

Radiação de cargas em movimento.

Refs.: Secs. 14.1 - 14.3 ; 14.5 - 14.6 e 14.8, Jackson (Gaussiano)
Secs. 23.1 - 23.4, Zangwill (S.I.)

Lembrar discussão anterior: radiação devido distribuição de
cargas $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ e/ou correntes
 $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$;

próxima etapa: descrição radiação ~ carga pontual em
movimento.

↳ ideia: determinar características radiação em termos
trajetória partícula

Lembrar: solução particular (retardada) eqs. de Maxwell
não-homogênea, Eq. (58.2) (sistema Gaussiano)

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{x}' dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - \left(t - |\vec{r} - \vec{x}'|/c\right)\right) \rho(\vec{x}', t')$$

(257.1)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}'|} \delta\left(t' - \left(t - |\vec{r} - \vec{x}'|/c\right)\right) \vec{J}(\vec{x}', t')$$

Lembrar discussão anterior sobre radiação: expansão
potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ na região de radiação!

considerar: partícula carga e , trajetória (conhecida) $\vec{r} = \vec{r}(t)$;
nesse caso, temos que

$$\text{Eq. (40.3)} : \rho = \rho(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{r}(t))$$

(257.2)

$$\text{Eq. (41.1)} : \vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t) = e \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) ; \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

próxima etapa: determinar potenciais escalares e vetores
p/ densidades (257.2).

Obs.: discussão Sec. 14.1, Jackson: formulação covariante
" abaixo : " não-covariante
(veja Sec. 23.2, Zangwill)

• Potenciais de Liénard-Wiechert,

• sobre o potencial escalar,

Eqs. (257.1) e (257.2):

$$\Phi(\vec{x}, t) = e \int d^3x' dt' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' - t + |\vec{x} - \vec{x}'|/c) \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t'))$$

$$= e \int dt' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \delta(t' - t + |\vec{x} - \vec{r}(t')|/c) \quad (258.1)$$

Lembrando identidade $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}$; x_i : zeros $f = f(x)$
pg. 4.2 :

aqui: $f(t') = t' - t + |\vec{x} - \vec{r}(t')|/c$

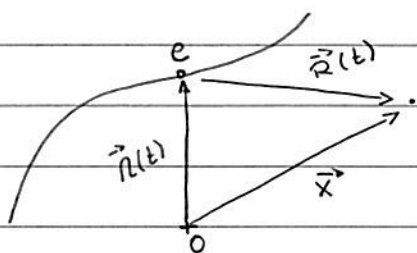
$$f(t' = t_n) = 0 \rightarrow c(t - t_n) = |\vec{x} - \vec{r}(t_n)| \quad (258.2)$$

onde t_n : tempo retardado

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{df}{dt'} &= 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |\vec{x} - \vec{r}(t')| = 1 + \frac{1}{c} \sum_i \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\sum_j (x_j - r_j)^2 \right)^{1/2} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial t'} \\ &= 1 - \frac{1}{c} \sum_i \frac{(x_i - r_i) v_i}{|\vec{x} - \vec{r}|^2} = 1 - \frac{\vec{v} \cdot (\vec{x} - \vec{r}(t))}{c |\vec{x} - \vec{r}(t)|} \end{aligned}$$

definição : $\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{r}(t)$

$$\hat{n}(t) = \vec{R}(t) / R(t)$$



$$\hookrightarrow \frac{df}{dt} = 1 - \vec{\beta}(t') \cdot \hat{n}(t') ; \quad \text{obs. : } v < c \rightarrow 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} > 0 !$$

$$\hookrightarrow \delta(f(t')) = \frac{\delta(t' - t_R)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})|_{t'=t_R}}$$

Dessa forma,

$$\Phi(\vec{x}, t) = e \int dt' \frac{1}{R(t')} \cdot \frac{\delta(t' - t_R)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})|_{t'=t_R}}$$

$$= \frac{e}{R(t') (1 - \vec{\beta}(t') \cdot \hat{n}(t'))} \Big|_{t'=t_R} \equiv \left| \frac{e}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right|_{\text{RET}} \quad (259.1)$$

• de modo análogo p/ o potencial vetor,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e}{c} \int d^3x' dt' \frac{\vec{V}(t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' - t + |\vec{x} - \vec{x}'|/c) \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t'))$$

$$= \frac{e}{c} \int dt' \frac{\vec{V}(t')}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \delta(t' - t + |\vec{x} - \vec{r}(t')|/c) \quad (259.2)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e}{c} \int dt' \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \cdot \frac{\delta(t' - t_n)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})|_{t'=t_n}}$$

$$= \frac{e \vec{\beta}(t')}{R(t') (1 - \vec{\beta}(t') \cdot \hat{n}(t'))} \Big|_{t'=t_n} = \left[\frac{e \vec{\beta}}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{\text{RET}} \quad (260.1)$$

Eqs. (259.1) e (260.1): potenciais de Liénard-Wiechert

sobre o tempo retardado t_n .

t_n : solução Eq. (258.2) p/ t e $\vec{x}$ fixos;

se $x_0 = ct$ e $n_0 = ct_n$, temos que

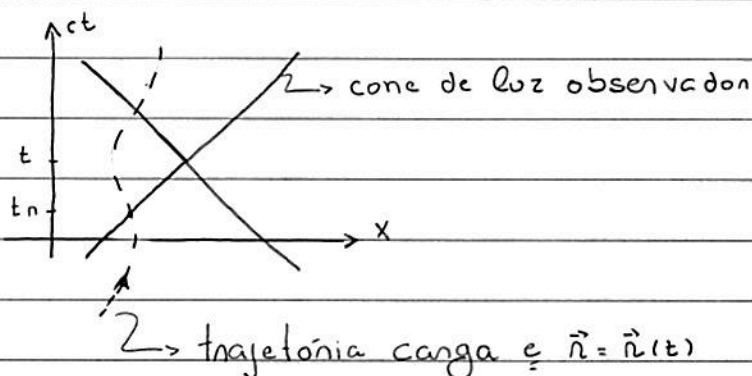
$$c^2(t - t_n)^2 = \sum_i (x_i - n_i)^2 \rightarrow (x_0 - n_0)^2 - \sum_i (x_i - n_i)^2 = 0$$

ou $(x^\mu - n^\mu)(x_\mu - n_\mu) = 0$: intervalo tipo-luz, i.e.,

eventos $(ct_n, \vec{n}(t_n))$ e $(ct, \vec{x})$

conectados por sinal de luz;

esquematicamente:



notar: $\vec{n} = \vec{n}(t) \cap$ cone de luz observador: 2 pto's;

como $t_n < t \rightarrow$ solução Eq. (258.2) é única!

