Teoria da relatividade restrita.

Refs.: Secs. 11.1 - 11.7, 11.9 - 11.10, Jackson (Gaussiano)

Secs. 22.1 - 22.7, Zangwill (SI)

Obs.: nas próximas discussões, vamos utilizar o sistema Gaussiano de unidades!

- Poincaré, Lorentz, Einstein (1904-1905)
- descrição fenômenos $v \approx c$
- relatividade especial: referenciais inerciais
- " geral: " não-inerciais

· inicial: transformação de Galileu.

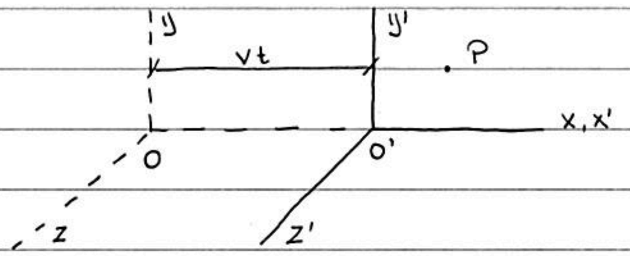
Lembrar mecânica clássica:

- espaço e tempo separados;
- tempo: absoluto;
- ok c/ princípio da relatividade de Galileu. (172.1)

Lembrar princípio da relatividade de Galileu:
fenômenos físicos são invariantes p/ observadores que se movimentam c/ velocidades relativas ctes (referenciais inerciais);

↳ Eq. (172.1): eqs. de movimento (2ª lei Newton) são invariantes (apresentam a mesma forma) sob uma transformação de Galileu.

Considerar 2 REFs inerciais K e K',



$\vec{V} = v\hat{x}$: velocidade REF K' w.r.t. REF K

pto P : (x, y, z) : coordenadas REF K
(x', y', z') : " " K'

(173.1)

hipótese : origem O = origem O' p/ $t = t' = 0$

temos que :

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

: Transformação de Galileu (173.2)

caso geral : se $\vec{V}$ velocidade REF K' w.r.t. REF K
e eixos $\hat{e}_i$ // eixos $\hat{e}'_i$

| Eq. (173.2) →

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t$$
$$t' = t \qquad (173.3)$$

· sobre as eqs. de movimento :
considerar sistema N partículas, massas m_i,
interação via potencial central $V = V(r)$;

temos que : $$m_i \frac{d^2\vec{r}\,'_i}{dt'^2} = -\vec{\nabla}'_i \sum_{j=1}^{N} V(|\vec{r}\,'_i - \vec{r}\,'_j|)$$: eq. de movimento partícula i, REF K' (173.4)

Eq. (173.3) : $$\frac{d\vec{r}\,'_i}{dt'} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i - \vec{V}t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \vec{V}$$

$$\hookrightarrow \frac{d^2\vec{r}'_i}{dt'^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (174.1)$$

op. gradiente : $\vec{\nabla}'_i = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x'_i} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y'_i} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z'_i}$

como $$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x'_i}}_{=1}\frac{\partial}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial y_i}{\partial x'_i}}_{=0}\frac{\partial}{\partial y_i} + \underbrace{\frac{\partial z_i}{\partial x'_i}}_{=0}\frac{\partial}{\partial z_i} + \underbrace{\frac{\partial t}{\partial x'_i}}_{=0}\frac{\partial}{\partial t}$$

inversa (173.3) $= \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla}'_i = \vec{\nabla}_i \qquad (174.2)$$

Eqs. (173.3), (173.4), (174.1) e (174.2),

$$m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\vec{\nabla}_i \sum_{j=1}^{\tilde{N}} v(|\vec{r}_i - \vec{v}t - \vec{r}_j + \vec{v}t|)$$: eq. de movimento, partícula i.

REF K (174.3)

notar Eqs. (173.4) e (174.3) : forma eqs. de movimento invariante sob transformação (173.3) !

