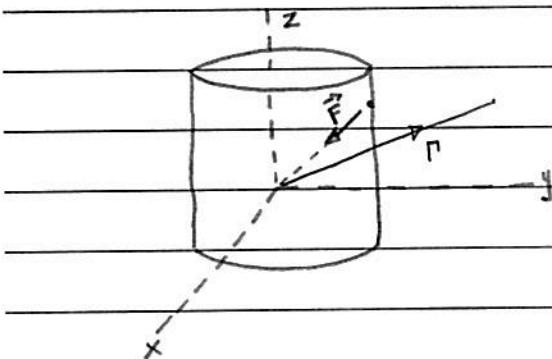
Eq. (187.1) :  $l_z = mp^2\dot{\phi}$  : cte de movimento (188.1)

como  $\dot{\varphi}^2 = l_z^2 / m^2 p^4$

↳ Eq. (187.2) :  $\ddot{p} - \frac{gsin^2\alpha}{m^2 p^3} l_z^2 + g sin\alpha cos\alpha = 0$

Exercício: verifican a possibilidade de órbita circular estável  
(veja exemplo, pg. 55).

Ex. 2, Ex. 7.4, Taylor: partícula massa m sob  $\vec{F} = -k\vec{n}$ ,  
 $k = \text{cte}$ , movimento sob superfície cilíndrica raio R;  
determinar eqs. de movimento.



p/ curva  $\Gamma$  :  $d\vec{r} = d\vec{s}\hat{n}$

coord.

esféricas !

coord. generalizadas = coord. cilíndricas p, φ, z

} → φ e z :

mov. sob superfície cilíndrica  $\rightarrow$  vínculo  $p = R$  variáveis

independentes

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

vínculo

$$\text{Eq. (34.1.0)} : U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0, \Gamma}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{e}'$$

$$\text{como } \vec{F} = -k\vec{n} \rightarrow \text{curva } \Gamma : \text{nádica}, d\vec{e}' = dn\hat{n} + n d\theta \hat{\theta} + n \sin d\phi \hat{\phi}$$

$$= dn\hat{n}$$

$$\vec{r}_0 = 0$$

$$\hookrightarrow U(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} (-kn'\hat{n}) \cdot (dn\hat{n}) = \frac{1}{2}kn^2 \stackrel{\text{vínculo}}{=} \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$$

$$\hookrightarrow L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2)$$

$$\text{como } \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -kz \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\text{Eq. (180.3)} : \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = 0 \rightarrow -kz - m\ddot{z} = 0$$

$$\hookrightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 ; \omega_0^2 = k/m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \rightarrow mR^2\dot{\phi} = cte \rightarrow \dot{\phi} = cte$$

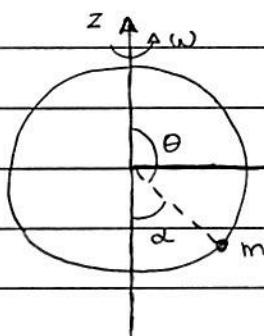
$$\hookrightarrow z(t) = A \cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\dot{\phi} = \omega = \text{cte}$$

$$l_z = mR^2\omega : \text{cte de}$$

movimento

Ex. 3, Ex. 7.6, Taylor: partícula massa  $m$  sob  $\vec{F}_g$ , movimento (s/ atrito) restrito círculo radio  $R$ ; círculo em notação w.r.t. eixo z, velocidade angular  $\omega = \text{cte}$ ; determinar eqs. de movimento.



$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

coord. generalizadas = coord. esféricas  $r, \theta, \phi$   
 vinculos: mov. restrito círculo:  $r = R$  }  $\rightarrow \theta:$   
 notação círculo  $\omega = \text{cte}$ :  $\dot{\phi} = \omega$  } variável  
 independente

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (r^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta)$$

$$U = mgR (1 + \cos \theta)$$

$$\text{como } \theta = \pi - \alpha \rightarrow \sin \theta = \sin \alpha; \cos \theta = -\cos \alpha; \dot{\theta} = \dot{\alpha}$$

$$\hookrightarrow L = T - U = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\alpha}^2 + \omega^2 \sin^2 \alpha) - mgR (1 - \cos \alpha)$$

$$\text{como } \frac{\partial L}{\partial \alpha} = m \omega^2 R^2 \sin \alpha \cos \alpha - mgR \sin \alpha; \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m R^2 \dot{\alpha}$$

$$\text{Eq. (180.3)}: \frac{\partial L}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = 0$$

$$\hookrightarrow \ddot{\alpha} + (g/R - \omega^2 \cos \alpha) \sin \alpha = 0 : \text{sol. numérica!} \quad (190.1)$$

hipótese:  $\exists$  posição de equilíbrio  $\alpha = \alpha_0 = \text{ctc}$

nesse caso  $\ddot{\alpha} = 0 \quad \text{Eq. (190.1)} \rightarrow \sin \alpha_0 \left( g/R - \omega^2 \cos \alpha_0 \right) = 0$

$$\hookrightarrow \sin \alpha_0 = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0 \text{ e } \pi$$

$$\cos \alpha_0 = \frac{g}{R\omega^2}, \text{ se } g \leq R\omega^2$$

notas:

- se  $\omega^2 < g/R$  (notação lenta): pts equilíbrio  $\alpha_0 = 0 \text{ e } \pi$

- se  $\omega^2 > g/R$  (notação rápida): " "  $\alpha_0 = 0, \pi$

$$\text{e } \cos \alpha_0 = g/R\omega^2$$

estabilidade pts de equilíbrio:

$$\text{Se } \alpha = \alpha_0 + \beta; \quad \beta \ll \alpha_0$$

$$\hookrightarrow \ddot{\alpha} = \ddot{\beta} \quad \cos(\alpha_0 + \beta) \approx \cos \alpha_0 - \beta \sin \alpha_0$$

$$\sin(\alpha_0 + \beta) \approx \sin \alpha_0 + \beta \cos \alpha_0$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (190.1): } \ddot{\beta} + \left( g/R \cos \alpha_0 - \omega^2 \cos^2 \alpha_0 + \omega^2 \sin^2 \alpha_0 \right) \beta +$$

$$+ \underbrace{\left( g/R - \omega^2 \cos \alpha_0 \right) \sin \alpha_0}_0 = 0$$

$$(i) \text{ se } \alpha_0 = 0: \ddot{\beta} + (g/R - \omega^2) \beta = 0$$

$\hookrightarrow \alpha_0 = 0$  é pt de equilíbrio estável se  $\omega^2 < g/R$

" " instável " "  $\omega^2 > g/R$

(iii) se  $\omega_0 = \pi$ :  $\ddot{\vartheta} - (g/R + \omega^2)\vartheta = 0 \rightarrow \omega_0 = \pi$  é pto de equilíbrio instável.

(iii) se  $\cos\omega_0 = g/R\omega^2$ :

$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \left(1 - g^2/R^2\omega^4\right)\vartheta = 0 \rightarrow$  pto de equilíbrio estável.

$> 0$  pois  $g < R\omega^2$

• Vínculos e multiplicadores de Lagrange,

ideia: incluir vínculos explicitamente na Eq. de Lagrange e obter informações sobre as forças de vínculo

dois casos.

(i) vínculos holonômicos,

Lembra cálculo variacional: determinação extrema sob vínculo, pg. 157,

consideram funcional  $f = f[y_i(x), y'_i(x), x]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

⊕ m eqs. de vínculo  $g_j[y_j, x]$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  (192.1)

$$\text{e a integral } J = \int_{x_1}^{x_2} dx f[y_i, y'_i, x]$$

se  $y_i = y_i(x)$  é tal que  $J$  é estacionária, i.e.,  $\delta J = 0$ ,

sob os m vínculos  $\rightarrow y_i = y_i(x)$  satisfaz

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0 \quad (193.1)$$

→ multiplicação de Lagrange

como vínculos holonômicos [Eq. (168.1)],

$$f_k(q_j, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (193.2)$$

são análogos à (192.1) → eq. de Euler-Lagrange correspondente à ação (186.1) + vínculos (193.2) :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (193.3)$$

→ multiplicação

de Lagrange !

notar : nesse caso, as coord. generalizadas  $q_j$  não são independentes devido à  $\exists m$  vínculos (193.2).