próxima etapa: determinação campos $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$;

como $\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}(\vec{x}, t)$

e $\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t)$,

em princípio, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ podem ser determinados a partir das
Eqs. (259.1) e (260.1);

entretanto, vamos considerar um procedimento alternativo:

Eqs. (258.1) e (259.2):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \int dt' \frac{e}{R(t')} \delta(t' - t + R(t')/c) +$$

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t \int dt' \frac{e \vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t' - t + R(t')/c) ; \quad \vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{r}(t)$$

como: (i) $\vec{\nabla} \frac{1}{x} = -\frac{\hat{x}}{x^2} \rightarrow \vec{\nabla} \frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3} = -\frac{\hat{n}}{R^2} = -\frac{\hat{n}(t)}{R^2(t)}$

e (ii) $\vec{\nabla} \delta(t' - t + R(t')/c) = -\hat{n}(t') \partial_t \delta(t' - t + R(t')/c) \quad (261.1)$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{x}, t) = e \int dt' \frac{\hat{n}(t')}{R^2(t')} \delta(t' - t + R(t')/c) +$$

$$+ e \partial_t \int dt' \frac{\hat{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{c R(t')} \delta(t' - t + R(t')/c)$$

de modo análogo à Eq. (259.1), temos que,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \left[\frac{e \hat{n}}{R^2(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{\text{RET}} + \frac{d}{dt} \left[\frac{c(\hat{n} - \vec{\beta})}{c R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{\text{RET}} \quad (261.2)$$

Lembran: $\hat{n} = \hat{n}(t')$; $R = R(t')$ e $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t')$;
 $[...]_{RET}$ indica $t' = t_n$!

• de modo análogo p/ o campo magnético,

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{e}{c} \vec{\nabla} \times \int dt' \frac{\vec{v}(t')}{R(t')} \delta(t' - t + R(t')/c) \\ &= -\frac{e}{c} \int dt' \vec{v}(t') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + R(t')/c) \right) \\ &\quad \underbrace{\delta(\dots) \vec{\nabla} \frac{1}{R}}_{-\hat{n}/R^2} + \underbrace{\frac{1}{R} \vec{\nabla} \delta(\dots)}_{-\hat{n}/c \partial_t \delta(\dots)} \\ &= \frac{e}{c} \int dt' \frac{\vec{v}(t') \times \hat{n}(t')}{R^2(t')} \delta(t' - t + R(t')/c) + \\ &\quad + \frac{e}{c} \int dt' \frac{\vec{v}(t') \times \hat{n}(t')}{c R(t')} \partial_t \delta(t' - t + R(t')/c)\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{e}{c} \left[\frac{\vec{v} \times \hat{n}}{R^2(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{RET} + \frac{e}{c} \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{v} \times \hat{n}}{c R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{RET} \quad (262.1)$$

verifica-se que (veja abaixo), os campos (261.2) e (262.1) podem ser escritos como:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = e \left[\frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{r^2 R^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \right]_{RET} + \frac{e}{c} \left[\frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta})}{R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \right]_{RET}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = [\hat{n}]_{RET} \times \vec{E}(\vec{x}, t) \quad : \text{campos de Liénard-Wiechert} \quad (262.2)$$

$$= \hat{n}(t_n) \times \vec{E}(\vec{x}, t)$$

• sobre identidade (261.1),

$$\delta(t' - t + R(t')/c) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega(t' - t + R(t')/c))$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \delta(\dots) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega(t' - t + R(t')/c)) (-i\omega) \underbrace{\vec{\nabla} R(t')}_{\hat{n}(t')}$$

$$= -\frac{\hat{n}(t')}{c} \partial_t \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega(t' - t + R(t')/c))$$

• vamos verificar Eqs. (262.2),

notar:

$$\cdot \frac{dR}{dt} = \frac{\partial R}{\partial n_i} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t} = v_i \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\sum_j (x_j - n_j)^2 \right)^{1/2} = -\frac{v_i (x_i - n_i)}{R}$$

$$= -\vec{v}(t) \cdot \hat{n}(t) = -c \vec{\beta} \cdot \hat{n}$$

$$\cdot \text{Eq. (258.2)}: t = t_n + \frac{R(t_n)}{c} \rightarrow \frac{dt}{dt_n} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t_n)}{dt_n}$$

$$\hookrightarrow \frac{dt}{dt_n} = 1 - \vec{\beta}(t_n) \cdot \hat{n}(t_n) = [1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}]_{\text{RET}} \quad (262.2.1)$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} = \frac{dt_n}{dt} \frac{d}{dt_n} = \frac{1}{[1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}]_{\text{RET}}} \frac{d}{dt_n}$$

$$\cdot \frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{R}}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{1}{R^2} \vec{R} \frac{dR}{dt}$$

$$= \frac{1}{R^2} \vec{R} (-c) \vec{\beta} \cdot \hat{n} = -\frac{c}{R} (\vec{\beta} \cdot \hat{n}) \hat{n}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_j (x_j - r_j) \hat{e}_j = \frac{d}{dn_i} \sum_j (x_j - r_j) \hat{e}_j \frac{dn_i}{dt} = -\vec{v}$$

$$\hookrightarrow \frac{d\hat{n}}{dt} = \frac{1}{R} \left(c \hat{n} (\vec{\beta} \cdot \hat{n}) - \vec{v} \right) = \frac{c}{R} \left(\hat{n} (\vec{\beta} \cdot \hat{n}) - \vec{\beta} \right)$$

$$\cdot \frac{d(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})}{dt} = -\dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{n} - \vec{\beta} \cdot \frac{d\hat{n}}{dt} = -\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \frac{c}{R} (\beta^2 - (\vec{\beta} \cdot \hat{n})^2)$$

$\hookrightarrow$ segundo termo Eq. (261.2),

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{cR(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{\text{RET}} = \frac{1}{c[1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}]_{\text{RET}}} \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{\text{RET}} \quad (262.3)$$

(I)

$$(I) = \frac{1}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \left(\frac{c}{R} (\hat{n} (\vec{\beta} \cdot \hat{n}) - \vec{\beta}) - \dot{\vec{\beta}} \right) -$$

$$- \frac{(\hat{n} - \vec{\beta})}{R^2(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} (-c\vec{\beta} \cdot \hat{n}) - \frac{(\hat{n} - \vec{\beta})}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \left(-\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} + \frac{c}{R} (\beta^2 - (\vec{\beta} \cdot \hat{n})^2) \right)$$

$$= \frac{1}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \left(\underbrace{(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\hat{n} - \vec{\beta}) - \dot{\vec{\beta}}(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})}_{(II)} + \right.$$