· considerar eq. de onda,

$$\left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi(\vec{r}',t) = 0 \quad : \text{REF } K' \qquad (174.4)$$

notar :

Eq. (174.2) $\rightarrow \nabla'^2 = \nabla^2$

Eq. (173.3) : $$\frac{\partial}{\partial t'} = \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t'}}_{v_x}\frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t'}}_{v_y}\frac{\partial}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial t'}}_{v_z}\frac{\partial}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial t}{\partial t'}}_{1}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}, \qquad (175.1)$$

pois transf. inversa (173.3) : $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}\,t'$
$t = t'$

temos que

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \;:\; \text{REF } K \qquad (175.2)$$

notar Eqs. (174.4) e (175.2) : forma eq. de onda não é invariante sob a transformação (173.3) !
Eq. (175.2) $\propto$ velocidade relativa $\vec{v}$. (*)

Lembrar ondas mecânicas : se $\underline{c}$: velocidade propagação onda w.r.t. meio material (REF K') e se o meio se movimenta velocidade $\underline{v}$ w.r.t. LAB (REF K)
(direção prop. onda // $\vec{v}$)
↳ $v+c$: velocidade prop. onda w.r.t. REF K : ok c/ (175.2)!

(*) → 3 possibilidades :

(i) Eqs. de Maxwell incorretas ; teoria correta EM é invariante sob transf. de Galileu (173.3) ;

(ii) Princípio de relatividade de Galileu válido apenas p/ mecânica ; EM : ∃ REF. preferencial que está em repouso w.r.t. éter ;

(iii) Mecânica clássica e EM obdecem o mesmo princípio de relatividade ; eqs. mecânica precisam ser corrigidas !

experimentos → Einstein considerar alternativa (iii)

↳ teoria da relatividade especial.

baseada em 2 postulados:

(1) <u>Postulado da relatividade</u>: as leis da física são iguais p/ todos os REFs. inerciais;

(2) <u>Postulado da constância da velocidade da luz</u>: a velocidade da luz (c) é igual p/ todos observadores inerciais.

notar Eq. (173.2): $\frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}}{dt} - v\hat{x}$

se $\frac{d\vec{r}'}{dt} = (c, 0, 0) \longrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = (c+v, 0, 0)$: inconsistente c/ postulado (2)!

↳ é necessário introduzir uma nova transf. de coordenadas!

· Transformação de Lorentz.

considerar 2 REFs inerciais K e K': Fig. (173.1);

considerar: fonte de luz em $\vec{r} = 0$, em repouso w.r.t. REF K;
em $t = t' = 0$: fonte ON e OFF → emissão onda esférica

postulado (2): REFs K e K': velocidade propagação onda esférica = c

ou

$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2$: raio (casca) frente de onda esférica w.r.t. REF K

(176.1)

$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2$: " " " " REF K'

postulado (1) -> espaço-tempo homogêneo ($\nexists$ pto preferencial) e isotrópico ($\nexists$ direção preferencial)

↳ relação entre Eqs. (176.1) é linear, i.e.,

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \lambda^2 (c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2) \qquad (176.2)$$

↳ $\lambda = \lambda(v)$: possível fator de escala.

apenas modulo $\vec{v}$

~ espaço-tempo homogêneo e isotrópico

como $\vec{v} = v\hat{x}$ → por simetria, apenas componentes $\underline{\underline{t}}$ e $\underline{\underline{x}}$ serão modificadas pela transformação de coordenadas.

· notação : $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. (176.3)

Eq. (176.2) : $x_0'^2 - x_1'^2 = \lambda^2 (x_0^2 - x_1^2)$ (176.4)

Eq. (176.4) : transf. de coordenadas ~ "notação" ; podemos escrever

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad (176.5)$$

notar : $x_0'^2 - x_1'^2 = \lambda^2 \underbrace{(\cosh^2 \zeta - \sinh^2 \zeta)}_{=1} (x_0^2 - x_1^2)$: ok c/ (176.4)

· sobre o fator $\lambda = \lambda(v)$ (p/ detalhes veja apêndice G, Marion; mecânica)

transf. inversa (176.4): $x_0^2 - x_1^2 = \lambda(-v)\,(x_0'^2 - x_1'^2)$

$$\longrightarrow \lambda(v)\,(x_0'^2 - x_1'^2) \qquad (177.1)$$

pois $\lambda \propto$ módulo $\vec{v}$

Eqs. (176.4) e (177.1) $\rightarrow \lambda^2(v) = 1 \rightarrow \lambda(v) = \pm 1$

como $\lambda = \lambda(v)$ função contínua e $\lambda(v=0) = 1 \longrightarrow \lambda = 1$!