(ii) vínculos não-holonômicos,

verifica-se que vínculos na forma diferencial (veja pg. 170.1)

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} dq_j + a_{k0} dt = 0; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (193.4)$$

onde  $a_{kj} = a_{kj}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$

$a_{k0} = a_{k0}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$

podem ser incluídos na Eq. de Lagrange de modo análogo ao caso (i), veja abaixo.

consideran: sistema descrito por  $n$  coord. generalizadas  $q_j \oplus m$  vínculos (193.4),

Vimos que a variação da ação (186.1) pode ser escrita como

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (194.1)$$

a fim de incluir os vínculos (193.4), vamos considerar deslocamentos virtuais  $\delta q_j$ ; nesse caso, (193.4) assume a forma

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} \delta q_j = 0 \quad (\text{Lembra: } \delta t = 0 !)$$

$$\hookrightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{kj} \delta q_j = 0 \quad (194.2)$$

váriaveis auxiliares!

(194.1)  $\oplus$  (194.2) :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{kj} \right) \delta q_j = 0$$

(I) (194.3)

como  $\underline{n}$   $q_j$  não são independentes, não podemos concluir que (I) = 0;

entretanto, considerando as  $n-m$   $q_j$  independentes, Eq. (194.3) pode ser escrita como

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\sum_{j=1}^{n-m} (I) + \delta q_j}_{(II)} + \underbrace{\sum_{j=n-m+1}^m (I) + \delta q_j}_{(III)} = 0$$

notam:

(II) : como  $\dot{q}_j$  são independentes  $\rightarrow (I) = 0 \Rightarrow (II) = 0$

(III) : nesse caso,  $\lambda_k$  são escolhidos tais que  $(I) = 0$

$$\Leftrightarrow (III) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{kj} = 0 ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (195.1)$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

comparam Eqs. (193.3) e (195.1) !

Obs.:

(ii) vimos que eq. de Lagrange pode ser escrita como

$$\text{Eq (193.1)} : \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j = 0$$

se  $Q_j$  = forças externas + forças generalizadas  
~ potenciais de vínculo

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j = 0 \quad (195.2)$$

comparando Eqs. (193.3), (195.1) e (195.2), temos que

$$Q_j = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0 : \text{força generalizada de vínculo}$$

(195.3)

$$Q_j = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_{kj}$$

↳ muitas aplicações de Lagrange  $\lambda_k \rightarrow$  info sobre forças de vínculo!

(ii)  $\neq$  Eq. (193.2), Eq. (193.4) não pode ser utilizada p/ eliminar variáveis dependentes  $q_j$

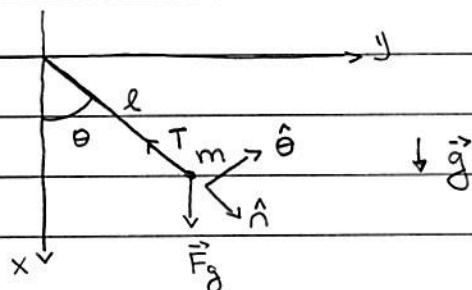
↳ Eq. (195.2) : forma descreve sistemas sob vínculos não-holônicos (193.4) !

$$(iii) \text{ se } a_{kj} = \frac{\partial f_k}{\partial q_j} \text{ e } a_{k0} = \frac{\partial f_k}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \text{Eq. (193.4)} : \sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = df_k = 0$$

↳  $f_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \text{cte}$  : vínculo holônomico !

Ex. 1 : pêndulo simples  $\oplus$  vínculo : similar Ex. 2, pg. 181, porém considerando o vínculo explicitamente;



coord. generalizadas = coord. polares no  $\theta$

vínculo :  $n = l$

$$\Rightarrow f(n, \theta) = f(n) = n - l = 0 : \text{eq. do vínculo !}$$

11

Eq. (42.2)

197

$$\text{como } T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

$$U = mg l - mg x = mg (l - r \cos \theta)$$

$$\hookrightarrow L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mg (l - r \cos \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g r \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Eq (193.3) :

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \rightarrow m r \ddot{\theta}^2 + mg \cos \theta - m \ddot{r} + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \rightarrow -m g r \sin \theta - 2 m r \dot{r} \dot{\theta} - m r^2 \ddot{\theta} = 0$$

$$\hookrightarrow m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = mg \cos \theta - \lambda$$

: eqs. de (197.1)

$$m (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = -mg \sin \theta \quad \text{movimento}$$

fórcas generalizadas de vínculo (195.3) :

$$Q_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda \quad : \text{Tração}$$

(197.2)

$$Q_{\theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

notam : 3 funções a determinar :  $r, \theta, \lambda$

3 eqs. : Eqs. (197.1) e (196.1)

$\hookrightarrow$  Eq. (196.1) :  $\ddot{r} = l \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0 \oplus$  Eqs. (197.1) :

$$-m l \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - \lambda \quad (197.3)$$

$$\ddot{\theta} + g/l \sin \theta = 0 \quad (197.4)$$

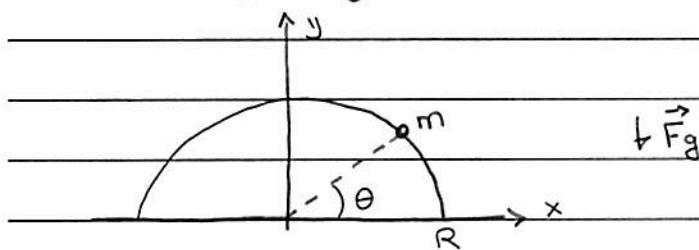
$\hookrightarrow$  Eq. (197.4)  $\rightarrow \theta = \theta(t) \oplus (197.3)$

$$\hookrightarrow \lambda = \lambda(\theta) \text{ ou } \lambda = \lambda(t)$$

Exercício : determinar  $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$  e  $\lambda = \lambda(\theta)$ .

Exercício: determinar eqs. de movimento via 2ª Lei em coordenadas polares, Eq. (43.1), e verificar que  $\lambda = \tau$ .

Ex. 2: movimento ao longo de um semi-círculo I,  
veja pg. 45;



coord. generalizadas: coord. polares  $n, \theta$

Vínculo: em princípio,  $n \geq R$  (não holonômico)  
entretanto, se considerarmos At tal que partícula  $m$  está em contato c/ semi-círculo

$$\hookrightarrow n = R \rightarrow f(n, \theta) = f(n) = n - R$$

como

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (n^2 + n^2 \dot{\theta}^2)$$

$$U = mg y = mg n \sin \theta$$

$$\hookrightarrow L = T - U = \frac{1}{2} m (n^2 + n^2 \dot{\theta}^2) - mg n \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial n} = mn\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{n}} = m\dot{n} \quad \frac{\partial f}{\partial n} = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg \cos \theta \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mn^2 \dot{\theta} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Eq. (193.3) :

$$\frac{\partial L}{\partial n} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{n}} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \rightarrow m(\ddot{n} - n\dot{\theta}^2) = \lambda - mg \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \rightarrow m(n\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta}) = -mg \cos \theta$$

(199.3)

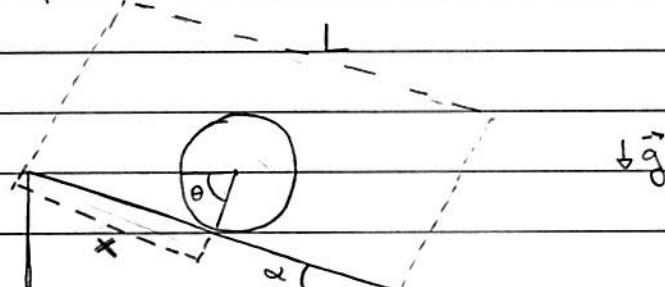
forças generalizadas de vínculo (195.3) :

$$\frac{\partial n}{\partial n} = \lambda \frac{\partial f}{\partial n} = \lambda : \text{normal!}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$$

Obs.: comparar eqs. de movimento (15.1) e (199.1) e  
verificam que  $\lambda = N$ .