(II)

$$+ \frac{c}{R^2(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \left((\hat{n} - \vec{\beta})(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} - \beta^2) + (\hat{n}(\vec{\beta} \cdot \hat{n}) - \vec{\beta})(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) \right. \\ \left. + \underbrace{(\hat{n} - \vec{\beta})(\vec{\beta} \cdot \hat{n})(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})}_{(III)} \right)$$

(III)

$$\text{como } (II) = (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})(\hat{n} - \vec{\beta}) - \dot{\vec{\beta}}(\hat{n} \cdot (\hat{n} - \vec{\beta}))$$

$$= \hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})$$

$$\begin{aligned}
c \text{ (III)} &= (\hat{n} - \vec{\beta}) \left((\hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 - \beta^2 - (\hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 + (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) \right) \\
&+ \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) - \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 - \vec{\beta} + \vec{\beta} (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) \pm \hat{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2 \\
&\quad \hat{n} (1 - 2(\vec{\beta} \cdot \hat{n}) + (\vec{\beta} \cdot \hat{n})^2) \\
&= (\hat{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2 + (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) - (\hat{n} \cdot \vec{\beta})) - \hat{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2 \\
&= \frac{1}{r^2} (\hat{n} - \vec{\beta}) - \hat{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{L} \text{ (I)} &= \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} + \frac{c}{R^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \left(\frac{1}{r^2} (\hat{n} - \vec{\beta}) - \hat{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2 \right) \\
&\quad (262.4)
\end{aligned}$$

Eqs. (262.2) $\oplus$ (262.3) $\oplus$ (262.4) :

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t) &= \left[\frac{e \hat{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2}{R^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \right]_{\text{RET}} + \frac{e}{c} \left[\frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \right]_{\text{RET}} \\
&+ \left[\frac{e}{R^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \left(\frac{1}{r^2} (\hat{n} - \vec{\beta}) - \hat{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2 \right) \right]_{\text{RET}} : \text{Eq. (262.2)}
\end{aligned}$$

de modo análogo, podemos determinar o campo magnético a partir de (262.1) ;

segundo termo Eq. (262.1),

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{v} \times \hat{n}}{c R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{\text{RET}} = \frac{1}{[1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}]_{\text{RET}}} \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{\vec{\beta} \times \hat{n}}{R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right]_{\text{RET}}}_{\text{(I)}} \quad (262.5)$$

$$\text{(I)} = \frac{1}{R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \left(\dot{\vec{\beta}} \times \hat{n} + \frac{c}{R} \vec{\beta} \times (\hat{n} (\vec{\beta} \cdot \hat{n}) - \vec{\beta}) \right) -$$

$$= \frac{1}{R^2} \frac{(\vec{\beta} \times \hat{n})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \cdot (-c \vec{\beta} \cdot \hat{n}) - \frac{(\vec{\beta} \times \hat{n})}{R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \left(-\hat{n} \cdot \vec{\beta} + \frac{c}{R} (\beta^2 - (\vec{\beta} \cdot \hat{n})^2) \right)$$

$$= \frac{1}{R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \underbrace{\left((\vec{\beta} \times \hat{n}) (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{\beta} \times \hat{n}) (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) \right)}_{(II)}$$

$$+ \frac{c}{R^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \underbrace{\left(\vec{\beta} \times \hat{n} (\vec{\beta} \cdot \hat{n}) \cdot 2 \cdot (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) - \vec{\beta} \times \hat{n} (\beta^2 - (\vec{\beta} \cdot \hat{n})^2) \right)}_{(III)}$$

notan:

$$\begin{aligned} \cdot \hat{n} \times \left(\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \right) &= \hat{n} \times \left((\hat{n} \cdot \vec{\beta}) (\hat{n} - \vec{\beta}) - (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} \right) \\ &= (\vec{\beta} \times \hat{n}) (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{\beta} \times \hat{n}) (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) = (II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot (III) &= (\vec{\beta} \times \hat{n}) \left(2(\vec{\beta} \cdot \hat{n}) - (\vec{\beta} \cdot \hat{n})^2 - \beta^2 \right) \pm (\vec{\beta} \times \hat{n}) (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 \\ &= (\vec{\beta} \times \hat{n}) (1 - \beta^2) - (\vec{\beta} \times \hat{n}) (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow (I) &= \frac{\hat{n} \times \left(\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \right)}{R (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2} + \frac{c}{R^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2} \left(\frac{1}{r^2} (\vec{\beta} \times \hat{n}) - \right. \\ &\quad \left. - (\vec{\beta} \times \hat{n}) (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 \right) \quad (262.6) \end{aligned}$$

Eqs. (262.1) $\oplus$ (262.5) $\oplus$ (262.6):

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \left[\frac{e(\vec{\beta} \times \hat{n})(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2}{R^2(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{\text{RET}} + \frac{e}{c} \left[\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}))}{R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{\text{RET}}$$

$$+ \left[\frac{e}{R^2(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \left(\frac{1}{r^2} (\vec{\beta} \times \hat{n}) - (\vec{\beta} \times \hat{n})(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 \right) \right]_{\text{RET}} : \text{Eq. (262.2)}$$

notar: podemos escrever

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_v(\vec{x}, t) + \vec{E}_a(\vec{x}, t),$$

onde: E_v : "campo de velocidade"; $E_v \sim 1/R^2$: termo
quasi-estático

E_a : "campo de aceleração"; $E_a \sim 1/R$: termo
de radiação

similar: $\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_v(\vec{x}, t) + \vec{B}_a(\vec{x}, t)$

além disso, temos que (verificar):

$$\vec{B} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{B} \cdot \hat{n}(t_n) = 0;$$

$$\vec{E}_v \cdot \hat{n}(t_n) \neq 0 \quad \text{e} \quad \vec{E}_a \cdot \hat{n}(t_n) = 0$$

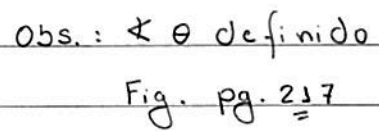
$$\hookrightarrow \vec{B}_a = [\hat{n} \times \vec{E}_a]_{RET} \quad \text{e} \quad \vec{E}_a \cdot \hat{n}(t_n) = \vec{B}_a \cdot \hat{n}(t_n) = 0, \text{ i.e.,}$$

$\hat{n}(t_n)$, $\vec{E}_a$ e $\vec{B}_a$: sistema ortogonal: veja pg. 149

notar: apenas "campos de aceleração" $\sim$ radiação EM,
pois apenas E_a e $B_a \propto 1/R$: veja Eq. (149.2)