· determinação parâmetro de boost ζ,

se $x_1' = 0 \rightarrow x_1 = vt$: movimento origem O' w.r.t. REF $\mathcal{R}$

Eq. (176.5) : $x_1' = -x_0 \sinh\zeta + x_1 \cosh\zeta = 0$

$$-(ct)\sinh\zeta + (vt)\cosh\zeta = 0 \rightarrow \operatorname{tgh}\zeta = \frac{v}{c} \equiv \beta$$

↳ $0 \leq \beta \leq 1$ e $0 \leq \zeta \leq +\infty$

e $$\sinh\zeta = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta\gamma \qquad (177.2)$$

$$\cosh\zeta = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma$$

Dessa forma, Eq. (176.5):

$$\begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x_1' &= \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \quad : \text{Transformação de Lorentz} \qquad (177.3)$$

comparar Eqs. (173.2) e (177.3) !

transformação inversa : $\beta \to -\beta$ e $x'_\mu \leftrightarrow x_\mu$:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \gamma(x'_0 + \beta x'_1) \\
x_1 &= \gamma(x'_1 + \beta x'_0) \\
x_2 &= x'_2 \\
x_3 &= x'_3
\end{aligned}
\qquad (178.1)
$$

caso geral : $\forall \vec{v}$ e eixos $\hat{e}_i \parallel$ eixos $\hat{e}'_i$

Eq. (177.3) : $x'_0 = \gamma(x_0 - \vec{\beta}\cdot\vec{r})$
(verificar)

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{\beta}\left(\frac{(\gamma-1)}{\beta^2}(\vec{r}\cdot\vec{\beta}) - \gamma x_0\right) \qquad (178.2)$$

onde $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.

Obs.: Eq. (176.5) / transf. Lorentz ~ notação $\nexists$ imaginário i ? !

(veja discussão abaixo p/ detalhes).

· Quadri-vetores (4-vetores).

lembrar definição vetor, Eq. (70.1): objeto formado por 3 componentes que, sob uma transformação ortogonal definida pela matriz $\hat{A}$, se transforma como as componentes do vetor posição $\vec{r}$ sob $\hat{A}$, i.e.,

$$r'_i = A_{ij}\, r_j \quad ; \quad i = 1,2,3 .$$

vimos que as coordenadas pto P, REF K : (x_0, x_1, x_2, x_3) se
relacionam c/ " " " REF K' : (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)
via transf. de Lorentz (177.3) ;

↳ de modo análogo à (70.1), podemos definir

· quadri-vetor : objeto formado por 4 componentes (A_0, A_1, A_2, A_3)
que se transformam como (177.3) sob uma
transformação (boost) de Lorentz. (179.1)

em detalhes :
se $(A_0, \vec{A})$: componentes quadri-vetor w.r.t. REF K e
$(A'_0, \vec{A}')$: " " " " REF K'

↳
$$\begin{aligned} A'_0 &= \gamma(A_0 - \beta A_1) \\ A'_1 &= \gamma(A_1 - \beta A_0) \\ A'_2 &= A_2 \\ A'_3 &= A_3 \end{aligned} \qquad (179.2)$$

notar:
$$\begin{aligned} A'^2_0 - |\vec{A}'|^2 &= \gamma^2(A_0 - \beta A_1)^2 - \gamma^2(A_1 - \beta A_0)^2 - A_2^2 - A_3^2 \\ &= \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{=1}(A_0^2 - A_1^2) - A_2^2 - A_3^2 = A_0^2 - |\vec{A}|^2 \end{aligned} \qquad (179.3)$$

é um invariante sob transf. de Lorentz,
similar, Eq. (176.4).

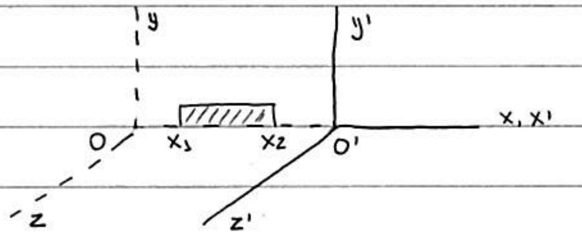
↳ p/ dois quadri-vetores $(A_0, \vec{A})$ e $(B_0, \vec{B})$, temos que

$$A'_0 B'_0 - \vec{A}' \cdot \vec{B}' = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B} : \qquad (179.4)$$

: produto escalar entre 4-vetores $(A_0, \vec{A})$ e $(B_0, \vec{B})$;
invariante sob transf. Lorentz ~ produto escalar usual entre 2 vetores em 3-D !