Ex. 3: Ex. 7.9, Marion: disco homogêneo, massa  $m$ , raio  $R$ ;  
disco gira s/ deslizar ao longo plano inclinado  
comprimento  $L$ ,  $\alpha$  inclinação =  $\alpha$ ; determinar  
Eqs. de movimento.



coord. generalizadas:  $x \in \theta$

Vínculo: disco gira s/ deslizar:  $R d\theta = dx$

$$\hookrightarrow R d\theta - dx = 0 \rightarrow a_\theta = R \quad : \text{veja Eq. (193.4)}$$

$$a_x = -1$$

(199.2)

11

$$\text{Como: } T = T_{CM} + T_{ROT} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$\text{p/ disco w.r.t. eixo: } I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$U = mg(l-x) \sin \alpha$$

$$\hookrightarrow L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta}^2 - mg(l-x) \sin \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m g \sin \alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$\alpha_x = -1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}$$

$$\alpha_\theta = R$$

$$\text{Eq. (195.1): } \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \lambda \alpha_x = 0 \rightarrow m g \sin \alpha - m \ddot{x} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) + \lambda \alpha_\theta = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} + \lambda R = 0$$

$$m \ddot{x} = m g \sin \alpha - \lambda$$

↳

: eqs. de movimento

(200.1)

$$\frac{1}{2} m R \ddot{\theta} = \lambda$$

notar: 3 funções a determinar:  $x, \theta, \lambda$

3 eqs.: Eqs. (200.1) e (199.2)

$$\text{Eq. (199.2): } R d\theta = dx \rightarrow \frac{R d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\hookrightarrow R \dot{\theta} = \dot{x} \rightarrow R \ddot{\theta} = \ddot{x} \quad \text{④ (200.3)}$$

$$\frac{1}{2} m R \ddot{\theta} = \frac{1}{2} m \ddot{x} = \lambda$$

$$m \ddot{x} = mg \sin \alpha - \lambda = mg \sin \alpha - \frac{1}{2} m \ddot{x} \rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad (203.1)$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} = \frac{2}{3} g / R \sin \alpha$$

$$\lambda = \frac{1}{3} mg \sin \alpha$$

forças generalizadas de vínculo (195.3) :

$$Q_x = \lambda a_x = -\frac{1}{3} mg \sin \alpha ; [Q_x] = \text{força}$$

$$Q_\theta = \lambda a_\theta = \frac{1}{3} mg R \sin \alpha ; [Q_\theta] = \text{torque}$$

Lembrar : girar s/ deslizar  $\sim$  Fazendo disco-plano

$\hookrightarrow Q_x \sim$  Fazendo e  $Q_\theta \sim$  Torque Fazendo w.n.l.  
eixo disco

Obs. : se disco deslizar s/ girar :  $\ddot{x} = g \sin \alpha$ ; comparar  
c/ Eq. (203.1).

11

Teoremas de conservação e simetrias.

Ideia: determinam propriedades da Lagrangiana

Verifica-se que: simetria Lagrangiana → quantidade conservada  
sob transformação

L invariante sob translação temporal → energia conservada

$L \quad " \quad " \quad "$  espacial →  $\vec{p}$  "

$L \quad " \quad " \quad$  notação →  $\vec{e}$  "

Considerações iniciais:

Vimos que, em alguns casos, é possível obter a partir das eqs. de movimento relações da forma (veja exemplos pgs. 55, 59, 108)

$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = cte$  : primeira - integral (202.1)  
ou integral de movimento

i.e.,  $f$  é uma cte de movimento.

Lembremos partícula massa  $m$  sob força central, pg. 59:

momento angular  $\ell = m r^2 \dot{\theta} = cte$  de movimento.

Hipótese: sistema conservativo,

consideram: sistema N partículas massa  $m_i$  sob  $U(r_{ij})$

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

notas:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{x,i} : \text{componente } x \quad (203.1)$$

momento linear partícula  $m_i$

ideia: generalizar (203.1) p/  $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$

Definição: momento generalizado ou  
momento canonicamente conjugado:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (203.2)$$

Lembrem: como  $[q_j]$  não necessariamente compõem o momento  
 $\hookrightarrow [p_j]$  " " " momento

Hipótese:  $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ , entretanto,  $L$  não depende explicitamente de  $q_k$ , i.e.,

$q_k$  é uma variável cíclica

Eq. de Lagrange:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \downarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0$

| Eq. (203.2)  $\rightarrow \dot{p}_k = 0 \rightarrow p_k = \text{cte}$  : integral de movimento

$\hookrightarrow$  Teorema de conservação: o momento canonicamente conjugado a uma variável cíclica é conservado. (203.3)

11

notas: (203.3) é generalização teoremas de conservação discutidos inicialmente, veja pg. 30.

próxima etapa: verificam que

Eq. (203.3)	conservação	
	momento linear	
	" angular, energia	

Obs.: ≠ considerações pg. 30, vamos considerar sistema N-partículas!

(i) conservação momento linear ~ espaço homogêneo

considerar: translação do sistema ao longo direção  $\vec{n}$   
corresponde variação coordenada generalizada  
 $q_j$ , i.e.,  $dq_j$

Ex.: partícula massa  $m$ ;  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = z$   
translação (infinitesimal) partícula ao longo eixo  $x$ :  $dq_1 = dx$ !

como  $T = T(q_j)$  e  $U = U(q_j)$ ,

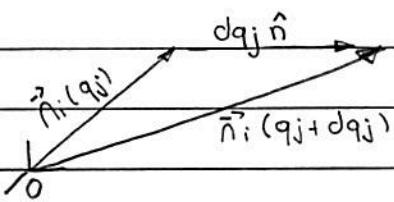
$$\text{Eq. de Lagrange: } \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \rightarrow -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \quad (204.1)$$

notas:

(i) Lembrar definição  $Q_j$ , Eq. (176.1)

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}$$



$$\frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{1}{dq_j} (\vec{n}_i(q_j + dq_j) - \vec{n}_i(q_j)) = \lim_{dq_j \rightarrow 0} \frac{dq_j \hat{n}}{dq_j} = \hat{n}$$

$$\hookrightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \hat{n} = \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot \hat{n} : \text{componente } (205.1)$$

$\vec{F}_{\text{TOT}}$  w.r.t. direção  
de translação  $\hat{n}$

$$(2) \text{ como } T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$

$$\hookrightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j}$$

Eq. (R.1), pg. 178

$$= \left( \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \right) \cdot \hat{n} : \text{componente momento linear total w.r.t. direção de translação } \hat{n} \quad (205.2)$$

Eqs. (204.1), (205.1) e (205.2) :

$$\dot{p}_j = \left( \sum_i m_i \vec{v}_i \right) \cdot \hat{n} = \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \hat{n} = Q_j$$

