

$$\vec{F}_{21} = K q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} : \text{Lei de Coulomb} \quad (2.1)$$

onde cte de proporcionalidade $K \sim$ sistema de unidades

- S.I. : $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \frac{C^2}{Nm^2}$ velocidade da luz
(apenas valor numérico)

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} : \text{cte, permissividade do vácuo}$

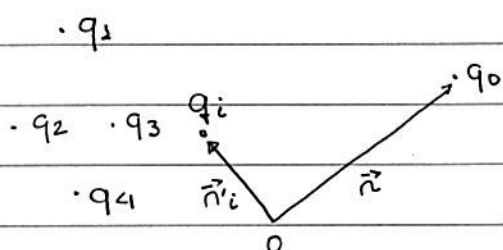
- Gaussiano : $K = 1$

Obs. : Caps. 1-10, Jackson : S.I.

" > 11, " : Gaussiano

experimento : princípio de superposição válido p/ interação Coulombiana

↳ p/ sistema N+1 cargas em repouso no vácuo :



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{0i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_0 q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} : \text{força sob } q_0 \text{ devido cargas } q_i \quad (2.2)$$

podemos reescrever (2.2) como

$$\vec{F} = q_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}_{\equiv \vec{E}(\vec{r})} = q_0 \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$: campo elétrico (função vetorial)

notas : $\vec{E}$ independe carga (teste) q_0

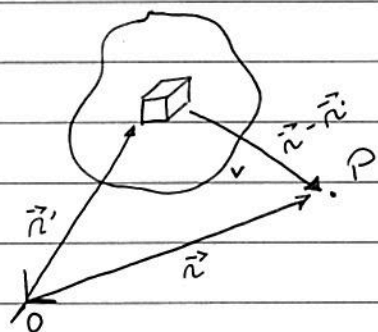
$\vec{E}$ depende apenas posição $\vec{r}$

em detalhes,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (3.1)$$

p/ distribuição contínua de cargas

Lembrar : dist. contínua é caracterizada por uma densidade (volumétrica) de cargas $\rho = \rho(\vec{r})$, i.e.,



$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta V} \right) : \text{função escalar}$$

$\vec{r} \in \Delta V$

p/ volume infinitesimal $dv @ \vec{r}'$: $dq = \rho(\vec{r}') dv$

$$\text{Eq. (3.1)} : \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \Delta V \left(\frac{\Delta Q}{\Delta V} \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$$\xrightarrow{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.2)$$

casos particulares :

- dist. superficial de cargas : $dq = \sigma(\vec{r}) ds$

densidade superficial de
cargas (carga/área)

- dist. linear de cargas : $dq = \lambda(\vec{r}) d\ell$

↙ densidade linear de cargas
(carga / comprimento)

Lembrar: p/ distribuição N-cargas pontuais q_i em $\vec{r}'_i$, temos que

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}'_i) \quad (4.1)$$

Obs.: propriedades função delta, veja pgs. 4.1 - 4.3!

$$\text{Lembrar identidades: } - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{n}}{n^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{r}) \quad (4.2)$$

$$- \nabla^2 \left(\frac{1}{n} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (4.3)$$

Propriedades do campo eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$,

vamos analisar duas características de $\vec{E}(\vec{r})$:

(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \sim$ fluxo $\vec{E}$ através superfície S

(ii) $\vec{\nabla} \times \vec{E} \sim$ circulação $\vec{E}$ ao longo curva Γ

(forma diferencial)

(forma integral)

(i) divergente $\vec{E}$,

$$\text{Eq. (3.1): } \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)}$$

$$\text{Eq. (4.2)} \quad = 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

• Função delta de Dirac.

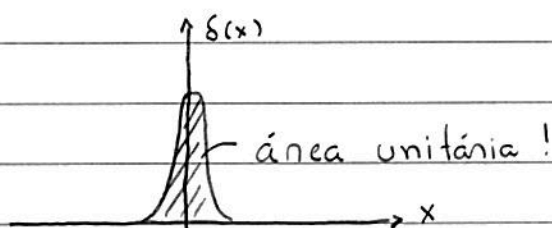
Definição função delta de Dirac 1-D $\delta(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x-a) = f(a) \quad (4.4)$$

onde $f = f(x)$ é uma função arbitrária suave.

alternativa (definição informal):

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (4.5)$$



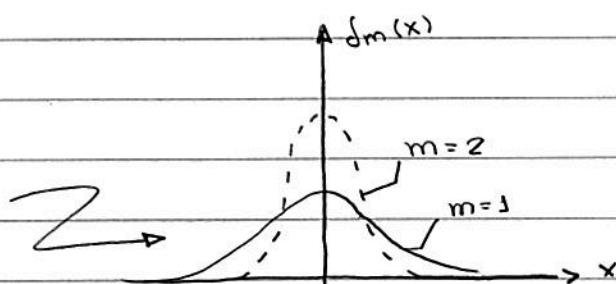
de fato, $\delta(x)$ é uma função generalizada = limite sequência de funções.

e.g.,

$$\delta(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\sin mx}{\pi x}$$

$$\delta(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-m^2 x^2}$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon / \pi}{x^2 + \epsilon^2}$$



identidades:

$$(1) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0 \rightarrow \delta(-x) = \delta(x)$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} \delta(x-x') = -f'(x')$$

$$(3) \delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x-x_i) \quad \rightarrow \text{Zeros } f=f(x)$$

$$(4) \frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} : \text{função degrau}$$

$$(5) \delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x')}$$

Generalização 3-D.

$$\text{Eq. (4.4)} \rightarrow \int_V d^3\vec{n} f(\vec{n}) \delta(\vec{n}-\vec{n}') = \begin{cases} f(\vec{n}'), & \vec{n}' \in V \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.6)$$

de modo análogo, Eq. (4.5):

$$\delta(\vec{n}) = 0, \quad n \neq 0 \quad \text{e} \quad \int_V d^3\vec{n} \delta(\vec{n}) = \begin{cases} 1, & \vec{n} = 0 \in V \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.7)$$

em particular, em coordenadas cartesianas, temos que

$$\delta(\vec{n}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

Ex. 1 : mostrar que $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{n}}{n^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{r})$ (4.2)

$\vec{\nabla}$ em coord. esféricas

$$\hookrightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{n}}{n^2} \right)}_{(*)} = \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial n} \left(n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \right) = 0, \quad n \neq 0$$

como $\lim_{n \rightarrow 0} \hat{n}/n^2 \rightarrow +\infty$, vamos integrar (*) sob esfera

raio R , Centro = origem, p/ determinar comportamento em torno $\vec{r} = 0$:

$$\underbrace{\int d^3n}_{\substack{\text{esfera} \\ \text{raio } R}} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{n}}{n^2} \right) = \oint_S \underbrace{\frac{\hat{n}}{n^2} \cdot d\vec{s}}_{\text{Eq. (5.2)}} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{R^2} R^2 \sin\theta = 4\pi \rightarrow \text{Eq. (4.2)!}$$

Ex. 2 : mostrar que $\nabla^2 \left(\frac{1}{n} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$ (4.3)

De modo análogo ao Ex. 1,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \frac{\partial}{\partial n} \left(n^2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{n} \right) \right) = 0, \quad n \neq 0$$

$$\underbrace{\int d^3n}_{\substack{\text{esfera} \\ \text{raio } R}} \nabla^2 \left(\frac{1}{n} \right) = \oint_S \underbrace{\vec{\nabla} \left(\frac{1}{n} \right) \cdot d\vec{s}}_{-\hat{n}/n^2} = -4\pi \rightarrow \text{Eq. (4.3)!}$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) : \text{Lei de Gauss (forma diferencial)} \quad (5.1)$$

Lembrar: Teorema de Gauss (teorema do divergente)

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) d^3r = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (5.2)$$

sup. definida pelo volume V

$$\text{Eq. (5.1)} : \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d^3r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r$$

$$= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r : \text{Lei de Gauss} \quad (5.3)$$

(forma integral)

: fluxo vetor $\vec{E}$ através sup. S

Obs.: p/ sup. fechada, sentido $\hat{n}$ = "p/ fora", $d\vec{S} = \hat{n} ds$

Obs.:

(1) Lei de Gauss é equivalente Lei de Coulomb, apenas reformulação

(2) interpretação (5.3): cargas elétricas são fontes p/ $\vec{E}$

(3) sup. imaginária S = superfície Gaussiana

(4) ingredientes importantes determinação (5.3):

$F \propto 1/r^2$ [Eq. (2.1)] e princípio de superposição.

(5) Eq. (5.3): útil determinação campo elétrico $\vec{E}$ p/ distribuições simétricas de carga

(ii) notacional $\vec{E}$,

Lembrar identidade: $\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\hat{r}}{r^2}$ (6.1)

$$\begin{aligned} \text{Eq. (3.1): } \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{= -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)} \\ &= -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

como, ρ função escalar $\psi = \psi(\vec{r})$, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi = 0$

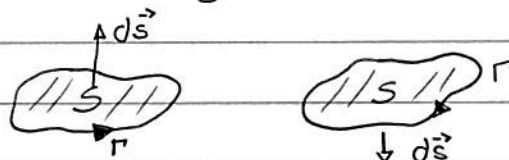
$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$: campo eletrostático é conservativo (6.3)
 ~ interação Coulombiana é uma
 "central"

Lembrar: Teorema de Stokes (teorema do notacional)

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (6.4)$$

$\hookrightarrow$ curva definida pela fronteira sup. S!

Obs.: orientação Γ e direção $d\vec{S}$: "regra da mão direita"



$$\text{Eq. (6.3): } \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (6.4)$$

: circulação
campo $\vec{E}$ ao longo
curva Γ

↳ Resumo propriedades campo (vetorial) eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) / \epsilon_0$$

(7.1)

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

Obs.: Eq. (7.1), sistema Gaussiano: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

• Potencial escalar / elétrico,

Eq. (6.2): podemos escrever:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$$

(7.2)

$$\text{onde } \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} : \text{potencial escalar} \quad (7.3)$$

notas:

distribuição de cargas
em repouso, vácuo

(veja Fig. pg. 3)

ou

campo elétrico $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$
no pto P

potencial escalar
 $\Phi = \Phi(\vec{r})$ no pto P

Obs.: em alguns casos é interessante calcular Φ e
determinar $\vec{E}$ a partir de (7.2).