Ex.: consideramos carga pontual e, velocidade $\vec{v} = cte$;
determinam campos $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$.
(veja discussão pgs. 217 - 219)

como $\vec{\beta} = 0$ e $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t) = cte$, Eq. (262.2)
assume a forma



$$\vec{v} = cte$$

Eq. (258.2) : $c(t-t_n) = |\vec{x} - \vec{r}(t_n)| = \bar{r}(t_n)$

como (veja Fig.) : $\vec{v}(t-t_2) + \vec{R}(t) = \vec{R}(t_2)$

$$\vec{\beta} + \frac{\vec{R}(t)}{R(t)} = \hat{n}(t) \rightarrow \hat{n}(t) - \vec{\beta} = \frac{\vec{R}(t)}{R(t)}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e}{r^2} \frac{\vec{R}(t)}{[R^3(1 - \beta \cdot \hat{n})^3]_{\text{RET}}}$$

notas (veja Fig.):

$$\bar{A}C = \left| \vec{R}(t_n) - \hat{n}(t_n) \underbrace{(\hat{n}(t_n) \cdot \vec{V}(t-t_n))}_{\vec{\beta} R(t_n)} \right| =$$

$$= \left| \hat{n}(t_n) (1 - \hat{n}(t_n) \cdot \vec{\beta}) R(t_n) \right| = [R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})]_{RET}$$

por outro lado: $(\bar{A}C)^2 = R^2(t) - (\beta R(t) \sin \alpha)^2$

como (veja Fig.) $R(t) \sin \theta = R(t_n) \sin \alpha$

$$\hookrightarrow (\bar{A}C) = R(t) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{c}{r^2 R^3(t) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \vec{R}(t) \quad : \text{Eq. (219.1)}$$

• Potência total irradiada,

ideia: determinar potência radiação emitida
~ campos de aceleração

$$\text{Eq. (262.2)} : \quad \vec{E}_a(\vec{x}, t) = \frac{c}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \left[\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) \right]_{RET}$$

vetor de Poynting (249.3) e Eq. (262.2):

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_a(\vec{x}, t) \times \vec{B}_a(\vec{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_a(\vec{x}, t) \times (\hat{n}(t_n) \times \vec{E}_a(\vec{x}, t))$$

$$= \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_a(\vec{x}, t)|^2 \hat{n}(t_n)$$

$$\hookrightarrow \frac{dP(t)}{d\Omega} = R^2(t_n) \hat{n}(t_n) \cdot \vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{c}{4\pi} R^2(t_n) |\vec{E}_a(\vec{x}, t)|^2$$

$$= \frac{c^2}{4\pi c} \left[\frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^6} |\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})|^2 \right]_{\text{RET}} \quad (266.1)$$

próxima etapa: determinar a potência total;
vamos considerar 2 casos:

(i) limite não-relativístico: $\beta \ll 1$

nesse caso, $t \approx t_n$ e

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} \approx \frac{c^2}{4\pi c} |\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2$$

$$\text{como } \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) = \hat{n}(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}$$

4 entre $\hat{n}$ e $\dot{\vec{\beta}}$

$$\hookrightarrow |\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2 = \dot{\vec{\beta}}^2 - (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 = \dot{\vec{\beta}}^2 (1 - \cos^2 \theta) = \dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \theta$$

$$\hookrightarrow \frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{c^2}{4\pi c} \dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\vec{v}}|^2 \sin^2 \theta \quad (266.2)$$

temos que

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\vec{v}}|^2 \underbrace{\int \sin \theta d\theta d\phi \sin^2 \theta}_{8\pi/3} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\dot{\vec{v}}|^2 \quad (266.3)$$

: potência total irradiada carga pontual
acelerada (não-relativística): fórmula de
Larmor

(ii) caso relativístico,

(veja abaixo)

em princípio, P pode ser determinada via $\int d\Omega$ Eq. (270.1)
entretanto, vamos seguir procedimento alternativo

↳ ideia: generalizar fórmula de Larmor (266.3) p/ caso relativístico!

- verifica-se que (veja P 12.18, Jackson) potência total P invariante sob transf. de Lorentz; (*)

- notan: Eq. (266.3) pode ser escrita como

$$P = cte \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}; \quad (267.1)$$

$$(*) \text{ e } (267.1) \rightarrow P = cte \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau} = cte \mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu \quad (267.2)$$

↳ 4-aceleração (191.1)

hipótese: caso geral P : Eq. (267.2);

Como Eq. (267.2) $\xrightarrow{\beta \ll 1}$ Eq. (266.3): determinação cte!

Lembran 4-aceleração (191.2):

$$\mathcal{D}_0 = c r^4 \vec{\beta} \cdot \ddot{\vec{\beta}}$$

$$\vec{\mathcal{D}} = c r^2 \left(\ddot{\vec{\beta}} + r^2 (\vec{\beta} \cdot \ddot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} \right)$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu = \mathcal{D}_0^2 - |\vec{\mathcal{D}}|^2 = -c^2 r^6 \left(\frac{1}{r^2} \dot{\beta}^2 + (\vec{\beta} \cdot \ddot{\vec{\beta}})^2 \right)$$

$$\dot{\beta}^2 - \beta^2 \dot{\beta}^2 (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= -c^2 r^6 (\dot{\vec{\beta}} \times (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}))^2$$

↳ $\neq$ entre $\vec{\beta}$ e $\dot{\vec{\beta}}$

$$\hookrightarrow P = -cte c^2 r^6 (|\dot{\vec{\beta}}|^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2)$$

$$\left| \begin{array}{l} \beta \ll 1 \\ r \approx 1 \end{array} \right. \rightarrow P = -cte c^2 \dot{\beta}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \dot{\beta}^2 \rightarrow -cte c^2 = 2e^2/3c$$

↑
condição

$$\hookrightarrow P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} r^6 (|\dot{\vec{\beta}}|^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2) : \text{potência total} \quad (268.1)$$

irradiada carga
pontual acelerada

aplicação Eq. (268.1) : aceleradores de partículas;
vamos considerar 2 casos,

(i) acelerador linear,
nesse caso $\vec{\beta} \ll \dot{\vec{\beta}}$ e

$$\text{Eq. (268.1)} : P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} r^6 \dot{\beta}^2 \quad (268.2)$$

Eq. (268.2) pode ser expressa (veja Pg. 269.1) em termos
energia/comprimento fornecida p/ partícula dE/dx :

$$P_{\text{LINEAR}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \quad (268.3)$$

$$\hookrightarrow \frac{P_{\text{LINEAR}}}{dE/dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{1}{v} \left(\frac{dE}{dx} \right) \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{2}{3} \frac{dE/dx}{(mc^2/c)^2} : \begin{array}{l} \text{razão potência} \\ \text{emitida /} \\ \text{potência fornecida} \end{array}$$

valores $dE/dx \sim 50 \text{ MeV/m}$

típicos :

$$\left(\frac{mc^2}{c} \right)^2 \sim 10^{14} \text{ MeV/m} \quad \rightarrow \frac{P}{dE/dt} \ll 1 !$$