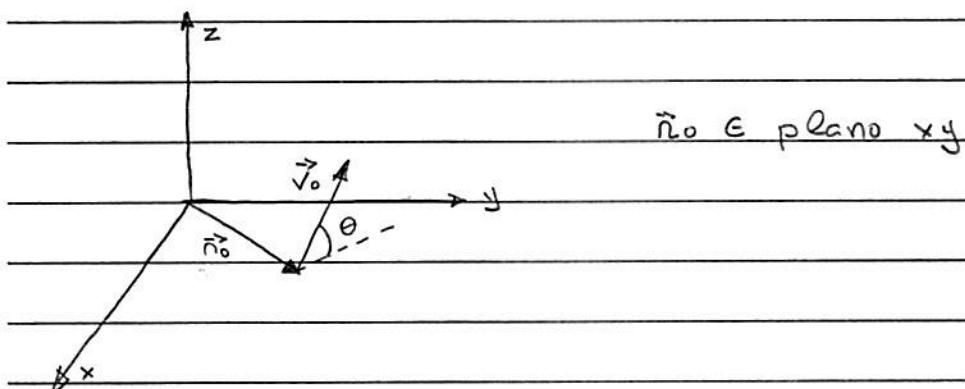
$$\text{se } q_j \text{ variável cíclica} \rightarrow Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$\hookrightarrow p_j = \text{cte}$  : componente  $\hat{n}$   
momento linear é cte de  
movimento

• sistema invariante translação espacial: propriedades do sistema independe posição: espaço homogêneo

se coord. generalizada  $q_j$  é tal que  $dq_j$  corresponde translação sistema  $\rightarrow q_j$  é cíclica  $\rightarrow p_j$  cte  $\sim$  espaço homogêneo

Ex.: movimento projétil em 3-D, veja pg. 18: partícula massa  $m$  sob  $\vec{F}_g$ ; c.i.  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  e  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$



$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

notas:  $x$ : variável cíclica  $\rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = cte$

$$y: " " " " p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = cte$$

(\*)  $\sim$  sistema invariante translação vetorial  $\vec{r} \in$  plano  $xy =$   
= propriedades do sistema (alcance,  $h_{max}$ ) independe  $\vec{r}_0$ !

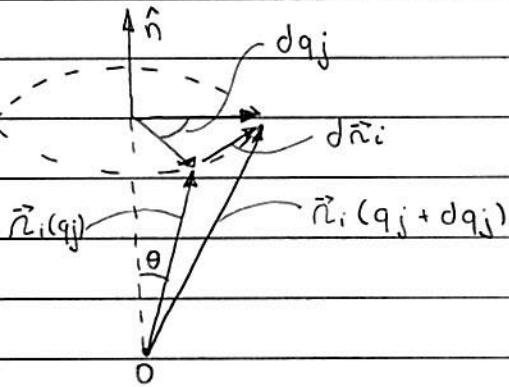
(ii) conservação momento angular  $\sim$  espaço isotrópico

similar caso anterior (i), porém

$dq_j$ : notação sistema w.r.t. direção  $\hat{n}$

nesse caso, Eq. (204.1) ou, porém  $\partial \vec{n}_i \neq \hat{n}$   
 $\partial q_j$

notar Fig.:



$$|\partial \vec{n}_i| = n_i \sin \theta \, dq_j \quad \text{vetorialmente} \quad \partial \vec{n}_i = \hat{n} \times \vec{n}_i \\ \partial q_j$$

$$\hookrightarrow Q_j = \sum_{i=1}^n \underbrace{\vec{F}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{n}_i)}_{\hat{n} \cdot (\vec{n}_i \times \vec{F}_i)} = \left( \sum_{i=1}^n \vec{n}_i \times \vec{F}_i \right) \cdot \hat{n} : \text{componente torque total w.r.t. direção de notação } \hat{n}$$

$$\text{Eq. (205.2): } p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \partial \vec{n}_i = \sum_{i=1}^n m_i \underbrace{\vec{v}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{n}_i)}_{m_i \hat{n} \cdot (\vec{n}_i \times \vec{v}_i)} \\ (207.2)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n m_i (\vec{n}_i \times \vec{v}_i) \right) \cdot \hat{n} : \text{componente momento angular total w.r.t. direção notação } \hat{n}$$

Eqs. (204.1), (207.1) e (207.2),

$$p_j = \left( \sum_{i=1}^n m_i (\vec{n}_i \times \vec{v}_i) \right) \cdot \hat{n} = \left( \sum_{i=1}^n \vec{n}_i \times \vec{F}_i \right) \cdot \hat{n} \cdot Q_j$$

Se  $Q_j$  variável cíclica  $\rightarrow Q_j = 0 \rightarrow p_j = \text{cte}$ , i.e.,

11

componente  $\hat{n}$  momento angular é cte de movimento!

sistema invariante notação: propriedades do sistema independe direção observação: espaço isotrópico

se coord. generalizada  $q_j$  é tal que  $dq_j$  corresponde notação sistema w.n.t.  $\hat{n} \rightarrow q_j$  é cíclica  $\rightarrow p_j = \text{cte} \sim$  espaço isotrópico

Ex. 1: partícula massa  $m$  sob  $U = U(p)$  (coord. cilíndricas):

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{p}^2 + p^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(p)$$

notam:

$z$  variável cíclica  $\rightarrow p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} = \text{cte}$ : sistema invariante w.n.t. translação eixo z

$\varphi$  " "  $\rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m p^2 \dot{\varphi} = l_z = \text{cte}$ : sistema invariante w.n.t. notação eixo z

Ex. 2: partícula massa  $m$  sob  $U = U(n, \theta)$  (coord. esféricas):

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{n}^2 + n^2 \dot{\theta}^2 + n^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(n, \theta)$$

notam:  $\varphi$  variável cíclica  $\rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m n^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$

$$\text{como } \vec{l} = \vec{n} \times \vec{p} = m n \hat{n} \times (n \hat{n} + n \dot{\theta} \hat{\theta} + n \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\varphi})$$

$$= m n^2 \dot{\theta} \hat{\varphi} - m n^2 \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\theta} = l_x \hat{x} + l_y \hat{y} + (m n^2 \sin \theta \dot{\varphi}) \hat{z}$$

verifican, veja Eq. (9.1)

$\hookrightarrow p_F = \ell z = cte$  : sistema invariante w.r.t.  
notação eixo z.

• Conservação energia total ~ homogeneidade tempo

• Consideração inicial: energia cinética sistema N-partículas  $m_i$ ,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

como Eq. (171.5) :  $\vec{n}_i = \vec{n}_i(q_j, t)$

$$\hookrightarrow \vec{v}_i = \frac{d\vec{n}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_j \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$= \sum_{j,k} \left( \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_k}}_{\equiv a_{jk}} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j \underbrace{\left( \sum_i m_i \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t} \right)}_{\equiv b_j} \dot{q}_j$$

$$+ \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial \vec{n}_i}{\partial t} \right)^2}_{\equiv c}$$

$$\text{se } \vec{n}_i = \vec{n}_i(q_j) \rightarrow b_j = c = 0 \rightarrow T = \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (209.1)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_k a_{kj} \dot{q}_k + \sum_j a_{jj} \ddot{q}_j \quad (209.2)$$

$$\sum_k \frac{\dot{q}_k \partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k a_{eq} \dot{q}_k \dot{q}_k + \sum_k a_{ej} \dot{q}_k \dot{q}_k = 2T \quad (210.1)$$

• hipótese:  $U = U(q_j)$  : sistema conservativo

como  $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$

$$\hookrightarrow \frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\text{como Eq. de Lagrange: } \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (210.1.0)$$

$$\hookrightarrow \frac{dL}{dt} = \underbrace{\sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j}_{\frac{d}{dt} \left( \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\sum_j \frac{\dot{q}_j \partial L}{\partial \dot{q}_j} - L}_{h} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (210.2)$$

$\equiv h(q_j, \dot{q}_j, t)$  : função energia

$$\text{Eq. (210.2)} \rightarrow \frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (210.3)$$

notam:

(i) se  $L = L(q_j, \dot{q}_j)$   $\oplus$  Eq. (210.3)  $\rightarrow h = \text{cte de movimento}$

(ii) se  $\vec{n}_i = \vec{n}_i(q_j)$   $\rightarrow$  Eqs. (209.1) e (210.1) ou

$$\hookrightarrow h = \sum_j \frac{\dot{q}_j \partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j \frac{\dot{q}_j \partial T}{\partial \dot{q}_j} - L = 2T - (T - U) = T + U = E = \text{cte!}$$

i.e. se condições (i) e (ii) OK  $\rightarrow E = \text{cte}$  de movimento

· sistema invariante translacção temporal: medidas realizadas sob as mesmas condições de contorno independe instante  $t$ : homogeneidade tempo, i.e.