Lembrar: teorema do gradiente

$$\int_{\gamma, \Gamma}^2 (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$$

(7.4)

notas:

$$-\int_{\gamma, \Gamma}^2 \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_{\gamma, \Gamma}^2 (\vec{\nabla} \Phi) \cdot d\vec{e} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) : \text{diferença de potencial entre pto } \underline{1} \text{ e } \underline{2}. \quad (8.1)$$

considerando $\vec{r}_1 = \vec{r}_0$: zero (pto de referência) do potencial, isto é, $\Phi(\vec{r}_0) = 0$

$$\hookrightarrow \Phi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{e}' \quad (8.2)$$

Obs.: Eqs. (8.1) e (8.2) : integral independente curva $\Gamma \sim$ Eq. (6.4)

$\hookrightarrow$ é possível definir função escalar $\Phi = \Phi(\vec{r})$ como em (8.2) que depende apenas pto $\vec{r}$!

notas: Eqs. (7.2) e (8.2) : relações entre $\vec{E}$ e Φ ;

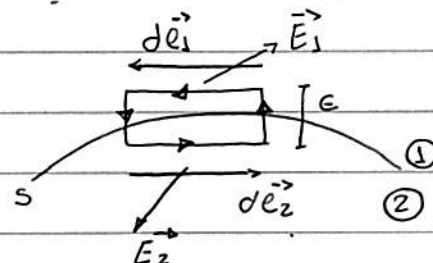
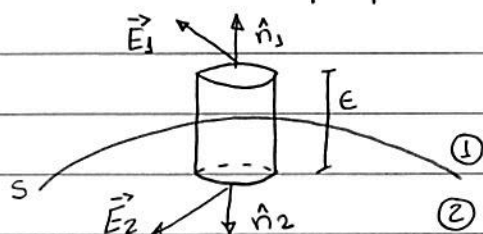
Eq. (7.3) : determinação Φ a partir de $\rho(\vec{r})$!

Obs.: sobre o teorema de Helmholtz : veja pg. 8.1

Condições de contorno,

ideia : analisar o comportamento de $\vec{E}(\vec{r})$ e $\Phi(\vec{r})$ na vizinhança de uma superfície carregada

considerar : superfície arbitrária $S \equiv \sigma = \sigma(\vec{r})$, $\vec{r} \in S$



Teorema de Helmholtz (veja Sec. 1.9, Zangwill),

considerar uma função vetorial $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \mathcal{D}(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{C}(\vec{r})$$

onde as funções escalares $\mathcal{D}(\vec{r})$ e vetorial $\vec{C}(\vec{r})$ são conhecidas.

* Se $\mathcal{D}$ e $\vec{C}$ decaem mais rápido que $1/r^2$ qdo $r \rightarrow +\infty$ e $\lim_{r \rightarrow +\infty} \vec{F}(\vec{r}) = 0$

$$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathcal{D}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) \quad (8.4)$$

i.e., se o divergente e o rotacional de uma função vetorial $\vec{F}$ são especificados $\oplus$ comportamento $r \rightarrow +\infty$

$\hookrightarrow \vec{F}$ é determinada pela Eq. (8.4).

caso particular, se $\vec{F}$ é diferenciável e decai mais rápido que $1/r$ qdo $r \rightarrow +\infty$

$$\hookrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) \quad (8.5)$$

notar: Eqs. (7.1) $\oplus$ (8.5)

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) : \text{ou c/ Eqs. (7.2) e (7.3)!}$$

verifica-se (exercício) a partir das formas integrais

Eq. (7.1) que:

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \sigma(\vec{r}) / \epsilon_0 ;$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 ; \quad (9.1)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 ; \quad \text{onde } \hat{n} = \hat{n}_1 = -\hat{n}_2$$

i.e., componente $\vec{E}$ $\perp$ sup. é descontínua na sup. de σ/ϵ_0 ;

" " $\parallel$ " " contínua;

o potencial escalar é contínua na superfície.

• Eqs. de Poisson e Laplace.

$$\text{Eqs. (7.1) e (7.2): } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Phi) = -\nabla^2 \Phi$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) : \text{Eq. de Poisson} \quad (9.2)$$

onde

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} : \text{Laplaciano de } \Phi$$

em particular, p/ regiões tais que $\rho(\vec{r}) = 0$

$$\hookrightarrow \nabla^2 \Phi = 0 : \text{Eq. de Laplace} \quad (9.3)$$

notar: Eqs. (9.2) e (9.3): eqs. diferenciais parciais

⊕ condições de contorno $\rightarrow$ determinação $\Phi = \Phi(\vec{r})$
apropriadas (veja abaixo)

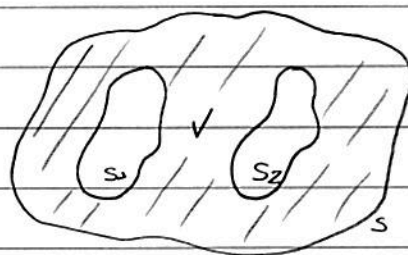
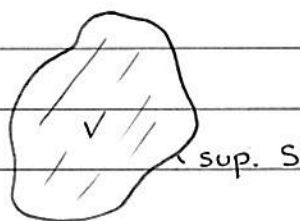
notas : Eq. (7.3) é solução de (9.2) :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi(\vec{r}) &= \nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad \uparrow \text{Eq. (4.3)}\end{aligned}$$

de fato, (7.3) é uma solução conveniente se $\rho(\vec{r})$ é conhecida e $\int d^3r'$: sob todo espaço;

entretanto, em alguns casos, é necessário determinar $\Phi(\vec{r})$ em uma determinada região do espaço, i.e., volume V determinado por um conjunto de superfícies S_i (veja Fig.), tal que o comportamento de $\Phi(\vec{r})$ nas sups. S_i é especificado.
(condições de contorno):

nesse caso : determinação $\Phi \sim$ sol. problema de contorno



Obs. : determinação de soluções analíticas das Eqs. de Poisson e Laplace é teoria do potencial (veja Sec. 7.2, Zangwill)

· Algumas considerações sobre a solução Eq. de Poisson,

inicial : determinação das identidades de Green,

(i) considerar o teorema do divergente (5.2) p/

$$\vec{A}(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r})$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) = \phi \nabla^2 \psi + (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)$$

$$\vec{A} \cdot d\vec{s} = \vec{A} \cdot \hat{n} ds = \phi (\vec{\nabla} \psi) \cdot \hat{n} ds \equiv \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds$$

$$\text{Eq. (5.2)} : \int_V d^3r (\phi \nabla^2 \psi + (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)) = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \quad (11.1)$$

: 1ª identidade de Green

(ii) considerar (11.1) $\oplus \psi \leftrightarrow \phi$:

$$\int_V d^3r (\psi \nabla^2 \phi + (\vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{\nabla} \phi)) = \oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (11.2)$$

$$(11.1) \ominus (11.2) : \int_V d^3r (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \oint_S (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) ds \quad (11.3)$$

: 2ª identidade de Green (teorema de Green)

- sobre as possíveis condições de contorno,

(i) c.c. de Dirichlet : $\Phi(\vec{r})$, $\vec{r} \in S_i$, especificados;

(ii) c.c. de Neumann : $\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$, $\vec{r} \in S_i$, especificados;

(iii) c.c. mistas : $\Phi(\vec{r})$, alguns plos $\vec{r} \in S_i$ e $\partial \Phi / \partial n$, demais " " " " , especificados.

$\hookrightarrow$ p/ c.c. (i) - (iii), verifica-se que solução da eq. de Poisson (9.2) é única : Teorema de unicidade

(11.4)

- Teorema de unicidade : demonstração :

hipótese : Φ_1 e Φ_2 são soluções Eq. (9.2) que satisfazem as mesmas condições de contorno

$$\text{seja : } U = \Phi_2 - \Phi_1 \rightarrow \nabla^2 U = \nabla^2 \Phi_2 - \nabla^2 \Phi_1 = 0$$

(12.1)

$$\text{e (c.c. (i) - (iii)) } \quad U(\vec{r}) = 0 \text{ e/ou } \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad \vec{r} \in S;$$

considerar a 1ª identidade de Green (11.1) p/ $\psi = \phi = U$:

$$\int_V d^3r (U \nabla^2 U + |\vec{\nabla} U|^2) = \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} ds$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(12.1)} \left. \begin{aligned} \int_V d^3r |\vec{\nabla} U|^2 &= 0 \\ \text{como } |\vec{\nabla} U|^2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{\nabla} U = 0 \rightarrow U = \text{cte} \\ \rightarrow \Phi_2 = \Phi_1 + \text{cte} ! \end{aligned}$$

• Solução (formal) eq. de Poisson via método da função de Green,

ideia : determinar $\Phi = \Phi(\vec{r})$, $\vec{r} \in V$, sol. Eq. (9.2)

p/ condições de contorno (i) e (ii).

considerar $G(\vec{r}, \vec{r}')$: função de Green tal que

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (12.2)$$

identidade (4.3) $\rightarrow G$ pode ser escrita como

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}'), \quad \vec{r}, \vec{r}' \in V, \quad (12.3)$$

tal que $\nabla^2 F(\vec{r}, \vec{r}') = 0$!

ideia : escolher $F(\vec{r}, \vec{r}')$ de acordo c/ a c.c. considerada.

considerar o teorema de Green (11.3) p/ $\phi = \Phi$ e $\psi = G$:

$$\int d^3r' \left(\underbrace{\Phi(\vec{r}') \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} - \underbrace{G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla'^2 \Phi(\vec{r}')}_{-\rho(\vec{r}')/\epsilon_0} \right) =$$

$$= \oint_S \left(\Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'} \right) ds' = (I)$$

$$\hookrightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} (I) \quad (13.1)$$

• hipótese : c.c. = c.c. de Dirichlet (i),

nesse caso, $F(\vec{r}, \vec{r}')$ pode ser escolhida tal que

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \equiv G_D(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{e} \quad G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \vec{r}' \in S$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (13.1)} : \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} ds'$$

(13.2)

notar : $\Phi = \Phi(\vec{r})$ determinada se $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ é conhecida

(sol. eq. auxiliar (12.2)) e $\Phi(\vec{r})$ é especificada na sup. S (c.c. (i)) !