· Consequências transformações de Lorentz.

(i) contração do comprimento;



Barra: repouso w.r.t. REF K;

$$\text{comprimento} = \ell = x(t_2) - x(t_1) \equiv x_2 - x_1 \quad : \text{REF } K$$

Q.: Qual o comprimento barra medido por observador em K'?

Eq. (177.3): $x'_2 - x'_1 = \gamma\left(x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)\right)$

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)\right). \qquad (180.1)$$

onde $x'_1 = x'(t'_1)$ e $x'_2 = x'(t'_2)$.

medida realizada REF K': $t'_1 = t'_2 \rightarrow t_2 - t_1 = \frac{\beta}{c}(x_2 - x_1)$ (180.2)

(pois barra em movimento w.r.t. REF K')

Eq. (180.2): eventos simultâneos em K' não são necessariamente

" " " K!

Eqs. (180.1) e (180.2): $\ell' = x'_2 - x'_1 = \gamma(1-\beta^2)(x_2 - x_1)$

(180.3)

$\hookrightarrow \ell' = (1-\beta^2)^{1/2}\,\ell \rightarrow$ comprimento próprio

(barra em repouso w.r.t. REF K)

notar: p/ observador em movimento w.r.t. objeto,

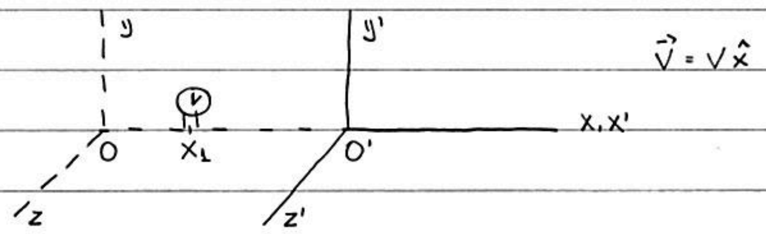
o comprimento do objeto na direção do movimento

é contraído pelo fator $\sqrt{1-\beta^2}$: efeito cinético!

Obs.: direções ⊥ movimento não são afetadas!

veja aplicação 22.2, Zangwill sobre colisões de íons pesados e o plasma de quarks e gluons.

(ii) dilatação do tempo.



Relógio: repouso w.r.t. REF K

$\Delta t = t_2 - t_1$: intervalo de tempo medido observador em K.

Q.: Qual a relação c/ $\Delta t' = t'_2 - t'_1$: REF K'?

Eq. (177.3): $t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - t_1 - \frac{\beta}{c}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{}\right)$

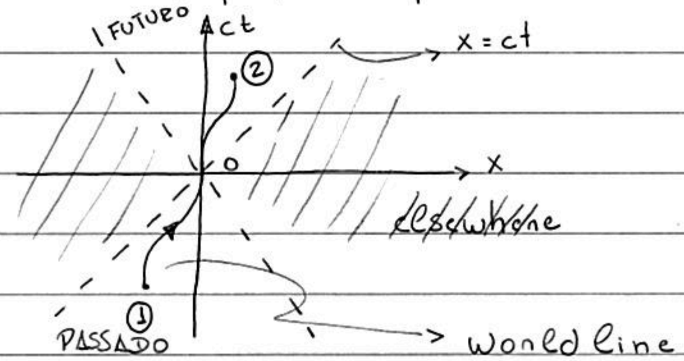
= 0, pois relógio em repouso w.r.t. REF K.

↳ $\Delta t' = \gamma \Delta t \equiv \gamma \Delta \tau$ → tempo próprio (181.1)

notar: intervalo de tempo medido por K' > intervalo de tempo medido por K

[· cone de luz e intervalo invariante, ↳ pg. 182 →

considerar espaço-tempo (4-D): ct-x-y-z



Origem O: (0,0,0,0): presente]

· Intervalos.