$q_j(t)$ : estado sistema instante  $t$

& condições iniciais

mas  $\neq$  valor específico de  $t_0$

$$\int \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \sim \text{homogeneidade do tempo}$$

$$\int \rightarrow E = \text{cte} !$$

Obs.: Eq. de Lagrange ingrediente importante p/ (210.4)!

caso geral [Monin]: relação entre simetrias e quantidades conservadas:

\* Teorema de Noether: p/ cada simetria da Lagrangiana

$\exists$  uma quantidade conservada (211.1)

vamos verificar (211.1):

considerar a transformação:  $q_j \rightarrow q_j + \epsilon v_j (q_1, q_2, \dots, q_n)$   
(transf. infinitesimal)

$$q_j \rightarrow q_j + \epsilon v_j(q)$$

$$\hookrightarrow L(q_j, \dot{q}_j, t) \rightarrow L(q_j + \epsilon v_j, \dot{q}_j + \epsilon \dot{v}_j, t)$$

$$\text{ou } \frac{dL}{d\epsilon} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \epsilon} = \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) v_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{v}_j$$

$$= v_j \quad = \dot{v}_j \quad \boxed{\text{Eq. de Lagrange}}$$

$$\hookrightarrow \frac{dL}{de} = \sum_j \frac{d}{dt} \left( \kappa_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

se  $L$  invariante sob transformação (252.2) (primeira - ordem e)

$$\hookrightarrow \frac{\partial L}{\partial e} = 0 \rightarrow P(q_k, \dot{q}_k) \equiv \sum_j K_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{cte de movimento ou integral de movimento} \quad (252.1)$$

Definição :  $P(q_k, \dot{q}_k)$  : momento conservado

Ex. 1 : movimento projétil em 3-D, veja pg. 206,

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

simetria  $L$  : invariante translacão vetor  $\vec{a} \in$  plano  $xy$

$$\text{p/ transf. infinitesimal (252.2)} : x \rightarrow x + e \rightarrow K_x = K_y = 1$$

$$y \rightarrow y + e$$

$$\text{Eq. (252.5)} : P_1(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = K_x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} = p_x = \text{cte}$$

: ok análise

$$P_2(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = K_y \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} = p_y = \text{cte} \quad \text{pg. 206}$$

Ex. 2 : partícula massa  $m$  sob  $U = U(p)$  (coord. cilíndricas),  
veja pg. 208.

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{p}^2 + p^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - U(p)$$

simetria  $L$  : invariante translacão vetor  $\vec{a} = a \hat{z}$   
notação  $\kappa \propto$  w.r.t. eixo  $z$

pr transf. infinitesimal (211.2) :  $z \rightarrow z + \epsilon \rightarrow \kappa z = \kappa \varphi = 1$   
 $\varphi \rightarrow \varphi + \epsilon$

$$\text{Eq. (212.3)} : P_1(p, \varphi, z, \dot{p}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \kappa_z \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} = \text{cte}$$

$$P_2(p, \varphi, z, \dot{p}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \kappa_\varphi \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mp^2 \dot{\varphi} = \ell_z = \text{cte.}$$

• Potenciais dependentes da velocidade/generalizados,

vimos que a Eq. de Lagrange pode ser escrita como, Eq. (179.1):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Se  $U = U(q_j)$ : sistemas conservativos (179.1)  $\rightarrow$  Eq. de Lagrange (180.3)!

além disso, se  $U = U(q_j, \dot{q}_j)$  tal que

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (180.3)$$

$\hookrightarrow$  Eq. (179.1)  $\rightarrow$  Eq. de Lagrange (180.3)! (veja comentário pg. 183)

Ex.: partícula carregada sob campo eletromagnético:

considernar partícula massa  $m$  e carga  $q$  sob campos  
 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ .

eq. de movimento:

$$\text{Lei de Lorentz: } \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (180.2)$$

Lembrem cletrostática:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) : \rightarrow \text{potencial elétrico}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) : \rightarrow \text{potencial vetorial}$$

pr eletrodinâmica:  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ ;  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\varphi = \varphi(\vec{r}, t); \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (25.1)$$

notam Lei de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})) \quad (25.2)$$

componente  $\hat{x}$  (25.2):

$$F_x = q \left( -\partial_x \varphi - \partial_t A_x + \underbrace{(\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_x}_{(I)} \right)$$

temos que:

$$(I) = v_y (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z - v_z (\vec{\nabla} \times \vec{A})_y$$

$$= v_y (\partial_x A_y - \partial_y A_x) - v_z (\partial_z A_x - \partial_x A_z) + v_x \partial_x A_x - v_x \partial_x A_x$$

$$= \underbrace{(v_x \partial_x A_x + v_y \partial_x A_y + v_z \partial_x A_z)}_{\vec{v} \cdot (\partial_x \vec{A})} - \underbrace{(v_x \partial_x A_x + v_y \partial_y A_x + v_z \partial_z A_x)}_{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A_x}$$

$$\vec{v} \cdot (\partial_x \vec{A}) = \partial_x (\vec{v} \cdot \vec{A})$$

↑  
pois  $\vec{v} \in \vec{v}$

sao independentes!

$$\text{pon outro lado: } \frac{dA_x}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_x}{\partial n_i} \frac{dn_i}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) A_x + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow (I) = \partial_x (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow F_x = -\partial_x (q\varphi - q\vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt} (-qA_x) \quad (25.3)$$

comparando (25.1) e (25.3),

$$\hookrightarrow U(\vec{r}, \vec{v}) = q\varphi(\vec{r}, t) - q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\hookrightarrow L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\vec{v} \cdot \vec{A} : \text{Lagrangeana p/ particula carregada sob campo EM} \quad (216.1)$$

Exercicio: derivar eq. de movimento (214.2) a partir (216.1) e eq. de Lagrange.

notam momento generalizado (203.2):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = mv_i + qA_i \rightarrow \vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad (216.2)$$

$\hookrightarrow$  momento linear

· Introdução: formalismo Hamiltoniano,

- formulação alternativa mecânica;

- maior entendimento: estrutura matemática teoria;

- solução problemas

mecânica: determinação eqs. equivalentes

de movimento  $\oplus$  solução: Lagrangiana

entretanto, útil para extensões:

- teoria de perturbação, caos (mec. clássica);

- física estatística (sistema muitas partículas);

- mecânica quântica;

ideia: Lagrangiana: descrição sistema através variáveis  $(q_j, \dot{q}_j, t)$

Hamiltoniana: " " " "  $(q_j, p_j, t)$

função Hamiltoniana  $H = H(q_j, p_j, t)$  determinada a partir

$L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$  via transformada de Legendre

· Lembrem transformada de Legendre.

considere sistema descrito pelas variáveis  $(x, y)$

$$\text{se } f = f(x, y) \rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u dx + v dy$$

onde  $u = u(x, y)$  e  $v = v(x, y)$

ideia: determinar transformação tal que sistema descrito pelas variáveis  $(u, v)$

notas:

$$df = udx + vdy = d(ux) - xdu + vdy$$

$$d(f - ux) = vdy - xdu \quad (258.1)$$

Definição: transformada de Legendre de  $f(x,y)$  w.r.t.  $x$ :

$$g(u,y) = f(x,y) - ux \quad (258.2)$$

notas:  $dg = df - udx - xdu = (udx + vdy) - udx - xdu$

$$= vdy - xdu = \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial u} du$$

$$\hookrightarrow V = \frac{\partial g}{\partial y}; \quad X = \frac{\partial g}{\partial u}; \quad V = V(u,y) \leftarrow X = X(u,y)$$

i.e., Eq. (258.2) define uma mudança de variáveis  $(x,y) \rightarrow (u,y)$ !