• hipótese : c.c. = c.c. de Neumann (ii),

em princípio, $F(\vec{r}, \vec{r}')$ pode ser escolhida tal que

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \equiv G_N(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = 0, \quad \vec{r}' \in S$$

então, teorema de Gauss (5.2) p/ $\vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\hookrightarrow \oint_S (\underbrace{\vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{S}'}_{\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}}) = \int_V d^3r' \nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \quad \uparrow \text{Eq. (12.2)}$$

$\hookrightarrow$ possível escolha: $\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{S}$, $\vec{r}' \in S$.

$\hookrightarrow$ Eq. (13.1):

$$\Phi(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{S} \oint_S \Phi(\vec{r}') dS'}_{= \langle \Phi \rangle_S} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n'} d\vec{S}' \quad (14.1)$$

notas: (i) $\Phi = \Phi(\vec{r})$ determinada se $G_N(\vec{r}, \vec{r}')$ é conhecida (sol. eq. auxiliar (12.2)) e $\partial\Phi(\vec{r})/\partial n$ é especificada na sup. S (c.c. (ii));

(ii) se volume V definido por sup. interna finita S_1 e sup. externa ∞ $S_2 \rightarrow S = S_1 \cup S_2$ e $\langle \Phi \rangle_S = 0$!

Obs.: (1) em geral, sol. eq. auxiliar (12.2): difícil!

(2) Lembrete: determinação sol. analítica eqs. de Laplace / Poisson: - método separação de variáveis;
- " das imagens.

(veja abaixo)

• Energia potencial eletrostática,

considerar partícula carga q sob campo eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$,
movimento $1 \rightarrow 2$.

Q.: Qual o trabalho realizado por uma força externa p/ movimentar partícula $1 \rightarrow 2$?

$$W = \int_{1, \Gamma}^2 (-q \vec{E}(\vec{r})) \cdot d\vec{e} = \int_{1, \Gamma}^2 q (\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})) \cdot d\vec{e} = q (\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1))$$

Eq. (7.2) Eq. (8.1)

em particular, se $\Phi(\vec{r}_1 \rightarrow \infty) = 0$ (zero do potencial)

$$\hookrightarrow W = -q \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{e}' = q \Phi(\vec{r}), \quad (15.1)$$

i.e., trabalho realizado por uma força externa p/ movimentar carga q de $\infty \rightarrow \vec{r}$ cujo potencial (associado a uma certa distribuição de cargas $\Phi(\vec{r}_1) =$ energia potencial eletrostática carga q

• Eq. (15.1) permite determinar a energia potencial eletrostática armazenada em uma certa distribuição de cargas

considerar cargas q_j em repouso, posição $\vec{r}_j$, $j = 1, 2, \dots, N-1$

$$\hookrightarrow W_i = q_i \Phi(\vec{r}_i) = q_i \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right) : W \text{ p/ movimentar } q_i \infty \rightarrow \vec{r}_i$$

considerando o processo de montagem do sistema,
temos que (exercício)

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (16.1)$$

pr uma distribuição contínua de cargas,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3n \int d^3n' \frac{\rho(\vec{n})\rho(\vec{n}')}{|\vec{n} - \vec{n}'|} = \frac{1}{2} \int d^3n \rho(\vec{n}) \Phi(\vec{n}) \quad (16.2)$$

interpretação (16.1)/(16.2): energia (potencial) sistema armazenada nas cargas.

alternativa: como $\rho(\vec{n}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi(\vec{n})$: Eq. (9.2)

$$\hookrightarrow W = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V d^3n \Phi \nabla^2 \Phi = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V d^3n |\vec{\nabla} \Phi|^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint_S \underbrace{\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds}_{\substack{\text{1}^\circ \text{ id. Gauss (11.1)} \\ \text{vol. definido} \\ \text{por sup. S}}} \quad \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot n^2 \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0}_{\substack{\text{pr cargas localizadas} \\ \text{e } V \rightarrow \infty!}}$$

$$\hookrightarrow W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V d^3n |\vec{\nabla} \Phi|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{ALL SPACE}} d^3n |\vec{E}(\vec{n})|^2 \quad (16.3)$$

em particular: $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$: densidade de energia (potencial) eletrostática (16.4)

interpretação (16.3): energia (potencial) sistema armazenado no campo elétrico!

Obs.: veja comentário Sec. 1.11, Jackson sobre aparente $\neq$ entre Eqs. (16.1) e (16.3).

• condutores: materiais tais que cargas elétricas (cargas livres) podem se movimentar em seu interior (primeira classificação macroscópica materiais)

propriedades condutor ideal (forma arbitrária), carga Q , em equilíbrio eletrostático:

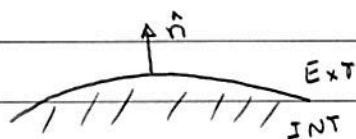
(1) $\vec{E}_{\text{INTERIOR}} = 0$

(2) $\rho(\vec{r}) = 0$, $\vec{r}$ interior condutor

(3) carga Q localizada na superfície condutor

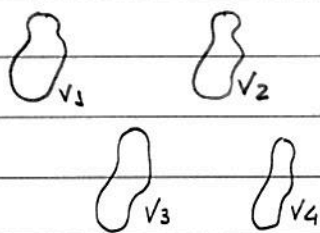
(4) condutor é uma equipotencial: todos os plos condutor têm o mesmo potencial

(5) campo elétrico próximo superfície condutor:



$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

considerar: sistema N condutores no vácuo, carga Q_i e potencial V_i



como a eq. de Poisson (9.2) é linear, i.e.,

- se $\nabla^2 \Phi_1 = -\rho_1/\epsilon_0$ e $\nabla^2 \Phi_2 = -\rho_2/\epsilon_0 \rightarrow \nabla^2 (\Phi_1 + \Phi_2) = -(\rho_1 + \rho_2)/\epsilon_0$

- se $\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon_0 \rightarrow \nabla^2 (c\Phi) = -(c\rho)/\epsilon_0$,
 $\hookrightarrow$ cte

a dependência linear entre V e Q permite escrever:

$$V_i = \sum_{j=1}^N P_{ij} Q_j, \quad i = 1, 2, \dots, N : \text{potencial condutor } i \quad (18.1)$$

↳ coeficientes de potencial $\sim$ geometria sistema

$$\text{ou } Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, \dots, N : \text{carga condutor } i \quad (18.2)$$

↳ coeficientes de capacitância

$$\text{onde } \hat{P}^{-1} = \hat{C}$$

↳ matriz elementos = C_{ij}

" " = P_{ij}

verifica-se que (veja Secs. 5.4.3 e 5.4.4, Zangwill):

$$\cdot C_{ij} = C_{ji}; \quad C_{ii} > 0; \quad C_{ij} < 0, i \neq j; \quad \sum_j C_{ij} \geq 0$$

$$\cdot P_{ij} = P_{ji}; \quad P_{ii} > 0; \quad P_{ii} \geq P_{ij}$$

Obs.: C_{ij} é uma generalização conceito de capacitância C (medida da capacidade de um sistema armazenar carga/energia eletrostática) definida pr sistema $N=2$ condutores, cargas $+Q$ e $-Q$; veja Sec. 5.4.4, Zangwill pr exemplo relação entre C e C_{ij} .

notas: energia potencial N -condutores pode ser escrita em termos C_{ij} :

$$\text{Eq. (16.2): } W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} V_i V_j \quad (18.3)$$

· sobre problemas de contorno em electrostática,

pr. nevisão soluções analíticas eqs. de Laplace e Poisson veja:

- método das imagens : Secs. 2.1 - 2.5, Jackson ;

- método de separação de variáveis :

· simetria cartesiana : Secs. 2.9 - 2.10, Jackson ;

" esférica : Secs. 3.1 - 3.6, " ;

" cilíndrica : Secs. 3.7 - 3.8, " .

Exemplos : veja lista de problemas ↓.

Exemplo : consideran esfera metálica, raio a , centro = origem

⊕ carga pontual q em $\vec{r}'$, $r' > a$.

Determinan $\Phi(\vec{r})$ pr. $r > a$.

solução via método das imagens ;

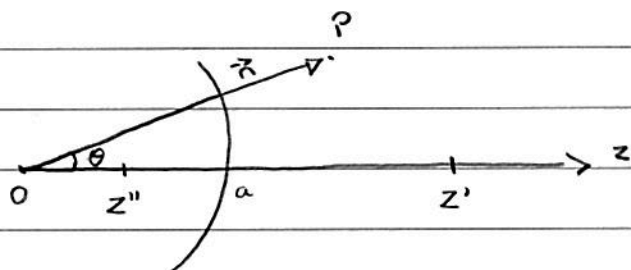
ideia método : determinan valor e posição carga imagem q' ,
 q' é interior esfera, ou c. condições de
 contorno.

hipótese : esfera metálica aterrada $\rightarrow$ c.c. $\Phi(r=a, \theta) = 0$

(c.c. de Dirichlet)

devido à simetria do sistema, vamos consideran inicialmente

$$\vec{r}' = z' \hat{z}$$



: carga imagem
 q' @ $z'' \hat{z}$!

$$\hookrightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - z'\hat{z}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - z''\hat{z}|} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{(r^2 + z'^2 - 2rz'\cos\theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + z''^2 - 2rz''\cos\theta)^{1/2}} \right)$$

$$\text{c.c. : } \Phi(r=a, \theta) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{q/(a^2 + z'^2)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2az'\cos\theta}{a^2 + z'^2}\right)^{1/2}} = \frac{-q'/(a^2 + z''^2)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2az''\cos\theta}{a^2 + z''^2}\right)^{1/2}}, \quad \forall \theta$$

$$\hookrightarrow \frac{2az'}{a^2 + z'^2} = \frac{2az''}{a^2 + z''^2} \rightarrow z'' = z' \text{ (NO GOOD)} \quad \text{e} \quad z'' = \frac{a^2}{z'}$$

$$\text{e} \quad q' = -\frac{a}{z'} q$$

$$\text{caso geral : } z'\hat{z} \rightarrow \vec{n}', \quad q' \rightarrow -\frac{a}{n'} q$$

$$z''\hat{z} \rightarrow \frac{a^2}{n'^2} \vec{n}'$$

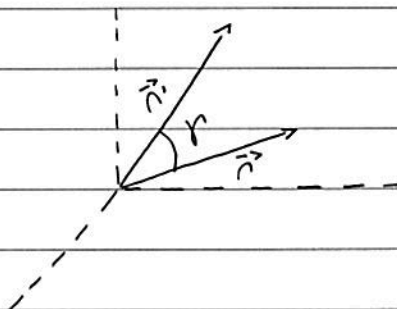
$$\hookrightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{n}'|} - \frac{a/n'}{|\vec{r} - \vec{n}'a^2/n'^2|} \right); \quad n > a \quad (20.1)$$