(iii) acelerador circular,

nesse caso $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$ e

$$\text{Eq. (268.1)} : P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} r^4 (1 - \beta^2) \dot{\beta}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} r^4 \dot{\beta}^2 \quad (269.1)$$

como aceleração centrípeta $\dot{\beta} = \frac{c\beta^2}{R}$

$$\hookrightarrow P = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{R^2} r^4 \beta^4 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{(mc^2)^4} \frac{\beta^4}{R^2} E^4 \quad (269.2)$$

$$E = \gamma mc^2$$

como período do movimento circular $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{c\beta}$

$$\hookrightarrow \delta E = \frac{2\pi R}{c\beta} \cdot P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{R} r^4 \beta^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{(mc^2)^4} \frac{E^4}{R} \beta^3 : \quad (269.3)$$

: energia emitida/volta.

valores típicos : se $E \sim 10 \text{ GeV} \rightarrow \delta E \sim 10 \text{ MeV} !$

• Comparação (i) e (ii)

$$\text{p/ mov. circular, } v = c\beta \rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(r m c \beta) = r m c \dot{\beta}$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (269.1)} : P_{\text{circ}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} r^2 \left(\frac{dp}{dt} \right)^2$$

$$\hookrightarrow P_{\text{circ}} / P_{\text{linear}} = r^2 \quad \text{p/} \quad \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\text{circ}} = \left(\frac{dp}{dt} \right)_{\text{linear}} ;$$

nesse caso $E_{\text{in, circ}} \gg E_{\text{in, linear}}$

Vamos verificar Eq. (268.3),

Eq. (268.3) pode ser escrita como:

$$P = -\frac{2e^2}{3c^3} D_\mu D^\mu = -\frac{2e^2}{3m^2 c^3} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \left(\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 \right)$$

$$dt = r d\tau$$

$$= \frac{2e^2 r^2}{3m^2 c^3} \left(\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 \right)$$

como $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \rightarrow 2E dE = 2c^2 p dp$

Eq. (193.4) : $\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{E} \rightarrow E\beta = cp$

$\hookrightarrow dE = c\beta dp$

$$\hookrightarrow P = \frac{2e^2 r^2}{3m^2 c^3} \left(\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 \right) = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} r^2 \underbrace{(1 - \beta^2)}_{1-\beta^2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2$$

como $\frac{dp}{dt} = v \frac{dp}{dx} = \frac{v}{c\beta} \frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dx}$

$$\hookrightarrow P = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{dE}{dx} \right)^2$$

• Distribuição angular da radiação emitida.

vimos que, Eq. (266.1):

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = [\mathbf{R}^2 \hat{n}]_{\text{RET}} \cdot \vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{c}{4\pi} R^2(t_n) |\vec{E}_a(\vec{x}, t)|^2 = \frac{dU}{d\Omega dt} :$$

~ energia detectada observador em $\vec{x}$,
intervalo de tempo dt

em geral $\frac{dU}{dt} \neq \frac{dU}{dt_n}$ ~ energia emitida partícula acelerada,
intervalo de tempo dt_n

de fato, energia emitida pela partícula $t_1 < t' < t_2$;

como Eq. (258.2): $t' = t - R(t)/c$, temos que

$$E = \int_{t=t_1+R(t_1)/c}^{t=t_2+R(t_2)/c} \frac{dP(t)}{d\Omega} dt = \int_{t'=t_1}^{t'=t_2} \underbrace{\frac{dP(t)}{d\Omega} \frac{dt}{dt'}}_{= dP(t')/d\Omega} dt'$$

onde $\frac{dt}{dt'} = \frac{dt}{dt_n} = [1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}]_{\text{RET}} : \text{Eq. (262.2.1)}$

temos que,

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{dP(t_n)}{d\Omega} = \frac{dP(t)}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} = \frac{dP(t_n)}{d\Omega} \cdot \frac{dt}{dt_n}$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (266.1)}} \frac{dP(t_n)}{d\Omega} = \frac{c^2}{4\pi} \left[\frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5} |\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})|^2 \right]_{\text{RET}} : \quad (270.1)$$

: definição potência emitida / $d\Omega$

↳ Eq. (270.1): medida distribuição angular radiação emitida!

notar L.H.S. e R.H.S. Eq. (270.1) : ambos funções tempo de emissão t_r : tempo próprio partícula !

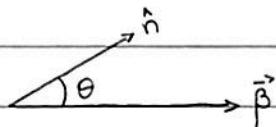
Vamos considerar 2 casos particulares Eq. (270.1),

(i) movimento linear,

nesse caso, $\vec{\beta} \parallel \vec{\beta}$ e Eq. (270.1) :

$$\frac{dP(t_r)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \cdot \frac{|\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5} = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \sin \theta)^5} : (271.1)$$

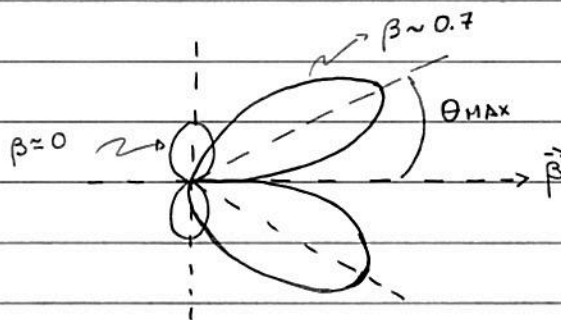
onde



: distribuição angular radiação emitida !

notar : $\frac{dP(t_r)}{d\Omega} \xrightarrow{\beta \ll 1} \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta : \text{Eq. (266.2)}$

Eq. (271.1) :



Obs. : veja Figs. Cap. 8, Marion.

sobre ângulo θ_{MAX} ,

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \sin \theta)^5} \right) = 0 \rightarrow 3\beta \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 5\beta = 0$$

$$\hookrightarrow \theta_{\text{MAX}} = \cos^{-1} \left(\frac{1}{3\beta} \left((15\beta - 1)^{1/2} - 1 \right) \right) \xrightarrow{\beta \approx 1} \frac{1}{2\pi} \quad \text{--- veja abaixo}$$