Definição: <u>evento</u>: caracterizado por uma posição $\vec{r}$ e instante de tempo t no espaço-tempo (4-D): $(ct, \vec{r})$

considerar: 2 eventos $(ct_1, \vec{r}_1)$ e $(ct_2, \vec{r}_2)$

↳ $\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta\vec{r})^2$:   (182.1)

: intervalo entre eventos 1 e 2 no espaço-tempo

comparar Eqs. (179.4) e (182.1):

Δs^2 é a <u>norma</u> do 4-vetor $(c(t_2 - t_1), \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

↳ Δs^2 é invariante sob transf. Lorentz: intervalo invariante

temos que,

$$\Delta s^2 = \underbrace{(\Delta x_0)^2 - (\Delta\vec{r})^2}_{\text{REF. } K} = \underbrace{(\Delta x'_0)^2 - (\Delta\vec{r}')^2}_{\text{REF. } K'} = \Delta s'^2 \qquad (182.2)$$

vamos considerar 3 casos:

(i) hipótese: ∃ REF K' tal que eventos 1 e 2 ocorrem na mesma posição e em instantes de tempos distintos:

$$(\Delta\vec{r}')^2 = 0 \quad \text{e} \quad (\Delta x'_0)^2 \neq 0$$

Eq. (182.2) $\rightarrow$ $\Delta s^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta \vec{r})^2 = (\Delta x'_0)^2 > 0$

nesse caso, como $\Delta s^2 > 0$ $\rightarrow$ eventos $\underset{=}{1}$ e $\underset{=}{2}$ separados por intervalo do tipo-tempo.

(ii) hipótese: $\exists$ REF K' tal que eventos $\underset{=}{1}$ e $\underset{=}{2}$ ocorrem em posições $\neq$ e simultaneamente:

$$(\Delta \vec{r})^2 \neq 0 \quad e \quad (\Delta x'_0)^2 = 0$$

Eq. (182.2) $\rightarrow$ $\Delta s^2 = (\Delta x_0)^2 - (\Delta \vec{r})^2 = -(\Delta \vec{r})^2 < 0$

nesse caso, como $\Delta s^2 < 0$ $\rightarrow$ eventos $\underset{=}{1}$ e $\underset{=}{2}$ separados por intervalo do tipo-espaço.

(iii) hipótese: eventos $\underset{=}{1}$ e $\underset{=}{2}$ conectados por sinal de luz

Eq. (182.2) $\rightarrow$ $\Delta s^2 = 0$: intervalo do tipo-luz.

Obs.: (1) como Δs^2 é invariante $\rightarrow$ classificação acima independe referencial.

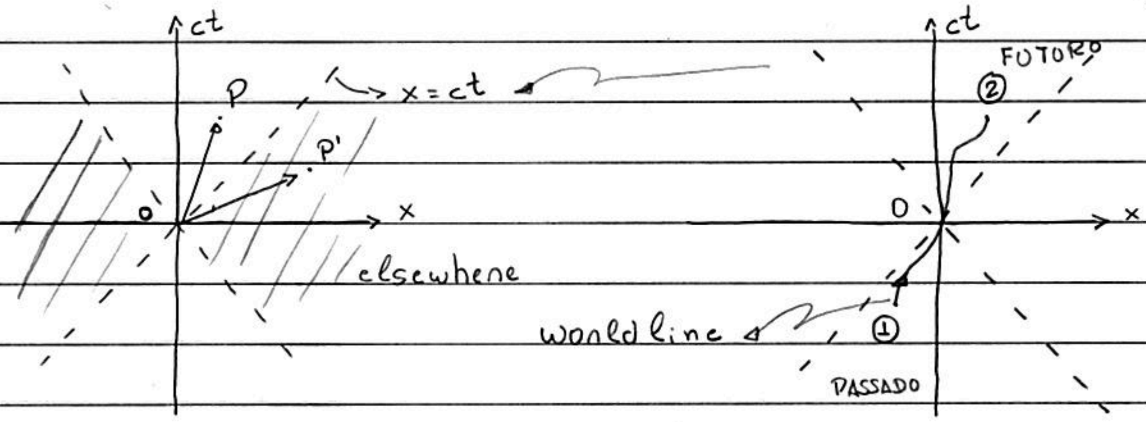
(2) eventos separados intervalo tipo-espaço: não são casualmente conectados pois seria necessário sinal c/ $v > c$.