Lembrar: $\sigma_{\text{ind}}(r, \theta)$ induzida na superfície da esfera,

$$\sigma_{\text{ind}}(r, \theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{n=a} = -\frac{q}{4\pi} \frac{(n'^2 - a^2)}{a(n'^2 + a^2 - 2an'\cos\theta)^{3/2}} \quad (20.2)$$

exercício

onde



$$\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos \theta$$

notas: Eq. (20.1) é sol. eq. de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} q \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad , \quad r, r' > a \quad (21.1)$$

se $q \rightarrow 4\pi\epsilon_0$ em (20.3): $\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$,

i.e., Eq. (20.1) $\rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}')$ p/ simetria esférica!

$$L_> \quad G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a/r'}{|\vec{r} - \vec{r}'a^2/r'^2|} \quad ; \quad r, r' > a \quad (21.2)$$

$$= \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr'\cos\theta\right)^{1/2}}$$

notas: $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$

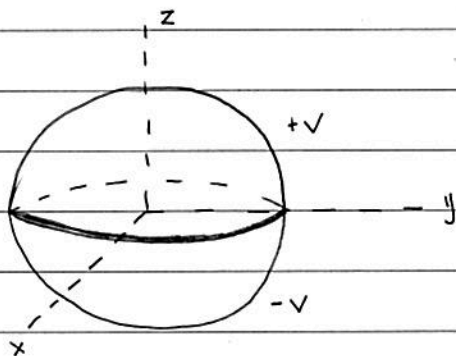
$$G(r=a, \theta, \varphi, \vec{r}') = 0$$

Exemplo: consideramos esfera raio a , centro = origem,

potencial hemisfério superior = $+V$: cte,

" " inferior = $-V$: cte.

Determinar $\Phi(\vec{r})$, $r > a$.



$$: \text{c.c.} : \quad \Phi(a, \theta < \pi/2, \varphi) = +V : \text{cte}$$

$$\Phi(a, \theta > \pi/2, \varphi) = -V$$

Sol.: Eq. (13.2) p/ $\rho(\vec{r}) = 0$ e $G = \text{Eq. (21.2)}$

$$\text{nesse caso} \quad \left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_{n'=a} = (\vec{\nabla}' G) \cdot (-\hat{n}') \Big|_{n'=a} = - \left. \frac{\partial G}{\partial n'} \right|_{n'=a} : \text{Eq. (20.2)}$$

p/ $n' \rightarrow r$!

• sobre os polinômios de Legendre $P_\ell(x)$,

• soluções eq. de Legendre, podem ser escritos como

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell (x^2 - 1)^\ell, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots : \text{Fórmula de Rodrigues} \quad (22.5)$$

$-1 \leq x \leq 1$

Ex.: $P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$

$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$

$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$

Propriedades:

(1) $P_\ell(\pm 1) = (\pm 1)^\ell$

(2) $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$: paridade definida

(3) $\int_{-1}^{+1} dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell, \ell'}$: relação de ortogonalidade

ou

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell, \ell'} \quad (22.6)$$

(4) $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} P_\ell(x) P_\ell(x') = \delta(x-x')$: relação de completude (22.7)

(5) $P_\ell(x)$: conjunto completo de funções,

se $f = f(x)$ é contínua por partes em $[-1; 1]$

$\hookrightarrow f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos \theta)$ (22.8)

onde coeficientes $a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx f(x) P_l(x)$.

(6) verifica-se que

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x); \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (22.9)$$

$0 < t < 1$

↘ Função geradora $P_l(x)$

Obs.: lembrar sol. geral eq. de Laplace (9.3), simetria azimutal,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (22.10)$$

sobre os harmônicos esféricos,

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (22.11)$$

polinômio associado de Legendre

onde $l = 0, 1, 2, \dots$

$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$

nesse caso

$$(1) Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \varphi)$$

$$(2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} :$$

: relação de δ

$$(3) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') :$$

(22.12)

: relação de completude

Ex.: $Y_{00}(\theta, \varphi) = 1/\sqrt{4\pi}$

$$Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta = \sqrt{3/4\pi} z/r$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{3/8\pi} \sin \theta e^{\pm i\varphi} = \mp \sqrt{3/8\pi} (x \pm iy)/r$$

(22.13)

$$Y_{20}(\theta, \varphi) = \sqrt{5/4\pi} (3\cos^2 \theta - 1)/2$$

$$Y_{2,\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{15/8\pi} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2,\pm 2}(\theta, \varphi) = 1/4 \sqrt{15/2\pi} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$$

• Teorema de adição pt harmônicos esféricos,

verifica-se que (veja Sec. 3.6, Jackson)

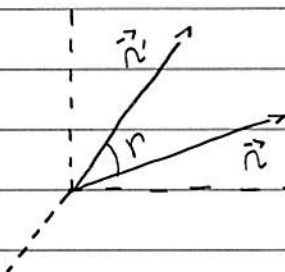
$$P_l(\cos r) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

(22.14)

$$= P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta')$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{+l} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos(m(\varphi - \varphi'))$$

onde



$$\vec{r} : (r, \theta, \varphi)$$

$$\vec{r}' : (r', \theta', \varphi')$$

$$\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos r$$

$$\text{Eq. (13.2): } \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \Phi(a, \theta', \varphi') \underbrace{\frac{a(n^2 - a^2)}{(n^2 + a^2 - 2an \cos \vartheta)}^{3/2}}_{(I)}, \quad n > a$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi/2} \sin \theta' d\theta' (I) = \frac{V}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta' d\theta' (I)$$

(22.1)

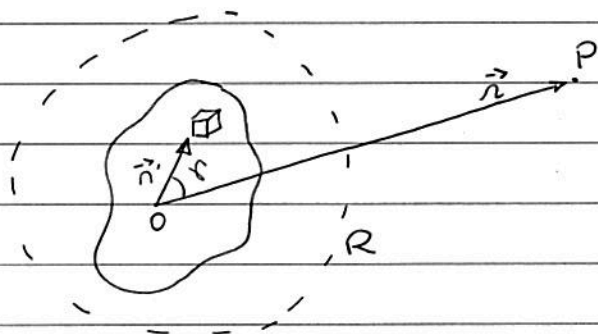
hipótese: $\vec{r} = z\hat{z}$, $z > 0$

$$\hookrightarrow \cos \vartheta = \cos \theta' \text{ e (exercício): } \Phi(z) = V \left(1 - \frac{(z^2 - a^2)}{z(z^2 + a^2)^{1/2}} \right), \quad z > a$$

Obs.: Lembra que, nesse caso, $\Phi(\vec{r})$ também pode ser determinado (exercício) através da Eq. (22.10): sol. geral eq. de Laplace pr simetria azimutal.

• Expansão multipolar (veja Secs. 4.1 - 4.2, Jackson),

considera uma distribuição localizada de cargas, i.e., $\rho(\vec{r}) = 0$ pr $r > R$



vimos que o potencial $\Phi(\vec{r})$ associado a essa distribuição é

$$\text{Eq. (7.3): } \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (22.2)$$

em particular, se $r \gg R$ temos, em 1ª aproximação, que

$$\Phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} : \text{potencial carga pontual} \\ Q @ \text{origem}$$

$$\text{onde } Q = \int d^3r \rho(\vec{r})$$

↳ ideia expansão multipolar: determinar expansão sistemática $\Phi(\vec{r})$, $r \gg R$, em termos n-polos elétricos

$$\text{notar: } |\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma)^{1/2} = r \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'\cos\gamma}{r} \right)^{1/2}$$

$$\text{onde } \hat{r} \cdot \hat{r}' = \cos\gamma$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'\cos\gamma}{r} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos\gamma)$$

Eq. (22.9)

Obs.: como $r \gg R \rightarrow r' < r \rightarrow 0 < t = r'/r < 1$!

$$\hookrightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos\gamma) ; r' < r \quad (23.1)$$

$$\text{Eq. (22.14)} \rightarrow 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \frac{1}{2\ell+1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

Eqs. (22.2) $\oplus$ (23.1):

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell, m} \frac{1}{2\ell+1} \underbrace{\int d^3r' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \rho(\vec{r}')}_{\equiv q_{\ell m} : \text{momentos de multipolo}} \cdot \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \quad (23.2)$$

Eq. (23.2): expansão multipolar $\Phi(\vec{r})$ ~ expansão em potências de $1/r$!

notas: como $(23.2) \propto 1/r$, $r \gg R$

$\hookrightarrow$ primeiros termos série $(23.2) \approx \Phi(\vec{r})!$

sobre os momentos de multipolo gem; utilizando (22.13),
verifica-se que (exercício):

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3r' \rho(\vec{r}') = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q : \text{carga total } q$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3r' z' \rho(\vec{r}') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z : \text{momento dipolo elétrico}$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3r' (x' - iy') \rho(\vec{r}') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y)$$

(24.1)

$$q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3r' (3z'^2 - r'^2) \rho(\vec{r}') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3r' z' (x' - iy') \rho(\vec{r}') = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23})$$

$$q_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int d^3r' (x' - iy')^2 \rho(\vec{r}') = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22})$$

onde $q_{\ell, -m} = (-1)^m q_{\ell m}^*$

$$\vec{p} \equiv \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}) : \text{momento de dipolo elétrico} \quad (24.2)$$

$$Q_{ij} \equiv \int d^3r (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}) : \text{tens\~ao momento de quadrupolo elétrico,} \quad (24.3)$$

tens\~ao ordem 2, tra\~ca nulo

Eq. (24.1) : expans\~ao gem (esf\~erica, ordem ℓ) em termos das correspondentes componentes cartesianas.

notas:

• termo $l=0$, Eq. (23.2):

$$\Phi_{\text{mon}}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0 n} q_{00} Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{n}$$

• termo $l=1$, Eq. (23.2):

Eqs. (22.13) e (24.1)

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) &= \frac{1}{3\epsilon_0 n^2} \left(q_{10} Y_{10}(\theta, \varphi) + q_{11} Y_{11}(\theta, \varphi) + q_{1,-1} Y_{1,-1}(\theta, \varphi) \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{n^3} \end{aligned} \quad (25.1)$$

...