• vamos considerar limite $\beta \approx 1$ ou $r \gg 1$ Eq. (271.1),

$$\text{notas: } \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \rightarrow \beta = (1 - 1/\gamma^2)^{1/2} \xrightarrow{r \gg 1} \beta \approx 1 - \frac{1}{2r^2}$$

como $\theta_{\text{MAX}} \ll 1$ p/ $r \gg 1$, temos que

$$\begin{aligned} 1 - \beta \cos \theta &\approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2r^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{2}\theta^2\right) \\ &= \frac{1}{2r^2} (1 + r^2 \theta^2) \end{aligned}$$

$$\text{Eq. (271.1): } \frac{dP(t_n)}{d\Omega} \approx \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{2^5 r^{10} \theta^2}{(1 + r^2 \theta^2)^5} = \frac{8}{\pi} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} r^8 \frac{(r\theta)^2}{(1 + (r\theta)^2)^5}$$

(272.1)

$$\frac{d}{d(r\theta)} \left(\frac{(r\theta)^2}{(1 + (r\theta)^2)^5} \right) = 0 \rightarrow \theta_{\text{MAX}} = 1/2r !$$

notas Eq. (272.1): $dP(t_n)/d\Omega$: função $r\theta$

$$\propto r^8$$

$$: \text{max @ } r\theta_{\text{MAX}} = 1/2$$

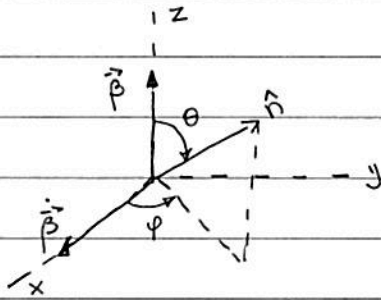
• potência total irradiada,

$$P = \int d\Omega \frac{dP(t_n)}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \underbrace{\int d\Omega \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}}_{= 8\pi r^6/3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} r^6 : \text{Eq. (268.2)!}$$

(ii) movimento circular,

nesse caso, $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$;

considerar sistema eixos p/ $\underline{t}$ fixo:



novamente: $\theta \neq$ entre $\vec{\beta}$ e $\hat{n}$

$$\text{notan: } \hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}) = (\hat{n} \cdot \vec{\beta})(\hat{n} - \vec{\beta}) - (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow |\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta})|^2 &= (\hat{n} - \vec{\beta}) \cdot (\hat{n} - \vec{\beta}) (\hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 + (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 \beta^2 \\ &\quad - 2 (\hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) \end{aligned}$$

$$= (\hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 \left(\underbrace{1 - 2\hat{n} \cdot \vec{\beta} + \beta^2 - 2 + 2\hat{n} \cdot \vec{\beta}}_{-1/r^2} \right) + \beta^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2$$

-- Eq. (26.1)

$$\text{como } (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) = \beta \hat{n} \cdot \hat{x} = \beta \sin\theta \cos\varphi$$

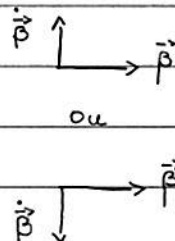
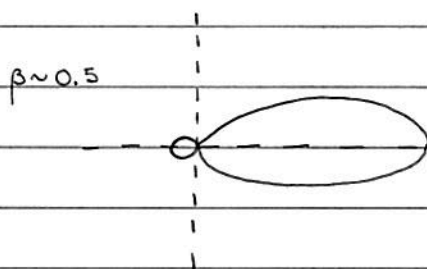
$$\hookrightarrow |\dots|^2 = \beta^2 (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2 - \beta^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\theta \cos^2\varphi$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (270.1): } \frac{dP(t_n)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{\beta^2}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{r^2 (1 - \beta \cos\theta)^2} \right):$$

(273.1)

: distribuição angular radiação emitida!
(radiação síncroton)

esquemáticamente (veja Figs. 8-8 e 8-9, Marion)



: plano $\vec{\beta} - \vec{\beta}$
($\varphi = 0$)

• limite $\beta \approx 1$ ou $r \gg 1$ Eq. (273.1),

como, nesse caso, $1 - \beta \cos \theta \approx \frac{1}{2r^2} (1 + r^2 \theta^2)$, temos que

$$\frac{dP(t_n)}{d\Omega} \approx \frac{2e^2}{\pi c^3} \frac{\dot{v}^2}{(1 + r^2 \theta^2)^3} r^4 \left(1 - \frac{4(r\theta)^2 \cos^2 \varphi}{(1 + (r\theta)^2)^2} \right) \quad (274.1)$$

• potência total irradiada,

$$P = \int d\Omega \frac{dP(t_n)}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{4\pi c} \underbrace{\int d\Omega \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3}}_{= 8\pi r^4/3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{r^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{c} r^4 : \text{Eq. (269.1) !}$$

• Distribuição angular da radiação emitida - espaço de frequências.

vimos que Eq. (266.1):

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{d^2 U}{dt d\Omega} = \frac{c}{4\pi} R^2(t_n) |\vec{E}(\vec{x}, t)|^2 = |\vec{A}(t)|^2 \quad (274.2)$$

$$\text{onde } \vec{A}(t) = \left(\frac{c}{4\pi} \right)^{1/2} R(t_n) \vec{E}(\vec{x}, t)$$

notas: $P(t)$, t : tempo observado $\neq P(t_n)$: Eq. (270.1)

ideia: determinar equivalente (274.2) em termos de frequência, i.e., $d^2 I(\omega, \hat{n}) / d\omega d\Omega$

hipótese: $\vec{A}(t \rightarrow \pm\infty) = 0$ ~ partícula acelerada Δt finito. (275.1.0)

$$\hookrightarrow \frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt |\vec{A}(t)|^2 : \text{energia total emitida}/d\Omega \quad (275.1)$$

considerar: transformada de Fourier $\vec{A}(t)$:

$$\vec{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \vec{A}(t) e^{i\omega t}$$

$$\vec{A}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \vec{A}(\omega) e^{i\omega t} \quad (275.2)$$

Eqs. (275.1) e (275.2):

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \vec{A}^*(\omega') \cdot \vec{A}(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{i(\omega-\omega')t}}_{\delta(\omega-\omega')} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\vec{A}(\omega)|^2$$

$$\hookrightarrow \frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt |\vec{A}(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\vec{A}(\omega)|^2 \quad (275.3)$$

Eq. (275.3): caso particular Teorema de Parseval (veja Sec. 3.6, Zangwill)

podemos considerar:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^0 d\omega |\vec{A}(\omega)|^2 + \int_0^{\infty} d\omega |\vec{A}(\omega)|^2 = \int_0^{\infty} d\omega (|\vec{A}(-\omega)|^2 + |\vec{A}(\omega)|^2) \\ = d^2 I(\omega, \hat{n}) / d\omega d\Omega :$$

: energia emitida no intervalo de frequência
 $\omega - \omega + d\omega / d\Omega$!

se $\vec{A}(t) \in \mathbb{R}$ Eq. (275.2) $\rightarrow \vec{A}(-\omega) = \vec{A}^*(\omega)$
(verificar!)

$$\hookrightarrow \frac{d^2 I(\omega, \hat{n})}{d\omega d\Omega} = 2 |\vec{A}(\omega)|^2 \quad (276.1)$$

pr carga pontual acelerada, temos que : Eqs. (262.2) e (274.2),

$$\vec{A}(\omega) = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^{1/2} R(t_n) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t} \frac{e}{c} \left[\frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta})}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^3} \right]_{\text{RET}}$$

Lembrar: $\vec{r} = \vec{r}(t)$: trajetória da partícula conhecida!