(3) eventos separados intervalo tipo-tempo: são casualmente conectados

Graficamente:

considerar: espaço-tempo (4-D) : $ct - x - y - z$

$\oplus$ evento $\underset{=}{0}$ localizado na origem $O = (0,0,0,0)$



notas:

- espaço-tempo dividido em 3 regiões pelo cone de luz : $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$;

- eventos $\underline{\underline{O}}$ e $\underline{\underline{P}} = (ct, x)$ conectados por sinal $v < c$;
de fato, como $\Delta s^2 = c^2t^2 - x^2 > 0$
↳ eventos O e P (localizados no interior do cone de luz) são separados por intervalo tipo-tempo;

- eventos $\underline{\underline{O}}$ e $\underline{\underline{P'}} = (ct', x')$ conectados por sinal $v > c$;
nesse caso, $\Delta s^2 = c^2t'^2 - x'^2 < 0$
↳ eventos O e P' (P' localizado no exterior do cone de luz) são separados por intervalo tipo-espaço;

- considerar partícula movimento 1 → 2 ao longo trajetória (worldline) ∈ interior cone de luz
↳ velocidade partícula $v < c$!

se origem O : presente → evento 1 : $t < 0$: passado w.r.t. O
" 2 : $t > 0$: futuro " "

Obs. : derivada pto ∈ worldline > 1 → $v < c$!

· considerar intervalo invariante, forma diferencial,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2} \qquad (184.1)$$

p/ uma partícula c/ velocidade $\vec{u} = \vec{u}(t)$ w.r.t. REF K,

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 \right) = c^2 dt^2 \left(1 - \beta_u^2 \right)$$

se partícula instantaneamente em repouso w.r.t. REF K',
temos que

$$d\vec{r}' = 0 \quad e \quad dt' = d\tau : \text{tempo próprio}$$

$$\hookrightarrow ds'^2 = c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta_u^2(t))$$

$$\hookrightarrow d\tau = (1 - \beta_u^2)^{1/2} dt = \frac{dt}{\gamma_u(t)} \quad : \text{Eq. } (181.1) \qquad (184.2)$$

além disso,

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 \rightarrow d\tau = \frac{1}{c} ds \rightarrow d\tau \text{ é um invariante!}$$

(útil p/ definir 4-vetores)

(184.3)

notar : p/ intervalo de tempo próprio $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$

$$\hookrightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, \gamma_u(\tau) > \Delta\tau \quad : \text{dilatação temporal!}$$

· Efeito Doppler relativístico,

ideia: determinar a lei de transformação p/ frequência ω e número de onda $\vec{k}$ de uma onda plana!

considerar: onda plana, frequência ω, vetor de onda $\vec{k}$.

Eq. (83.2) : $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$: fase onda plana

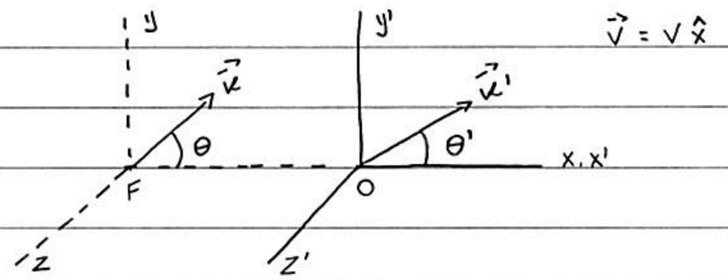
definindo 4-vetor $(\omega/c, \vec{k})$

↳ ϕ : produto escalar (179.4) entre 4-vetores $(\omega/c, \vec{k})$ e $(ct, \vec{r})$

↳ ϕ é invariante sob transf. de Lorentz. (185.1)

alternativa: $\phi \sim$ número máximos/mínimos onda : independe REF!

hipótese: fonte em repouso w.r.t. REF K
observador " " " REF K'



notar: θ : ∡ entre $\vec{k}$ e $\hat{x}$
θ' : " " $\vec{k}'$ e $\hat{x}'$

(185.1) → $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{r}'$

e

Eq. (179.2) : $K'_0 = \gamma(K_0 - \beta K_1)$

$K'_1 = \gamma(K_1 - \beta K_0)$

$K'_2 = K_2$ (186.1)

$K'_3 = K_3$

Como $K_1 = K\cos\theta \rightarrow vK_1 = \frac{v}{c}(Kc)\cos\theta = \beta\omega\cos\theta$

notar Eq. (186.1) :

(i) $K'_0 = \gamma(K_0 - \beta K_1) \rightarrow \frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{1}{c}vK_1\right) = \frac{\gamma}{c}(\omega - \beta\omega\cos\theta)$