Exercício → Eq. (23.2):

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{n} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{n^3} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{n^5} + \dots \right) \quad (25.2)$$

: expansão multipolar

em coordenadas cartesianas!

• sobre o termo de dipolo (25.1),

$$\text{hipótese: } \vec{p} = p \hat{z} \rightarrow \Phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{n^2}$$

$$\text{como } \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r})$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\hat{n} \partial_n \Phi_{\text{dip}} - \frac{\hat{\theta}}{n} \partial_\theta \Phi_{\text{dip}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 n^3} (2\cos\theta \hat{n} + \sin\theta \hat{\theta})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 n^3} (3(\vec{p} \cdot \hat{n}) \hat{n} - \vec{p}), \quad (25.3)$$

pois : $\hat{n} = \hat{x} \sin\theta \cos\varphi + \hat{y} \sin\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta$ vetores unitários,
 $\hat{\theta} = \hat{x} \cos\theta \cos\varphi + \hat{y} \cos\theta \sin\varphi - \hat{z} \sin\theta$: coord.
 $\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin\varphi + \hat{y} \cos\varphi$ esféricas (26.1)

e $\vec{p} = p\hat{z} \rightarrow \vec{p} \cdot \hat{n} = p \cos\theta$
 $\vec{p} \cdot \hat{\theta} = -p \sin\theta$; $\vec{p} \cdot \hat{\varphi} = 0$

• sobre Eqs. (25.1) e (25.3),

(i) potencial e campo elétrico dipolo $\vec{p} = q\vec{d}$ localizado em $\vec{r}_0 = 0$, p/ p/ as $\vec{r}$ tais que $r \gg d$;
 caso geral, dipolo $\vec{p} = q\vec{d}$ em $\vec{r}_0$, temos que

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} ; r \gg d \quad (26.2)$$

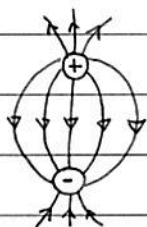
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3(\vec{p} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{p})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} ; \hat{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

(ii) p/ um dipolo elétrico pontual $\vec{p}$ em $\vec{r}_0$
 (veja Sec. 4.2, Zangwill), temos que

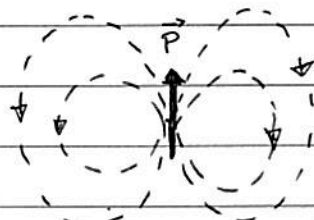
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} ; \forall \vec{r} ! \quad (26.3)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right)$$

Obs.: comparan linhas de campo :



: dipolo



: dipolo
pontual.

Obs.: (1) Eqs. (26.3) válidas $\forall \vec{r}$;

(2) termo $\propto \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ em $\vec{E}(\vec{r})$ está relacionado ao fato:

• se $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ é o campo elétrico associado a uma distribuição de carga $\rho(\vec{r})$ e esfera raio R , volume V

$$\hookrightarrow \vec{p} = -3\epsilon_0 \int_V d^3r \vec{E}(\vec{r}) : \text{momento de dipolo} \quad (27.1)$$

elétrico $\sim \rho(\vec{r})$

(veja pg. 27.1 p/ detalhes)

Exercício: verifiquem que (26.3) $\Leftrightarrow$ (27.1).

Obs.: considerem $\vec{r}_0 = 0$ e lembrem que é necessário escrever $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ em termos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ p/ calcular a integral!

• energia distribuição de cargas sob $\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r})$,

considerem uma dist. de cargas $\rho(\vec{r})$ sob campo externo $\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r})$.

$$\text{Eq. (15.1)} : W = \int d^3r \rho(\vec{r}) \Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) : \text{energia eletrostática} \quad (27.2)$$

do sistema

(comparem Eq. (16.2))

hipótese: $\Phi_{\text{ext}}(\vec{r})$ "varia lentamente" na região tol que $\rho(\vec{r}) \neq 0$

$\hookrightarrow$ podemos considerar a expansão Φ_{ext} em série de Taylor:

$$\Phi_{\text{ext}}(\vec{r}) \approx \Phi_{\text{ext}}(0) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 \Phi_{\text{ext}}(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots$$

$\swarrow$ origem, escolha arbitrária e $\rho(\vec{r})$!

$$\approx \Phi_{\text{ext}}(0) - \vec{r} \cdot \vec{E}_{\text{ext}}(0) - \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}(0) + \dots$$

sobre Eq. (27.1),

considerar distribuição de cargas localizada $\rho(\vec{r})$ e
esfera raio R , centro = origem:

$$\int_V d^3r \vec{E}(\vec{r}) = - \int_V d^3r \vec{\nabla} \Phi = - \oint_S \Phi(\vec{r}) d\vec{S} =$$

$\swarrow$ $\vec{E}$ devido $\rho(\vec{r})$ $\searrow$ esfera raio R
 $\swarrow$ volume esfera R

$$= - \oint_S \Phi(\vec{r}) R^2 d\Omega \hat{n} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} R^2 \int d^3r' \rho(\vec{r}') \underbrace{\oint_S \frac{d\Omega \hat{n}}{|\vec{R} - \vec{r}'|}}_{(I)}$$

Eq. (7.3) $\uparrow$

verifica-se que (veja abaixo):

$$(I) = \frac{4\pi}{3} \frac{R^3}{R^2} \hat{n}' ; \begin{cases} R < r' \text{ e } R > r', & r' < R \\ R < R \text{ e } R > r', & R < r' \end{cases}$$

(i) se $\rho(\vec{r}) \subset$ esfera $R \rightarrow R < r' \text{ e } R > r'$

$$\int_V d^3r \vec{E}(\vec{r}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} R^2 \cdot \frac{4\pi}{3} \frac{1}{R^2} \underbrace{\int d^3r' r' \hat{n}' \rho(\vec{r}')}_{\vec{p}} = -\vec{p}/3\epsilon_0 : \text{Eq. (27.1)}$$

(ii) se $\rho(\vec{r}) \not\subset$ esfera $R \rightarrow R < R$ e

$$\int_V d^3r \vec{E}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{r'^2} (-\hat{n}')}_{\vec{E}(\vec{r}=0)}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{4\pi R^3/3} \int d^3r \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}=0) \quad (27.4)$$

valor médio $\vec{E}$ sob volume esfera!

sobre a integral (3),

Eq. (23.1) pode ser escrita como

$$\frac{1}{|\vec{n} - \vec{n}'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{n_{<}^l}{n_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) ; \quad n_{<} = \min(n, n') \\ n_{>} = \max(n, n')$$

Eqs. (26.1) $\oplus$ (22.13) :

$$\hat{n} = \hat{x} \sin\theta \cos\varphi + \hat{y} \sin\theta \sin\varphi + \hat{z} \cos\theta \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,1}(\theta, \varphi) - Y_{1,-1}(\theta, \varphi)) \hat{x} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (Y_{1,1}(\theta, \varphi) + Y_{1,-1}(\theta, \varphi)) \\ + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \varphi) \hat{z}$$

Como,

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm'}(\theta, \varphi) \\ = (-1)^m (-1)^{m'} Y_{l,-m}(\theta', \varphi') \underbrace{\int \sin\theta d\theta d\varphi Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l,-m'}^*(\theta, \varphi)}_{\delta_{l,l} \delta_{m,-m'}} \\ = \delta_{l,l} \delta_{m,-m'} Y_{l,m'}(\theta', \varphi')$$

$$L_{>} (3) = \frac{4\pi}{2 \cdot 3 + 1} \cdot \frac{n_{<}}{n_{>}^{3+1}} \hat{n}' \quad (27.5)$$

como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, podemos adicionar $\frac{1}{6} \nabla^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ em (27.3) e

$$L_> W \approx \phi_{ext}(0) \int d^3r \rho(\vec{r}) - \underbrace{\int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}) \cdot \vec{E}_{ext}(0)}_{\vec{p}}$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{ij} \underbrace{\int d^3r (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho(\vec{r})}_{Q_{ij}} E_{ext,j}(0) + \dots$$

$$L_> W \approx q \phi_{ext}(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}(0) - \frac{1}{6} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial E_{ext,j}(0)}{\partial x_i} + \dots \quad (28.1)$$

Eq. (28.1): indica o acoplamento entre os momentos de n. polos de $\rho(\vec{r})$ e campo elétrico externo!

notas: Eq. (28.1) permite determinar a energia de interação entre dois dipolos $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$, localizados em $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$,

$$L_> W_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}_2) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \vec{p}_2 \cdot (3(\vec{p}_1 \cdot \hat{n}) \hat{n} - \vec{p}_1)$$

Eq. (26.2) $\nearrow$

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} - 3 \frac{\vec{p}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \vec{p}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \right) \quad (28.2)$$

• sobre a corrente elétrica,

Lembrar: $\vec{J} = q n \vec{v}$: (vetor) densidade de corrente elétrica (29.1)

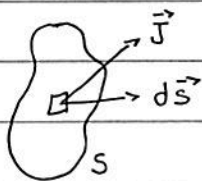
onde,

q : carga pontual

n : concentração de portadores = #cargas livres / volume

$\vec{v}$: velocidade de deriva dos portadores

pr superfície arbitrária S , temos que



$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$: intensidade corrente elétrica (29.2)

se $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$: campo vetorial (corrente / área)

↳ Eq. (29.2) : I = fluxo $\vec{J}$ através sup. S .