Ex.: relação entre potenciais termodinâmicos: funções de estado, dimensão = energia;

$U, H, F, G$ .

$\hookrightarrow$  entalpia

Lembrar variáveis naturais:  $T, V, P, S$

1ª Lei:  $dU = dQ - dW$

Se processo reversível:  $dQ = TdS$  e  $dW = PdV$

$$\hookrightarrow dU = Tds - PdV = \frac{\partial U}{\partial S} ds + \frac{\partial U}{\partial V} dv \quad (258.3)$$

nesse caso:  $U = U(S, V)$  e  $T = \frac{\partial U}{\partial S}$ ;  $P = -\frac{\partial U}{\partial V}$

a energia livre de Helmholtz é definida como

$$F = U - TS \quad (219.1)$$

$$\hookrightarrow dF = dU - TdS - SdT = (TdS - PdV) - TdS - SdT$$

$$= -SdT - PdV = \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial V} dV$$

nesse caso:  $F = F(T, V)$  e  $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ ;  $P = -\frac{\partial F}{\partial V}$

notas:

Eq. (218.3) : sistema termodinâmico descrito via variáveis  $(S, V)$

Eq. (219.1) : " " " " "  $(T, V)$

a energia livre de Gibbs é definida como

$$G = H - TS = U + PV - TS = F + PV \quad (219.2)$$

$$\hookrightarrow dG = dF + PdV + VdP = (-SdT - PdV) + PdV + VdP$$

$$= -SdT + VdP = \frac{\partial G}{\partial T} dT + \frac{\partial G}{\partial P} dP$$

nesse caso:  $G = G(T, P)$  e  $S = -\frac{\partial G}{\partial T}$ ;  $V = \frac{\partial G}{\partial P}$

notas:

Eq. (219.3) : sistema termodinâmico descrito via variáveis  $(T, V)$

Eq. (219.2) : " " " " "  $(T, P)$

Eqs. (219.1) e (219.2) : transformadas de Legendre.

219.1

· sobre a função Hamiltoniana,

hipótese: vínculos holonômicos (pg. 368)

e forças monogênicas (pg. 185)

notação:  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  : variáveis independentes

consideram sistema com  $n$  graus de liberdade.

como  $L = L(q, \dot{q}, t)$

$\hookrightarrow dL = \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt$  : soma sob  
índices repetidos!

como  $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$  : momento canonicamente conjugado

$$\textcircled{1} \text{ Eq. de Lagrange : } \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

$$\hookrightarrow \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\hookrightarrow dL = \dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (220.1)$$

considerar função Hamiltoniana  $H = H(q, p, t)$  definida como

$$H(q, p, t) = \dot{q}_j p_j - L(q, \dot{q}, t) \quad (220.2)$$

$$\hookrightarrow dH = \dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - dL$$

$$\stackrel{(220.3)}{=} \dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j - (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt)$$

$$= \dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (220.3)$$

pon outro lado,

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (220.4)$$

comparando (220.3) e (220.4) :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{In eqs. diferenciais } \frac{d}{dt} \text{ ondem :} \\ \text{Eqs. de Hamilton} \\ (\text{eqs. canônicas de movimento}) \end{array} \quad (220.5)$$

notar :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\textcircled{+} \text{ Eq. (220.5) : } \frac{dH}{dt} = -\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (221.1)$$

i.e.,  $H$  depende  $t$  apenas explicitamente  
not implicitamente via  $q_j$  e  $p_j$

$$\text{se } L = L(q_j, \dot{q}_j) \rightarrow H = H(q_j, p_j) \rightarrow \frac{dH}{dt} = 0, \text{i.e.,}$$

$H = \text{ctc}$  de movimento!

Obs.:  $H = \text{função energia h definida em (210.3), entretanto}$   
 $h = h(q_j, \dot{q}_j, t)$  enquanto  $H = H(q_j, p_j, t)$ !

Resumo: sistema  $n$  graus de liberdade,

- formalismo  $n$  eqs. de movimento 2ª ordem;

Lagrangeano:  $2n$  condições iniciais;

estado do sistema:  $q_1, q_2, \dots, q_n$ :

pto no espaço de configurações.

- formalismo  $2n$  eqs. de movimento 1ª ordem

Hamiltoniano:  $2n$  condições iniciais;

estado do sistema:  $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ :

pto no espaço de fase.

Obs.:  $q_j$  e  $p_j$ : variáveis canonicamente conjugadas

(veja P 7.30, Marion)

Ex. 1 : oscilação harmônica 1-2 : partícula massa  $m$   
sob potencial  $U = \frac{1}{2} kx^2$ ,  $k = \text{cte} > 0$ ;

determinar Hamiltoniana e eqs. de Hamilton.

coordenada generalizada :  $x$

$$L = L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

momento canonicamente conjugado :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \dot{x} = p/m \quad (222.1)$$

$$\text{Eq. (220.2)} : H(x, p) = \dot{x}p - L = \frac{p^2}{m} - \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{p}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} kx^2 \right)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \quad (222.2)$$

eqs. canônicas de movimento (220.5).

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p/m : \text{OK c/ (222.1)}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = kx$$

$$\hookrightarrow \dot{p} = m\dot{x} = kx \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 ; \omega_0 = \sqrt{k/m} : \text{eq. de mov. O.H. !}$$

Ex. 2 : partícula massa  $m$  sob potencial central  $U = U(r)$ ;  
determinar Hamiltoniana e eqs. de Hamilton.

coord. generalizadas = coord. esféricas  $(r, \theta, \phi)$ ,

$$\text{i.e., } L = L(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (n^2 + n^2 \dot{\theta}^2 + n^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(n)$$

momentos canonicamente conjugados:

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{n}} = m \dot{n} \rightarrow \dot{n} = p_n/m$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m n^2 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = p_\theta / m n^2 \quad (223.1)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m n^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = p_\varphi / m n^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{Eq. (220.2)} : H = q_j p_j - L = \dot{n} p_n + \dot{\theta} p_\theta + \dot{\varphi} p_\varphi - L$$

$$= \frac{p_n^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m n^2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{2} m \left( \frac{p_n^2}{m^2} + n^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 n^4} + \frac{n^2 \sin^2 \theta}{m^2 n^4} \frac{p_\varphi^2}{\sin^4 \theta} - U \right)$$

$$\hookrightarrow H = \frac{p_n^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m n^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m n^2 \sin^2 \theta} + U(n) \quad (223.2)$$

cgs. canônicas de movimento (220.5),

$$\dot{n} = \frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{p_n}{m} \rightarrow p_n = m \dot{n}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m n^2} \rightarrow p_\theta = m n^2 \dot{\theta} \quad : \text{ok c/ (223.1)}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m^2 n^2 \sin^2 \theta} \rightarrow p_\varphi = m n^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

$$\dot{p}_n = - \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{p_\theta^2}{m n^3} + \frac{p_\varphi^2}{m n^3 \sin^2 \theta} - \frac{dU}{dn}$$

$$\dot{p}_\theta = - \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\theta^2}{m n^2 \sin^3 \theta} \cos \theta$$

$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi : \text{cte de movimento :}$   
 $\varphi \text{ é variável cíclica !}$

alternativa: como  $\vec{e} = \vec{n} \times \vec{p} = \text{cte de movimento}$   
 $\hookrightarrow$  movimento plano  $\hookrightarrow$  a  $\vec{e}$

coord. generalizadas = coord. polares  $r$  e  $\theta$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r) = L(r, \dot{r}, \dot{\theta})$$

momentos canonicamente conjugados,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \rightarrow \dot{r} = p_r/m$$