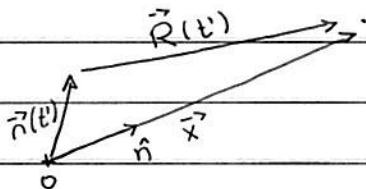
Eq. (258.2) : $t = t_n + R(t_n)/c = t' + R(t)/c$

$$\hookrightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{dt}{dt_n} \frac{dt_n}{dt'} = [1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}]_{\text{RET}} dt'$$

$$\hookrightarrow \vec{A}(t) = \left(\frac{e^2}{8\pi^2 c}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega(t' + R(t')/c)} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2}$$

hipótese : $x \gg r(t)$

como $\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{r}(t)$



$$\hookrightarrow R(t) = (x^2 + r^2(t) - 2\vec{x} \cdot \vec{r}(t))^{1/2}$$

$$\approx x \left(1 - 2\vec{x} \cdot \vec{r}(t)/x^2 \right)^{1/2}$$

$$\approx x - \frac{\vec{x} \cdot \vec{r}(t)}{x} \approx x - \hat{n} \cdot \vec{r}(t)$$

nesse caso, $\hat{n}(t) = \frac{\vec{R}(t)}{R(t)} \approx \frac{\vec{x}}{x} = \hat{n}$: similar discussão radiação

$$\hookrightarrow e^{i\omega(t' + R(t')/c)} \approx \exp\left(i\omega(t' - \vec{r}(t') \cdot \hat{n}/c)\right) e^{i\omega x/c}$$

Eq. (276.1) :

$$\frac{d^2 I(\omega, \hat{n})}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\omega(t' - \vec{r}(t') \cdot \hat{n}/c)} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \right|^2 \quad (277.1)$$

como (veja abaixo)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right) = \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} \quad (277.2)$$

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega(t - \vec{r}(t) \cdot \hat{n}/c)} = i\omega(1 - \vec{\beta}(t) \cdot \hat{n}) e^{i\omega(t - \vec{r}(t) \cdot \hat{n}/c)}$$

$\hookrightarrow$ integração por partes (277.1) $\oplus$ hipótese (275.1.0) :

$$\frac{d^2 I(\omega, \hat{n})}{d\omega d\Omega} = \frac{c^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int dt' e^{i\omega(t' - \vec{r}(t') \cdot \hat{n}/c)} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) \right|^2 : \quad (277.3)$$

: distribuição angular radiação emitida
em termos frequência

Obs. : p/ cálculo $\int dt'$ em (277.2), é necessário introduzir
fator de convergência $e^{\epsilon|t|} \sim$ hipótese (275.1.0).

vamos verificar Eq. (277.2) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} \right) = \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})} - \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} (-\dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{n})$$

$$\text{como } \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) + \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})(\dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{n}) =$$

$$= ((\hat{n} \cdot \vec{\beta}) \hat{n} - \vec{\beta})(-\vec{\beta} \cdot \hat{n}) + ((\hat{n} \cdot \vec{\beta}) \hat{n} - \vec{\beta})(\vec{\beta} \cdot \hat{n}) + \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})$$

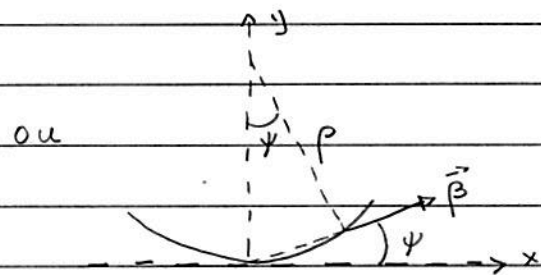
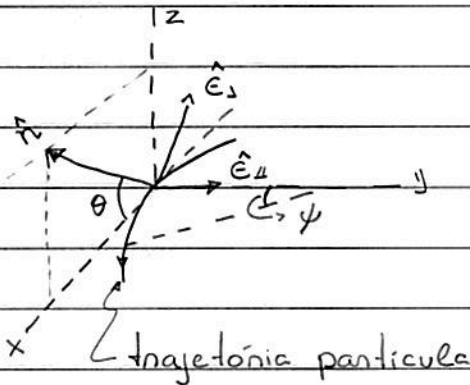
$$= - \underbrace{((\hat{n} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} - (\hat{n} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta})} + \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})$$

$$= - \hat{n} \times (\vec{\beta} \times \vec{\beta})$$

Ex.: partícula movimento circular.

considerar: trajetória partícula $\subset$ plano xy

$\hat{n} \in$ " xz



Obs.: p : raio curvatura trajetória partícula;

notar $\psi = \omega t = \frac{v}{p} t$

frequência movimento circular

temos que:

$$\hat{n} = \hat{x} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta$$

$$\hat{e}_\parallel = \hat{y} : \text{versor plano trajetória}$$

$$\hat{e}_\perp = \hat{n} \times \hat{e}_\parallel = -\hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta$$

$$\vec{\beta}(t) = \hat{x} p \cos \psi + \hat{y} p \sin \psi \rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x} p \sin \psi + \hat{y} p (1 - \cos \psi), \text{ c.e.,}$$

$$\vec{r}(t=0) = 0 !$$

$$\hookrightarrow \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) = -\hat{y} \beta \sin \psi + \beta \sin \theta \cos \psi (-\hat{x} \sin \theta + \hat{z} \cos \theta)$$

$$= -\hat{E}_\parallel \beta \sin \psi + \hat{E}_\perp \sin \theta \cos \psi$$

$$\hat{n} \cdot \vec{r}(t) = p \cos \theta \sin \psi$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (277.3)}: \frac{d^2 J(\omega, \hat{n})}{d\omega d\Omega} = \frac{c^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| -\hat{E}_\parallel A_\parallel(\omega) + \hat{E}_\perp A_\perp(\omega) \right|^2$$

onde

(279.1)

$$A_\parallel(\omega) = \int dt' e^{i\omega t'} e^{-i\omega p/c \cos \theta \sin \psi} \beta \sin \psi$$

$$A_\perp(\omega) = \int dt' e^{i\omega t'} e^{-i\omega p/c \cos \theta \sin \psi} \beta \sin \theta \cos \psi$$

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = vt'/p = \frac{c}{\beta} \beta t'$$

notas: $A_\parallel(\omega) \propto$ amplitude radiação emitida, polarização

$\parallel$ plano da órbita ;

$A_\perp(\omega) \propto$ " " " "

$\perp$ " " !