• $\vec{J}$ permite expressar princípio de conservação da carga elétrica, i.e.,

$\partial_t \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0$: eq. de continuidade (29.3)

caso particular : se $\rho = \rho(\vec{r})$

↳ $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$: condição pr corrente estacionária (29.4)

notar : se $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$: campo vetorial de velocidades que descreve o movimento dos portadores associados a $\rho(\vec{r}, t)$

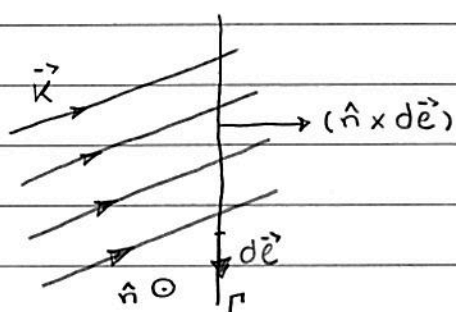
↳ Eq. (29.1) : $\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$ (29.5)

se movimento pontadones restrito a uma superficie,

Eq. (29.5) $\rightarrow \vec{K} = \sigma \vec{U}$: densidade superficial de corrente (30.1)

$\downarrow$ " " " cargas

Eq. (29.2) :



$$I = \int_V \vec{K} \cdot (\hat{n} \times d\vec{S})$$

(30.2)

$$= \int_V d\vec{S} \cdot (\vec{K} \times \hat{n})$$

Revisão magnetostática (veja Secs. 5.2 - 5.4, Jackson),

eletrostática : $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ pode ser determinado através da força $\vec{F}_E$ que atua sob carga q pois $\vec{F}_E = q\vec{E}$.

$\hookrightarrow$ definição campo magnético $\vec{B}$: procedimento similar

considerar carga q , velocidade $\vec{v}$, sob campo magnético $\vec{B}$;
verifica-se que (experimento) :

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} : \text{força magnética sob} \quad (30.3)$$

carga q em movimento

caso geral, carga q sob $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

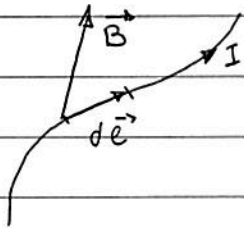
$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) : \text{Lei de Lorentz} \quad (30.4)$$

vetor polar

vetor axial (veja Sec. 1.8, Zangwill)

Obs.: $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B})$: sistema Gaussiano

- considera fio $\oplus$ corrente elétrica estacionária I sob campo magnético (externo) $\vec{B}$;
- verifica-se a partir de (30.3) que:



$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{: força devido } \vec{B} \quad (31.1)$$

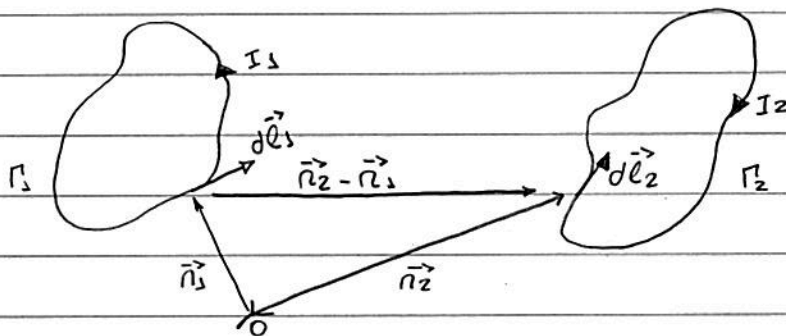
sob segmento $d\vec{l}$ do fio

$\hookrightarrow$ p/ circuito fechado Γ :

$$\vec{F} = I \oint_{\Gamma} d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (31.2)$$

• Lei de Biot - Savart,

considera circuitos Γ_1 e $\Gamma_2 \oplus$ correntes estacionárias I_1 e I_2 ,



verifica-se que (experimento) a força sob Γ_2 devido Γ_1 :

$$\vec{F}_{21} = K I_1 I_2 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times (\vec{n}_2 - \vec{n}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (31.3)$$

onde K de proporcionalidade $K \sim$ sistema de unidades

- S.I. : $\kappa = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N/A}^2$

μ_0 $\swarrow$ permeabilidade magnética do vácuo

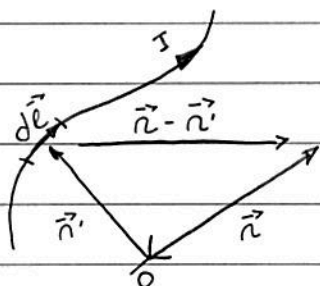
- Gaussiano : $\kappa = 1/c$

Eq. (31.3) pode ser escrita como

$$\vec{F}_{21} = I_2 \oint_{\Gamma_2} d\vec{\ell}_2 \times \left(\underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{n}_2 - \vec{n}_1)}{|\vec{n}_2 - \vec{n}_1|^3}}_{\text{Eq. (32.1)}} \right) \quad (32.1)$$

Eq. (32.1) $\rightarrow \vec{B}(\vec{n}_2)$: campo magnético $\sim \Gamma_1$!

Dessa forma,



$$\vec{B}(\vec{n}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{n} - \vec{n}')}{|\vec{n} - \vec{n}'|^3} \quad (32.2)$$

: Lei de Biot-Savart

Exercício : mostrar que (32.1) pode ser escrita como

$$\vec{F}_{21} = - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{|\vec{n}_2 - \vec{n}_1|^3} \frac{(\vec{n}_2 - \vec{n}_1)}{|\vec{n}_2 - \vec{n}_1|^3}$$

e verificar que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$!

Generalização Eq. (32.2) p/ densidade de corrente $\vec{J}(\vec{n})$:

$$\vec{B}(\vec{n}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3n' \frac{\vec{J}(\vec{n}') \times (\vec{n} - \vec{n}')}{|\vec{n} - \vec{n}'|^3} \quad (32.3)$$

• Propriedades do campo magnetostático $\vec{B}(\vec{r})$,

vamos analisar duas características de $\vec{B}(\vec{r})$:

(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \sim$ fluxo $\vec{B}$ através sup. S

(ii) $\vec{\nabla} \times \vec{B} \sim$ circulação $\vec{B}$ ao longo curva Γ

(i) divergente $\vec{B}$,

$$\text{como } \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \equiv$$

$$\text{identidade } \vec{\nabla} \times (f \vec{A}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} f)$$

$$\hookrightarrow \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right),$$

$$\text{pois } \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') = 0!$$

$$\text{Eq. (32.3)} : \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{J}(\vec{r}') \quad (33.1)$$

como p/ campo vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad : \quad \text{N\o{o} fontes de campo magn\etico} \quad (33.2)$$

na forma de

"cargas magn\eticas" = monopolo magn\etico

forma integral:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) d^3 r = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad : \quad \text{fluxo } \vec{B} \text{ atrav\es sup. fechada } S \quad (33.3)$$

Eq. (5.2)

(iii) notacional $\vec{B}$.

$$\text{Eq. (33.1)} : \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (34.1)$$

como p/ campo vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) : \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \underbrace{\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right)}_{\frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} - \underbrace{\nabla^2 \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\frac{\vec{J}(\vec{r}') \nabla^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \underbrace{\frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} + \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

$$= -\vec{\nabla}' \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

= 0, pois $\vec{J}$ é estacionária!

$$= \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{s}$$

$\hookrightarrow 0$, p/ sup. $\rightarrow +\infty$!

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) : \text{Lei de Ampère} \quad (34.2)$$

obs.: (*) : identidade $\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f)$

forma integral:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

Eq. (6.4) curva = fronteira sup. S corrente total através sup. S

$$\hookrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I \quad : \text{circulação campo } \vec{B} \text{ ao longo curva } \Gamma \quad (35.1)$$

Eq. (35.1): útil determinação campo magnético $\vec{B}$ p/ distribuições simétricas de corrente.

↳ Resumo propriedades campo (vetorial) magnetostático $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$,

$$(1) \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

(35.2)

$$(2) \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

Obs.: Eqs. (35.2), sistema Gaussiano: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$

• Potencial vetor,

• lembren eletrostática: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

↳ é interessante introduzir função escalar $\phi = \phi(\vec{r})$ tal que $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$

• Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e p/ campo vetorial $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

↳ podemos escrever:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \text{potencial vetor} \quad (35.3)$$

Lembrar: definição potencial escalar Φ não é única:

$$\text{se } \Phi'(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) + \Phi_0$$

↳ cte arbitrária

$$\hookrightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla}\Phi' = -\vec{\nabla}(\Phi + \Phi_0) = \vec{E}, \text{ i.e., } \Phi \text{ e } \Phi' \rightarrow \text{mesmo } \vec{E}!$$

de modo análogo: definição $\vec{A}$ não é única:

$$\text{se } \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r})$$

(36.1)

↳ função escalar arbitrária

$$\hookrightarrow \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\psi)}_{=0} = \vec{B}, \text{ i.e., } \vec{A} \text{ e } \vec{A}' \rightarrow \text{mesmo } \vec{B}!$$

Eq. (36.1) :- transformação de gauge;

- liberdade que permite, em particular, escolher $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
(veja abaixo)

notas: Eqs. (33.1) e (35.3)

$$\hookrightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}) \quad (36.2)$$

Eq. (35.3) $\oplus$ Lei de Ampère (34.2):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

como Eq. (36.1) permite escolha: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (36.3)

: Gauge de Coulomb

$$\hookrightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad : \text{eq. de Poisson p/ componentes cartesianas de } \vec{A} \quad (37.1)$$

Eq. (7.3) permite determinar solução Eq. (37.1) :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d^3 r' \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (37.2)$$

nesse caso, $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{J}(\vec{r}) = 0!$

e $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, pois $\vec{\nabla} \cdot \text{Eq. (37.2)} = 0$, veja eqs. acima (34.2)

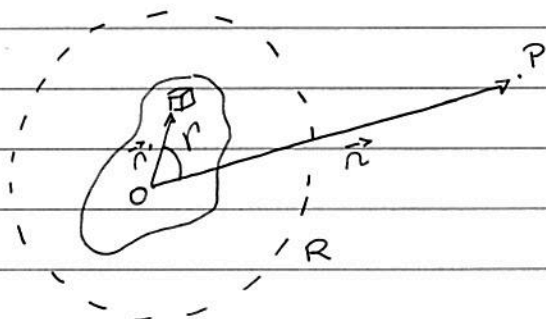
Obs.: Teorema de Helmholtz, pg. 8.1,

Eqs. (8.5) e (35.2) :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{B}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= \underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{= \vec{A}(\vec{r})} : \text{OK c/ (37.2)!} \end{aligned}$$

· Expansão multipolar do potencial vetor,

considerar uma distribuição localizada de corrente estacionária $\vec{J}(\vec{r})$, i.e. $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ e $\vec{J}(\vec{r}) = 0$ p/ $r > R$.



se $r \gg R \rightarrow$ potencial vetor $\vec{A}$ pode ser expandido em potências de $1/r$, de modo análogo ao potencial escalar Φ , veja pg. 22

$$\text{Eq. (23.1)} : \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l \geq 0} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) ; \quad r' < r$$

$$\hat{r}' \cdot \hat{r} = \cos \gamma$$

$$\text{em (37.2)} : \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l \geq 0} \frac{1}{r^{l+1}} \int d^3r' r'^l \vec{J}(\vec{r}') P_l(\cos \gamma) \quad (38.1)$$

: expansão multipolar $\vec{A}(\vec{r})$!