(224.1)

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = p_\theta / m r^2$$

Eq. (220.2) :

$$H = \dot{q}_j p_j - L = \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta - L$$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m r^2} - \frac{1}{2} m \left( \frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} \right) + U(r)$$

$$\hookrightarrow H = H(r, p_r, p_\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r)$$

eqs. canônicas de movimento (220.5),

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r/m \rightarrow p_r = m \dot{r}$$

: ok c/ (224.1)

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = p_\theta / mr^2 \rightarrow p_\theta = mr^2 \dot{\theta}$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{p_\theta^2}{mn^3} - \frac{du}{dn}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \rightarrow p_\theta = \text{cte de movimento:} \\ \theta \text{ é variável cíclica}$$

notam:

$$(i) p_\theta = mn^2\dot{\theta} = \ell z = \ell = \text{cte de movimento} \quad (225.1)$$

$$(ii) \dot{p}_n = \frac{p_\theta^2}{mn^3} - \frac{du}{dn} = m\ddot{n} = \frac{\ell^2}{mn^3} - \frac{du}{dn}$$

: comparar

$$\hookrightarrow m\left(\ddot{n} - \frac{\ell^2}{m^2n^3}\right) = m\underbrace{\left(\ddot{n} - \dot{n}\dot{\theta}^2\right)}_{a_n} = -\frac{du}{dn} \quad \text{discussão pg. 60.}$$

Eq. (225.1)

Ex. 3: partícula massa  $m$ , carga  $q$  sob campo EM; determinar a Hamiltoniana.

coord. generalizadas = coord. cartesianas  $n_i : x, y, z$

$$\text{Eq. (216.1): } L = \frac{1}{2}mv_i v_i - q\phi(\vec{n}, t) + qv_i A_i(\vec{n}, t)$$

momentos canonicamente conjugados,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{n}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + qA_i \rightarrow v_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$$

$$\hookrightarrow vetorialmente: \vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad e \quad \vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A})$$

$$\text{Eq. (220.2): } H = \dot{q}_j p_j - L = \dot{n}_i p_i - L$$

$$= v_i p_i - L$$

$$= \frac{1}{m} (p_i - qA_i) p_i - \frac{1}{2} m \frac{1}{m^2} (p_i - qA_i)(p_i - qA_i)$$

$$+ q\varphi - q \frac{1}{m} (p_i - qA_i) A_i$$

$$= \frac{1}{m} (p_i - qA_i)(p_i - qA_i) - \frac{1}{2m} (p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\varphi$$

$$\hookrightarrow H = \frac{1}{2m} (p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\varphi$$

$$= \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\varphi \quad (226.1)$$

• Hamiltoniano v.s. energia,

ideia: determinar a relação entre  $\underline{H}$  e  $\underline{E}$ .

Vimos que a energia cinética assume a forma, pg. 209,

$$T = a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + b_j \dot{q}_j + c \quad : \text{soma sobre indices repetidos} \quad (226.2)$$

$$= T_2 + T_1 + T_0 ; \quad T_n \propto (\dot{q}_j)^n$$

$\hookrightarrow$  em geral, temos que

$$L = L_0(q_j, t) + L_1(q_j, \dot{q}_j, t) + L_2(q_j, \dot{q}_j, t) ; \quad L_n \propto (\dot{q}_j)^n$$

notar,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = a_{jk} \dot{q}_k + a_{je} q_j + b_e$$

$$\hookrightarrow \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = a_{xx} \dot{q}_x \dot{q}_x + a_{yy} \dot{q}_y \dot{q}_y + b \dot{q}_z = 2T_2 + T_1 \quad (227.1)$$

• hipótese:  $U = U(q_j, t)$

$$\hookrightarrow L = L_2 + L_1 + L_0 \quad (227.1.0)$$

$$\text{Eq. (227.1)}: \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 2L_2 + L_1 = \dot{q}_j p_j$$

$$\text{Eq. (220.2)}: H = \dot{q}_j p_j - L$$

$$= (2L_2 + L_1) - (L_2 + L_1 + L_0) = L_2 - L_0$$

\* se eq. de transformação coord. cartesianas  $\rightarrow$  coord. generalizadas

$$\vec{n}_i = \vec{n}_i(q_j)$$

$$\hookrightarrow b_j = c = 0 \rightarrow L_2 = T_2; L_1 = 0; L_0 = -U$$

$$\hookrightarrow H = L_2 - L_0 = T + U = E \quad (227.1)$$

\* se  $U = U(q_j) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{dH}{dt} = 0 \rightarrow H: \text{cte de movimento!}$

Ex. 1: oscilador harmônico 1-D, veja pg. 222,

coord. generalizado:  $x \quad (227.2)$

momento canonicamente conjugado:  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

como sistema conservativo  $\oplus$  (227.2):

$$\hookrightarrow H = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2 : \text{Eq. (222.2) !}$$

Ex. 2: partícula massa  $m$  sob potencial central  $U = U(r)$ ,  
veja pg. 222,

coord. generalizadas = coord. esféricas ( $r, \theta, \varphi$ )

momentos canonicamente conjugados:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} ; \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} ; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

como sistema conservativo e a relação entre  $(x, y, z)$  e  $(r, \theta, \varphi)$  é t- independente

$$\hookrightarrow H = T + U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + U(r)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2 \sin^2 \theta} + U(r) : \text{Eq. (223.2) !}$$

Em resumo: se sistema conservativo e  $\vec{n}_i = \vec{n}_i(q_j)$

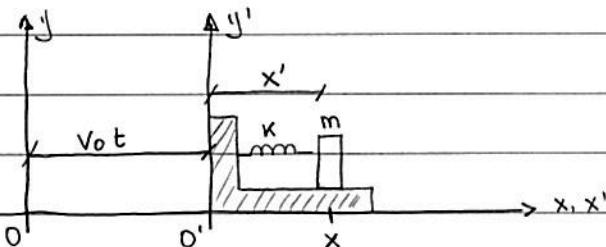
$\hookrightarrow H = E = \text{cte de movimento}$

entretanto, os seguintes casos são possíveis:

•  $H = E$  e  $H \neq \text{cte de movimento}$

•  $H \neq E$  e  $H = \text{cte de movimento}$

Ex. 3 : sistema massa-mola sob plataforma, velocidade  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$  w.r.t. REF 0 ; determinar Hamiltoniana p/ REFs 0 e 0'.



$$\text{notas: } x = x' + v_0 t$$

REF. 0 (LAB) : coord. generalizada :  $x$

$$L = L(x, \dot{x}, t) = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x'^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2$$

$$\hookrightarrow \text{momento canonicamente conjugado: } p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \rightarrow \dot{x} = p/m$$

$$\hookrightarrow H = \dot{x}p - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} m \left( \frac{p}{m} \right)^2 + \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2 = T + U = E \quad (229.1)$$

$$\text{neste caso: } \frac{dH}{dt} = k(x - v_0 t)(-v_0) = -k(x - v_0 t) \cdot \underbrace{v_0}_{\text{constante}}$$

$F_{ext} \sim$  movimento uniforme  
platoforma !

$\hookrightarrow H = E$  e  $H \neq$  cte de movimento

REF 0' (PLATAFORMA) : coord. generalizada :  $x'$

$$L = L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 - \frac{1}{2} k x'^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}' + v_0)^2 - \frac{1}{2} k x'^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 + m v_0 \dot{x}' + \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} k x'^2$$

$\hookrightarrow$  notar termo linear  $\dot{x}' \sim$  termo Ls Eq.(227.1.0) !