Obs.: Eq. (279.1) pode ser utilizada para determinar (1ª aproximação)

radiação emitida partícula relativística ($\beta \approx 1$)

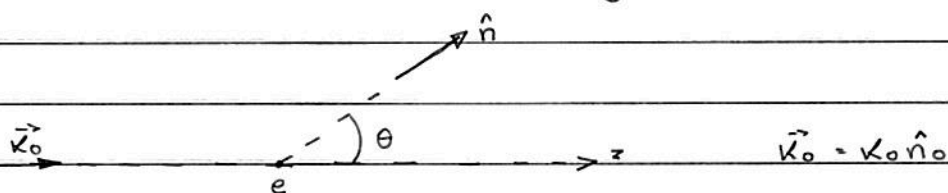
trajetória arbitrária (para detalhes, veja Secs. 14.4 e 14.6, Jackson).

• Espalhamento Thomson,

ideia: descrever espalhamento radiação EM por carga pontual
(veja Ex. 3, pg. 166: espalhamento por esfera dielétrica)

considerar: partícula livre, massa m , carga e ;

radiação incidente: onda plana monocromática,
direção propagação $\hat{n}_0$, polarização $\hat{E}_0$.



ideia espalhamento:

campo $\vec{E}$ radiação incidente $\rightarrow$ aceleração carga $e \rightarrow$ emissão radiação: radiação espalhada!

hipótese: movimento partícula não-relativístico

$\hookrightarrow \omega_{inc} = \omega_{scat} \quad e$ (veja abaixo)

$\lambda_{inc} \gg d$: deslocamento partícula após incidência onda plana.

$\hookrightarrow Q$: Qual a seção de choque do processo de espalhamento?

considerar: radiação espalhada, polarização $\hat{E}$,

Eqs. (168.2) e (266.2):

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \underbrace{|\hat{E}^* \cdot (\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{p}))|^2}_{(\hat{E}^* \cdot \hat{n})(\hat{n} \cdot \vec{p}) - \hat{E}^* \cdot \vec{p}} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\hat{E}^* \cdot \vec{v}|^2 \quad (280.1)$$

$$\underbrace{(\hat{E}^* \cdot \hat{n})(\hat{n} \cdot \vec{p})}_{=0} - \hat{E}^* \cdot \vec{p}$$

como $\vec{E}_{inc}(\vec{x}, t) = \hat{E}_0 E_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$\hookrightarrow \vec{F} = m c \vec{\beta} = \hat{E}_0 e E_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$\hookrightarrow \hat{E}^* \cdot \vec{v} = \frac{c E_0}{m} \hat{E}^* \cdot \hat{E}_0 \exp(i \vec{k}_0 \cdot \vec{x} - i \omega t)$

considerando a média temporal em 1 período de (280.1):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{1}{2} \text{Re} |\hat{E}^* \cdot \vec{v}|^2 = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\hat{E}^* \cdot \hat{E}_0|^2 \quad (281.1)$$

: (média temporal) energia emitida / tempo $\cdot d\Omega$

· sobre energia onda plana incidente;

Eq. (85.3) (sistema Gaussiano):

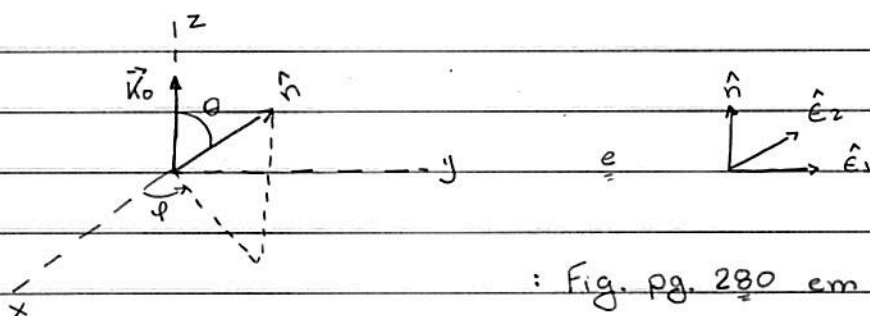
$$\langle \vec{S}_{inc} \rangle \cdot \hat{n}_0 = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 : \text{energia incidente / tempo} \cdot \text{área} \quad (281.2)$$

similar Eq. (168.3), define-se a secção de choque diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\overline{dP/d\Omega}}{\langle \vec{S}_{inc} \rangle \cdot \hat{n}_0} : \text{área} / d\Omega \quad (281.3)$$

$$\hookrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\hat{E}^* \cdot \hat{E}_0|^2 \quad (281.4)$$

em detalhes: consideramos vetores ortogonais $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{n})$:



: Fig. pg. 280 em detalhes

temos que: $\vec{k}_0 = k_0 \hat{z}$

$$\hat{n} = \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta$$

$$\hat{E}_1 = \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \cos \theta$$

$$\hat{E}_2 = \hat{n} \times \hat{E}_1 = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

se $\hat{E}_0 = \hat{x}$: polarização radiação incidente

$$\text{Eq. (281.4): } \frac{d\sigma_1}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\hat{E}_1 \cdot \hat{x}|^2 = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi$$

$$\text{1 média} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cos^2 \theta$$

direção $\hat{E}_0$

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\hat{E}_2 \cdot \hat{x}|^2 = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \varphi$$

$$\text{1 média} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2$$

direção $\hat{E}_0$

↳ seção de choque diferencial:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_1}{d\Omega} + \frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta); \quad (282.1)$$

seção de choque espalhamento Thomson

notas: Eq. (282.1) similar problema esfera dielétrica, pg. 171

↳ seção de choque total:

$$\sigma_T = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \underbrace{\int d\Omega (1 + \cos^2 \theta)}_{16\pi/3} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \quad (282.2)$$

Obs.:

(1) Eqs. (282.1) e (282.2), ou p/ baixas frequências, i.e.,

$$\text{momento fóton } p = \frac{h\nu}{c} \ll mc \rightarrow h\nu \ll mc^2 \sim 0.5 \text{ MeV}$$

(p/ elétron)

p/ altas frequências: $\oplus$ conexões relativísticas e quânticas!(2) $\frac{e^2}{mc^2} \sim 10^{-13} \text{ cm}$: raio clássico do elétronLembrar: energia eletrostática camada esférica,
carga e , raio R :

$$\frac{e^2}{2R} = mc^2 \rightarrow R = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) !$$

↑
condição