• Vamos analisar os dois primeiros termos da série (38.1),

identidade útil : p/ funções escalares $f = f(\vec{r})$ e $g = g(\vec{r})$ e função vetorial $\vec{J}(\vec{r})$ (localizada), temos que

$$\int d^3r \left(f \vec{J} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{J} \cdot \vec{\nabla} f + f g (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) \right) = 0 \quad (38.2)$$

• termo $l=0$, Eq. (38.1) :

$$\vec{A}_{\text{mon}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') = 0, \quad (38.3)$$

$$\text{pois (38.2) p/ } f=1, g=r', \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = 0 \rightarrow \int d^3r' J_i(\vec{r}') = 0 !$$

OK c/ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$: não obs. monopolo magnético.

• termo $l=1$, Eq. (38.1) :

$$\vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \int d^3r' r' \vec{J}(\vec{r}') \underbrace{\cos \gamma}_{\hat{r} \cdot \hat{r}'} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') \quad (38.4)$$

notas: $A_i \propto \int d^3 r' (\vec{n} \cdot \vec{n}') J_i(\vec{r}')$

$= n_j \int d^3 r' n'_j J_i$: convenção soma sob índices repetidos

$= \frac{1}{2} n_j \int d^3 r' (n'_j J_i + n'_i J_j) = \frac{1}{2} n_j \int d^3 r' (n'_j J_i - n'_i J_j)$

$(*) \uparrow$ $= -\frac{1}{2} \left(\vec{n} \times \int d^3 r' \vec{n}' \times \vec{J}(\vec{r}') \right)_i$ (39.1)

Definindo: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3 r \vec{n} \times \vec{J}(\vec{r})$: momento de dipolo magnético (39.2)

$\hookrightarrow \vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \quad r > R$ (39.3)

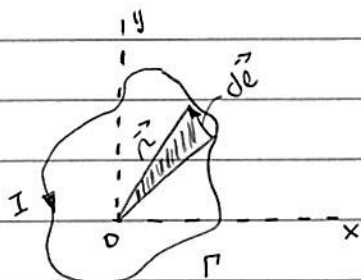
verifica-se que (veja pg. 39.1):

$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{m})$, $r > R$ (39.4)

Obs.: (i) Comparar Eqs. (39.3) e (39.4) c/ Eqs. (25.1) e (25.3);

(ii) identidades (+) e (++) , veja pg. 39.1 ;

(iii) Eq. (39.2) p/ corrente I em um circuito plano e fechado Γ :



$\vec{m} = \frac{1}{2} I \oint_{\Gamma} \vec{r} \times d\vec{e}$ (39.5)

como $\frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{e}| = dS$: área $\triangle$!

$\hookrightarrow \vec{m} = I \cdot (\text{Área circuito}) \hat{z}$

• sobre identidades Eq. (39.1),

$$(i) \text{ Eq. (38.2) p/ } f = n'_i, g = n'_j, \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{n}') = 0$$

$$\hookrightarrow \int d^3 n' (n'_i J_j + n'_j J_i) = 0 \quad : (*)$$

$$(ii) (\vec{n} \times (\vec{n}' \times \vec{J}))_i = \epsilon_{ijk} n_j (\vec{n}' \times \vec{J})_k = \epsilon_{ijk} n_j \epsilon_{k\ell m} n'_\ell J_m$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} n_j n'_\ell J_m \quad : \text{ soma sob índices repetidos!}$$

$$= \epsilon_{kij} \epsilon_{k\ell m} n_j n'_\ell J_m = (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) n_j n'_\ell J_m$$

$\uparrow$ identidade

$$= n_j (n'_i J_j - n'_j J_i) \quad : (**)$$

• sobre $\vec{B}_{\text{Dip}}$,

$$\text{p/ } \vec{m} = \text{cte} : \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{m} \times \frac{\vec{n}}{n^3} \right) = -(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{n}}{n^3} + \vec{m} \underbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{n}}{n^2} \right)}_{= 4\pi \delta(\vec{n}) = 0 \text{ p/ } \vec{n} \neq 0!} =$$

$$= -m_i \partial_i \left(\frac{n_j \hat{e}_j}{n^3} \right) = -\frac{m_i}{n^3} \underbrace{(\partial_i n_j)}_{\delta_{ij}} \hat{e}_j - m_i n_j \hat{e}_j \underbrace{\partial_i (1/n^3)}_{-3n_i/n^5; n \neq 0!}$$

$$= \frac{3}{n^5} (m_i n_i) (n_j \hat{e}_j) - \frac{1}{n^3} m_i \hat{e}_i \quad : \text{ Eq. (39.4) }$$

sobre Eq. (40.2),

de modo análogo ao caso eletrostático, pg. 27.1,
considerar densidade de corrente localizada $\vec{J}(\vec{r})$ e
esfera raio R , centro = origem:

$$\int_V d^3r \vec{B}(\vec{r}) \quad \begin{array}{l} \swarrow \vec{B} \text{ devido } \vec{J}(\vec{r}) \\ \searrow \text{volume esfera } R \end{array} = \int_V d^3r \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \oint_S \hat{n} \times \vec{A}(\vec{r}) ds = \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \text{esfera raio } R \end{array}$$

$$= \oint_S \hat{n} \times \vec{A}(\vec{r}) R^2 d\Omega = \frac{\mu_0 R^2}{4\pi} \int d^3r' \oint_S d\Omega \frac{\hat{n} \times \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{R}\hat{n} - \vec{r}'|}$$

Eq. (37.2) $\uparrow$

$$= - \frac{\mu_0 R^2}{4\pi} \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') \times \oint_S d\Omega \frac{\hat{n}}{|\vec{R}\hat{n} - \vec{r}'|} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{Eq. (27.5)} \\ \searrow \end{array} = - \frac{\mu_0 R^2}{3} \int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') \times \hat{n}' \frac{\Omega_c}{R^2}$$

(i) se $\vec{J}(\vec{r}) \in$ esfera $R \rightarrow r < r', r' = R$ e

$$\int_V d^3r \vec{B}(\vec{r}) = \frac{2\mu_0}{3} \cdot \frac{1}{2} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') = \frac{2\mu_0}{3} \vec{m} \quad (39.6)$$

$\uparrow$ momento de dipolo $\sim \vec{J}(\vec{r})$!

(ii) se $\vec{J}(\vec{r}) \notin$ esfera $R \rightarrow r < R, r' = r'$ e

$$\int d^3r \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int d^3r' \vec{J}(\vec{r}') \times (-\hat{n}')}_{\vec{B}(\vec{r}=0)}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{4\pi R^3/3} \int d^3r \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}=0) \quad (39.7)$$

comparar c/ eqs. pg. 27.1 !

• sobre as Eqs. (39.3) e (39.4),

(i) potencial vetor e campo magnético dipolo $\vec{m}$ localizado em $\vec{r}_0 = 0$ e pto $\vec{r}$ tais que $r \gg R$;

caso geral, $\vec{m} @ \vec{r}_0$,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} ; r \gg R \quad (40.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(3(\vec{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{m})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} ; \hat{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

(ii) pr um dipolo magnético pontual $\vec{m}$ em $\vec{r}_0$
(veja Sec. 11.2, Zangwille), temos que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} ; p! \neq \vec{r}! \quad (40.2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \frac{8\pi}{3} \vec{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right),$$

onde o termo $\propto \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \sim \text{Eq. (39.6)}$!

• relação entre momentos magnético e angular orbital,

considerar N cargas pontuais q_i cujas trajetórias = $\vec{r}_i(t)$,

$$\hookrightarrow \rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \quad (40.3)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

$$p! \text{ fixo} : \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial n_{i,k}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial n_{i,k}} = \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i$$

como $\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = -\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

$$\hookrightarrow \partial_t \rho = \sum_{i=1}^N (-1) q_i v_i \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = -\vec{\nabla} \left(\sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right)$$

pois $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = 0$ ↑ $= \vec{J}(\vec{r}, t)$

: eq. de continuidade (29.3)

como $\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ (41.1)

$\hookrightarrow$ Eq. (39.2) : $\vec{m} = \sum_{i=1}^N q_i \cdot \frac{1}{2} \cdot \int d^3r (\vec{r} \times \vec{v}_i) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

como $\vec{L}_i = m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$: momento angular orbital q_i

$$\hookrightarrow \vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i}{m_i} \vec{L}_i$$
 (41.2)

hipótese : $\frac{q_i}{m_i} = \frac{q}{m}$, $\forall i$

$$\hookrightarrow \vec{m} = \frac{q}{2m} \sum_i \vec{L}_i = \frac{q}{2m} \vec{L}$$
 (41.3)

• Eletrodinâmica (veja Secs. 5.15 - 5.17, Jackson)

ideia: considerar $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

duas etapas:

(1) indução eletromagnética: Lei de Faraday: $\partial_t \vec{B} \rightarrow \vec{E}$

(2) Lei de Ampère-Maxwell: $\partial_t \vec{E} \rightarrow \vec{B}$

• inicial: lembrar definição força eletromotriz (emf) em circuito Γ :

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (42.1)$$

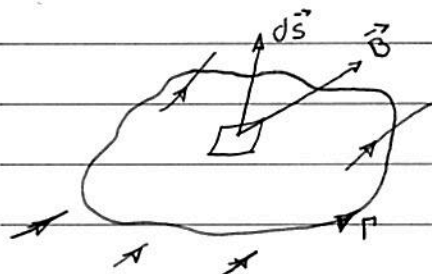
notas: p/ campo eletrostático $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \rightarrow \mathcal{E} = 0$, i.e., $\vec{E}$ em Eq. (42.1): origem não eletrostática ou não pode ser obtido através Lei de Coulomb.

(1) indução,

Faraday: 1ª observações relação entre campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dependentes do tempo.