$\hookrightarrow \omega' = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta)$

ou $\nu' = \gamma\nu(1-\beta\cos\theta) = \nu\frac{(1-\beta\cos\theta)}{(1-\beta^2)^{1/2}}$: relação entre frequência emitida ν e observada ν' (186.2)

(ii) $K'_1 = \gamma(K_1 - \beta K_0) \rightarrow K'\cos\theta' = \gamma(K\cos\theta - \beta\omega/c)$

$\div$ Eq. (186.2) : $\underbrace{\frac{K'}{\omega'}}_{1/c}\cos\theta' = \frac{\gamma(K\cos\theta - \beta\omega/c)}{\gamma\omega(1-\beta\cos\theta)}$

$= \frac{1}{c}\frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}$

$\hookrightarrow \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}$

$\hookrightarrow \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$ e $\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}$ (186.3) notar Eq. (186.2):

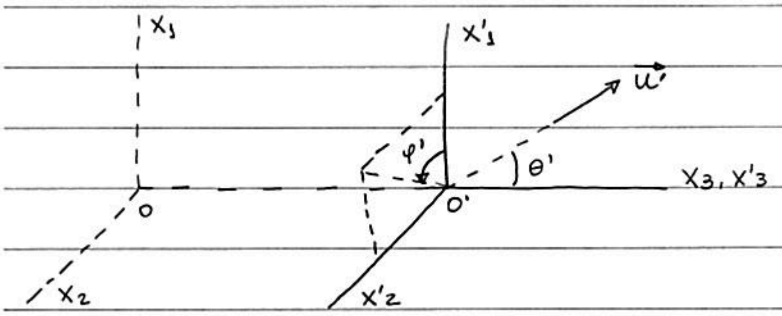
$\theta = 0$: $\nu' = \dfrac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}\,\nu$: fonte e observador se afastando

$\theta = \pi$: $\nu' = \dfrac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}}\,\nu$: " " " " aproximando

$\theta = \pi/2$: $\nu' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\nu$: efeito Doppler transversal.

· Adição de velocidades.

considerar: 2 REFs inerciais K e K' e partícula
velocidade $\vec{u}'$ w.r.t. REF K';
ideia: determinar relação entre $\vec{u}'$ e
$\vec{u}$: velocidade partícula w.r.t. REF K.



$\vec{V} = V\hat{e}_3$: notar boost direção $\hat{z}$

Eqs. (178.1), forma diferencial

$$\begin{aligned}
dx_0 &= \gamma_V (dx'_0 + \beta dx'_3) \\
dx_1 &= dx'_1 \\
dx_2 &= dx'_2 \\
dx_3 &= \gamma_V (dx'_3 + \beta dx'_0)
\end{aligned} \qquad (187.1)$$

notar $\gamma_V = \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$

como as componentes da velocidade da partícula são dadas por

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{c\,dx_i}{dx_0} \quad e \quad u'_i = \frac{dx'_i}{dt'} = \frac{c\,dx'_i}{dx'_0}$$, temos que

$$u_1 = \frac{c\,dx_1}{dx_0} = \frac{c\,dx'_1}{\gamma_v(dx'_0 + \beta dx'_3)} = \frac{u'_1}{\gamma_v(1 + v u'_3/c^2)}$$

similar $$u_2 = \frac{u'_2}{\gamma_v\left(1 + v u'_3/c^2\right)} \qquad (188.1)$$

$$u_3 = \frac{c\,dx_3}{dx_0} = \frac{c\gamma_v(dx'_3 + \beta dx'_0)}{\gamma_v(dx'_0 + \beta dx'_3)} = \frac{u'_3 + v}{1 + v u'_3/c^2}$$

Eq. (188.1) : transf. componentes vetor velocidade sob transf. Lorentz ou fórmula de adição de velocidades !

notar:

(i) ambas componentes de $\vec{u}$ $\parallel$ e $\perp$ $\vec{v}$ são modificadas;

(ii) p/ $u/c \ll 1$ Eq. (188.1) $\longrightarrow$ $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}$: fórmula de adição de velocidades de Galileu (veja Eq. (173.3))