↳ momento canonicamente conjugado:  $p' = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' + mv_0$

$$\Rightarrow \dot{x}' = \frac{1}{m} p' - v_0$$

$$\Rightarrow H = \dot{q}p - L = \dot{x}'p' - L = p'\left(\frac{1}{m}p' - v_0\right) - \frac{1}{2}m\left(\frac{p'}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}Kx'^2$$

$$H = \underbrace{\frac{p'^2}{2m}}_{E} + \frac{1}{2}Kx'^2 - p'v_0 \quad (230.1)$$

$$E = T + U \text{ p/ REF. O'}$$

↳  $H \neq E$  e  $H = \text{cte}$  de movimento pois  $L = L(x', \dot{x}')$ .

Exercício: determinar eqs. canônicas de movimento p/ (229.1) e (230.1).

Ex. 4: partícula massa  $m$  sob  $\vec{F} = -K\hat{n}$ ,  $K = \text{cte}$ , movimento sob superfície cilíndrica radio  $R$ ; determinar Hamiltoniana e eqs. de Hamilton.

Vimos que, pg. 188; coord. generalizadas =  
= coord. cilíndricas  $\varphi$  e  $z$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}K(R^2 + z^2)$$

momentos canonicamente conjugados:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = p_\varphi/mR^2$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = mz \rightarrow \dot{z} = p_z/m$$

como sistema conservativo,  $U = U(z)$ , e relação entre  $(x, y, z)$  e  $(p, \varphi, z)$  é t- independente

$$\hookrightarrow H = T + U$$

$$H = \frac{1}{2} m R^2 \left( \frac{p_\theta}{m R^2} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{p_z}{m} \right)^2 + \frac{1}{2} K (R^2 + z^2)$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} K (R^2 + z^2)$$

nesse caso:  $H = E = \text{cte}$  de movimento!

eqs. canônicas de movimento (220.5).

$$\dot{p}_\theta = - \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\theta = \text{cte}$$

$$\dot{p}_z = - \frac{\partial H}{\partial z} = -Kz$$

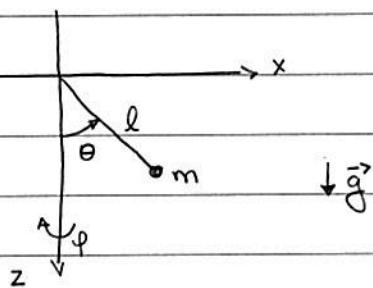
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m R^2} \rightarrow p_\theta = m R^2 \dot{\varphi} = Kz = \text{cte de movimento}$$

$\sim \varphi$  é variável cíclica!

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \rightarrow p_z = m \dot{z}$$

$$\hookrightarrow \dot{p}_z = m \ddot{z} = -Kz \rightarrow \ddot{z} + \frac{K}{m} z = 0$$

Ex. 5, Ex. 7.12, Marion; pêndulo esférico: partícula massa  $m$   $\oplus$   
haste (sem massa) comprimento  $l$ , sob  $\vec{F}_g$ ; determinar  
Hamiltonia e eqs. de Hamilton.



coord. generalizadas = coord. esféricas  $(n, \theta, \varphi)$   
 vinculo:  $n = l$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(n^2 + n^2\dot{\theta}^2 + n^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

$$U = -mg\ell\cos\theta$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + mg\ell\cos\theta : \text{notar } \varphi \text{ é variável cíclica}$$

momentos canonicamente conjugados:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = p_\theta/m\ell^2$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = p_\varphi/ml^2\sin^2\theta$$

como sistema conservativo e relação entre  $(x, y, z)$  e  $(n, \theta, \varphi)$  é t-independente

$$\hookrightarrow H = T + U = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m\ell^2} + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{ml^2\sin^2\theta} - mg\ell\cos\theta$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mg\ell\cos\theta$$

eqs. canônicas de movimento (220.5),

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mg\ell\sin\theta + \frac{p_\varphi^2}{ml^2\sin^3\theta}\cos\theta \quad (232.1)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = \text{cte} \quad (232.2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{m l^2} \rightarrow p_{\theta} = m l^2 \dot{\theta} \quad (233.1)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{p_{\varphi}}{m l^2 \sin^2 \theta} \rightarrow p_{\varphi} = m l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (233.2)$$

Lembrem que, veja pg. 208.

$$\vec{l} = \vec{n} \times \vec{p} = m l^2 \dot{\theta} \hat{\varphi} - m l^2 \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\theta} = l_x \hat{x} + l_y \hat{y} + (m l^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) \hat{z}$$

$$\Rightarrow p_{\theta} = l \dot{\varphi} \text{ e } p_{\varphi} = l \dot{z} = \text{cte de movimento}$$

Eqs. (232.1), (233.1) e (233.2),

$$\ddot{\theta} + g/l \sin \theta - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (233.3)$$

se  $\varphi = \text{cte} \rightarrow \dot{\varphi} = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + g/l \sin \theta = 0$  : eq. de movimento  
pêndulo simples

alternativa (233.3) :

$$m l^2 \ddot{\theta} = - m g l \sin \theta + \frac{p_{\varphi}^2}{m l^2 \sin^3 \theta} \cos \theta \quad (233.4)$$

se  $\theta = \theta_0$  (pêndulo cônico)

$\Rightarrow m^2 l^3 \sin^4 \theta_0 = p_{\varphi}^2 \cos \theta_0$  : relação entre  $\theta_0$ ,  $p_{\varphi}$  e  
parâmetros do sistema  $m, l$

(233.5)

$\theta = \theta_0 + \text{Eq. (233.3)}$  :

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{g/l}{\cos \theta_0} = \frac{\omega_0^2}{\cos \theta_0} : \text{frequência movimento circular}$$

$$\text{Eq. (233.5)} : \cos \theta_0 = \frac{m^2 g l^3 \sin^4 \theta_0}{P_p^2} > 0 \rightarrow 0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$$

vamos verificar a estabilidade do movimento circular,

$$\text{se } \theta = \theta_0 + \epsilon, \epsilon / \theta_0 \ll 1$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \sin(\theta_0 + \epsilon) \approx \sin \theta_0 + \epsilon \cos \theta_0$$

$$\cos \theta = \cos(\theta_0 + \epsilon) \approx \cos \theta_0 - \epsilon \sin \theta_0$$

$$\text{Verifica-se que [exercício]} : \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \approx \frac{\cos \theta_0}{\sin^3 \theta_0} - \frac{\epsilon (1 + 2 \cos^2 \theta_0)}{\sin^4 \theta_0}$$

Exercício → Eq. (233.3) :

$$\ddot{\epsilon} + \underbrace{\frac{1}{m \epsilon^2} \left( m g \cos \theta + \frac{P_p^2}{m \epsilon^2 \sin^4 \theta_0} (1 + 2 \cos^2 \theta_0) \right) \epsilon}_{\bar{\omega}^2} + \underbrace{\left( \frac{g \sin \theta_0 - P_p^2 \cos \theta_0}{m^2 l^4 \sin^3 \theta_0} \right)}_{=0} \approx 0$$

Verifica-se que :  $\bar{\omega}^2 = \frac{\omega_0^2}{\cos \theta_0} (1 + 3 \cos^2 \theta_0)$  : frequência  
 [exercício]  $\omega_0$  pequenas oscilações  
 angulares em torno  
 $\theta = \theta_0$

Obs. : pt discussão em termos energia, veja Sec. 9.7, Symon.

Ex. 6: partícula massa  $m$  e carga  $q$  sob campo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ ; determinar Hamiltoniana

Vimos que, pg. 216,

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + qA_i \rightarrow \vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A} \rightarrow \vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A})$$

$$\text{Eq. (220.2)}: H = \dot{q}_j p_j - L = \dot{v}_i p_i - L = v_i p_i - L$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow H &= p_i \frac{1}{m} (p_i - qA_i) - \frac{1}{2} m \frac{1}{m^2} (p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\varphi - qv_i A_i \\ &\quad - \frac{qA_i p_i}{m} + \frac{qA_i p_i}{m} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2m} (p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\varphi$$

$$= \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\varphi$$

(234.1)