Lei de Faraday: variação temporal
fluxo campo $\vec{B}$
através circuito Γ $\rightarrow$ $\exists$ força eletromotriz /
corrente induzida
em Γ

em detalhes: considerar circuito orientado Γ e superfície S
(fronteira = Γ) sob campo magnético $\vec{B}$:



notas: orientação Γ e sentido $d\vec{S}$:
"regra mão direita"

como $\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$: fluxo campo $\vec{B}$ através sup. S

e se $\mathcal{E}$ é a emf induzida em Γ :

$$\mathcal{E} = -K \frac{d\Phi_B}{dt} \quad : \text{Lei de Faraday} \quad (43.1)$$

↙ cte, depende sistema de unidades, entendendo
módulo $K \sim$ invariância de Galileu (veja Sec. 5.15, Jackson).

- S.I. : $K = 1$

- Gaussiano : $K = 1/c$

sobre sinal "-" em (43.1) : indica que a corrente induzida em Γ está no sentido oposto à variação de Φ_B

$\sim$ Lei de Lenz : o sentido da emf induzida $\mathcal{E}$ é tal que a corrente induzida $I \rightarrow$ campo magnético induzido $\vec{B}_{ind}$ que se opõe à mudança do fluxo magnético. (43.2)

• Eq. (43.1) p/ Γ fixo, campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ w.r.t. mesmo Ref,

$$\text{teorema Stokes} \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad , \quad \text{curva } \Gamma \text{ fixa} \quad (43.3)$$

$$(6.4) \quad \oint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\hookrightarrow \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot d\vec{s} = 0$$

como a sup. S definida por Γ é arbitrária

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 : \text{Lei de Faraday} \quad (44.1)$$

(forma diferencial)

notas:

(1) curva Γ considerada acima é arbitrária, não necessariamente corresponde circuito elétrico (fio)

$\hookrightarrow$ (44.1) : relação geral entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$;

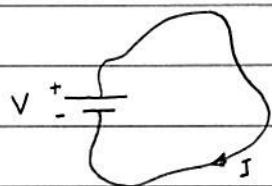
(2) Eq. (44.1) : generalização $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$.

Obs. : Eq. (44.1), sistema Gaussiano : $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

• Energia magnética,

ideia : determinar a energia necessária p/ estabelecer $\vec{B}$,

considerar circuito, resistência R e fonte externa V :



$$: V + \mathcal{E} = RI$$

$\hookrightarrow$ emf induzida

$\hookrightarrow$ " fonte externa

trabalho feito por V sob $dq = I dt$:

$$dW = V dq = (RI - \mathcal{E})(I dt) = -\mathcal{E} I dt + RI^2 dt = \frac{d\Phi}{dt} I dt + RI^2 dt$$

energia liberada, e feito Joule. $\swarrow$

definindo:

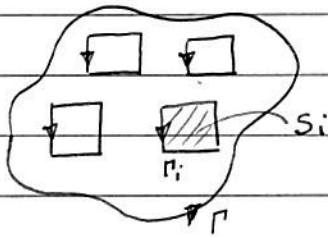
$dW = I d\Phi$: trabalho realizado pela fonte externa, contrário

emf induzida : energia necessária

p/ estabelecer $\vec{B}$!

(44.2)

considerar: circuito $\Gamma = \sum_i$ circuitos orientados Γ_i



Eq. (44.2): $\delta W_i = I \int_{S_i} \delta \vec{B} \cdot d\vec{S}$; W fonte externa $\sim$ variação $\delta \vec{B}$
campo magnético

$$\hookrightarrow \delta W_i = I \int_{S_i} (\vec{\nabla} \times \delta \vec{A}) \cdot d\vec{S} = I \oint_{\Gamma_i} \delta \vec{A} \cdot d\vec{e}$$

$$\hookrightarrow \delta W = \sum_i \delta W_i = \sum_i \oint_{\Gamma_i} \delta \vec{A} \cdot (I d\vec{e}) \xrightarrow[\text{vol. corrente}]{\text{p/ distribuição}} \int d^3r \delta \vec{A} \cdot \vec{J}$$

Lei de Ampère

(34.2) $= \frac{1}{\mu_0} \int d^3r \delta \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

como identidade: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \vec{Q} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{P}) - \vec{P} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Q})$ (45.1)

$$\hookrightarrow \delta W = \frac{1}{\mu_0} \int d^3r \underbrace{\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \delta \vec{A})}_{\vec{B} \cdot \delta \vec{B} = \frac{1}{2} \delta(B^2)} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \delta \vec{A})}_{\text{p/ correntes } \rightarrow 0 \text{ localizadas}}$$

$$\hookrightarrow \delta W = \delta \left(\frac{1}{2\mu_0} \int d^3r B^2 \right)$$

integrando sob $\vec{B}$: $0 \rightarrow B$: $W = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r |\vec{B}(\vec{r})|^2$: energia (45.2)
magnética

notas:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \xrightarrow{(45.1)} \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \xrightarrow{(34.2)} \frac{1}{2} \int d^3r \vec{J} \cdot \vec{A}$$

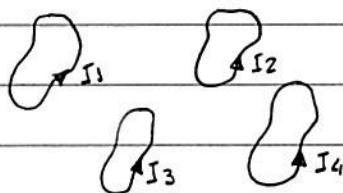
$\hookrightarrow W = \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$: energia armazenada distribuição corrente estacionária $\vec{J}(\vec{r})$

(46.1)

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Obs.: comparar Eqs. (45.2) e (46.1) c/ (16.3) e (16.2) !

considerar: sistema N circuitos Γ_i com correntes estacionárias I_i , vácuo:



Eq. (46.1) pode ser escrita como: integral apenas sob Γ_j !

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N \int d^3\vec{r}_i \sum_{j=1}^N \int d^3\vec{r}_j \frac{\vec{J}(\vec{r}_i) \cdot \vec{J}(\vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^N M_{ij} I_i I_j \quad (46.2)$$

onde

$$L_i = \frac{\mu_0}{4\pi I_i^2} \int d^3\vec{r}_i \int d^3\vec{r}_i' \frac{\vec{J}(\vec{r}_i) \cdot \vec{J}(\vec{r}_i')}{|\vec{r}_i - \vec{r}_i'|} \quad : \text{auto-indutância}$$

(46.3)

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi I_i I_j} \int d^3\vec{r}_i \int d^3\vec{r}_j \frac{\vec{J}(\vec{r}_i) \cdot \vec{J}(\vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad : \text{indutância mútua} \quad i \neq j$$

notar: $M_{ij} = M_{ji}$!

comparar Eqs. (18.3) e (46.3).

notas: p/ circuitos Γ_i e $\Gamma_j \oplus$ área seção $\perp$ fio $\rightarrow 0$, temos que

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi I_i I_j} \oint_{\Gamma_i} \oint_{\Gamma_j} \frac{(I_i d\vec{\ell}_i) \cdot (I_j d\vec{\ell}_j)}{|\vec{n}_i - \vec{n}_j|}$$

como Eq. (37.2): $A_j(\vec{n}_i) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \frac{I_j d\vec{\ell}_j}{|\vec{n}_i - \vec{n}_j|}$: $\vec{A}$ em Γ_i devido Γ_j

$$\hookrightarrow M_{ij} = \frac{1}{I_j} \oint_{\Gamma_i} d\vec{\ell}_i \cdot \vec{A}_j(\vec{n}_i) = \frac{1}{I_j} \underbrace{\int_{S_i} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_j(\vec{n}_i)) \cdot d\vec{S}_i}_{\Phi_{ij} : \text{fluxo através } \Gamma_i \text{ devido } \Gamma_j}$$

$\hookrightarrow M_{ij} = \Phi_{ij} / I_j$: definição inicial indutância mútua!

(2) Lei de Ampère-Maxwell : corrente de deslocamento,

Até o momento, eqs. fundamentais EM, vácuo, (SI):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad : \text{Lei de Gauss} \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad : \text{ausência monopolo magnético} \quad (33.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad : \text{Lei de Faraday} \quad (44.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad : \text{Lei de Ampère} \quad (34.2)$$

lembrar: Eqs. (5.1), (33.2) e (34.2) : determinadas p/ campos estáticos

Eq. (44.1) : " " " dependentes t

notas: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (-\partial_t \vec{B}) = -\partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0,$

↑ hipótese: (33.2) ou p/ $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

(veja Sec. 4.4, Marion)

consistente c/ propriedade $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ p/ $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$;
entretanto,

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) = 0 : \text{ou apenas p/} \\ \text{correntes estacionárias!}$$

↳ é necessário generalizar (34.2) p/ campos/correntes dependentes t .

Maxwell: conexão Lei de Ampère,

Lembrar: $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t) \sim$ eq. de continuidade (29.3),

Eq. (29.3) ⊕ Lei de Gauss (5.1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) = 0$$

↑ hipótese: Eq. (5.1) ou p/ $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$

↳ p/ generalização (34.2): $\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{J} : \text{Lei de Ampère-Maxwell} \quad (48.1)$$

notas: (1) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) = 0$, ou;

(2) se $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$: Eq. (48.1) $\rightarrow$ (34.2)!

Obs.: Eq. (48.1), sistema Gaussiano: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}$

forma integral:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \underbrace{\mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}}_I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \partial_t \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\hookrightarrow \oint_r \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \partial_t \vec{E} \cdot d\vec{S} : \text{Lei de Ampère-Maxwell (49.1)}$$

Lembrar:

$$(1) \quad \vec{J}_D \equiv \epsilon_0 \partial_t \vec{E} : \text{corrente de deslocamento} \quad (49.2)$$

(2) motivação p/ introduzir $\vec{J}_D$ em (34.2) é teórica;

verificação experimental: ondas eletromagnéticas

(Hertz, após trabalhos Maxwell).

Eqs. de Maxwell (vácuo, S.I.):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (49.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J}$$

onde $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

: Eqs. fundamentais EM!

$$\oplus \text{ Lei de Lorentz: } \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Obs.: (1) Eqs. (49.3): conjunto eqs. diferenciais; p/ determinação $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é necessário $\oplus$ condições de contorno;

(2) $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ e $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$: densidades de carga e corrente totais;

(3) Eqs. (49.3): em alguns casos denominadas eqs. microscópicas de Maxwell (veja Sec. 6.6, Jackson)