(iii) se $\vec{u}' = (0,0,c)$

$\hookrightarrow$ $u_1 = u_2 = 0$ e $u_3 = \dfrac{c + v}{1 + vc/c^2} = c$: consistente c/ postulado (2)

alternativa: determinar a relação entre as componentes esféricas de $\vec{u} = (u, \theta, \varphi)$ e $\vec{u}' = (u', \theta', \varphi')$:

verifica-se que (veja pg. 189.1):

$$\varphi = \varphi'$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u'\sin\theta'}{\gamma_v\,(u'\cos\theta' + v)} \qquad (189.1)$$

$$u = \left(1 + \frac{v u'\cos\theta'}{c}\right)^{-1}\left(u'^2 + v^2 + 2u'v\cos\theta' - \left(\frac{u'v\sin\theta'}{c}\right)^2\right)$$

caso geral fórmula adição de velocidades: p/ $\forall\,\vec{v}$, temos que

Eq. (188.1):

$$u_\parallel = \frac{u'_\parallel + v}{1 + \vec{u}'\cdot\vec{v}/c^2}$$

$$(189.2)$$

$$\vec{u}_\perp = \frac{\vec{u}'_\perp}{\gamma_v\left(1 + \vec{u}'\cdot\vec{v}/c^2\right)}$$

onde $\vec{u} = \vec{u}_\parallel + \vec{u}_\perp$

$\vec{u}_\perp \rightarrow$ componente $\vec{u}$ $\perp$ $\vec{v}$

$\vec{u}_\parallel \rightarrow$ " " $\parallel$ "

· Quadri-vetores II.

ideia: introduzir conjunto particular de 4-vetores.

(i) quadri-velocidade.

comparar Eqs. (179.2) e (188.1): transformação das componentes de $\vec{u}$ é $\neq$ transf. componentes espaciais 4-vetor;

entretanto, é possível definir 4-vetor relacionado à velocidade de uma partícula.

Vamos verificar Eqs. (189.1):

como $\frac{u_1}{u_2} = \frac{u'_1}{u'_2} \rightarrow \varphi = \varphi'$

Eq. (188.1):

$$u_3 = \frac{u'_3 + V}{1 + \frac{Vu'_3}{c^2}} \longrightarrow u\cos\theta = \frac{u'\cos\theta' + V}{1 + Vu'\cos\theta'/c^2}$$

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{1}{(1 + Vu'\cos\theta'/c^2)^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\Gamma_V^2}(u_1'^2 + u_2'^2) + (u'_3 + V)^2\right)}_{(I)}$$

como $(I) = (u'^2 - u'^2\cos^2\theta')(1 - \frac{V^2}{c^2}) + (u'\cos\theta' + V)^2$

$$= u'^2 + V^2 + 2u'V\cos\theta' - \left(\frac{u'V\sin\theta}{c}\right)^2$$

$$\hookrightarrow u = \frac{(I)^{1/2}}{(1 + Vu'\cos\theta'/c^2)}$$

como $u^2 = u^2\cos^2\theta + u^2\sin^2\theta$

$$\hookrightarrow u^2\sin^2\theta = u^2 - u^2\cos^2\theta = \frac{u'^2\sin^2\theta'}{\Gamma_V^2\left(1 - \frac{Vu'\cos\theta'}{c^2}\right)^2}$$

$$\hookrightarrow tg\,\theta = \frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} = \frac{u'\sin\theta'}{\Gamma_V(u'\cos\theta' + V)}$$

Lembrar Eq. (184.3): como $d\tau = \frac{1}{c} ds$ é um invariante, podemos definir:

$$U_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u c$$

↑ Eq. (184.2) : 4-velocidade

(190.1)

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u u_i \quad ; \quad i = 1,2,3 \qquad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Como (U_0, U) é um 4-vetor, $(U_0, \vec{U})$ se transforma como (179.2) sob transf. Lorentz; p/ boost direção $\hat{z}$:

$$U'_0 = \gamma_v (U_0 - \beta U_3)$$
$$U'_1 = U_1$$
$$U'_2 = U_2 \qquad (190.2)$$
$$U'_3 = \gamma_v (U_3 - \beta U_0)$$

ou, em termos das componentes do vetor velocidade $\vec{u}$

$$\gamma_{u'} c = \gamma_v \gamma_u (c - v u_3/c)$$

$$\gamma_{u'} u'_1 = \gamma_u u_1 \qquad (190.3)$$
$$\gamma_{u'} u'_2 = \gamma_u u_2$$
$$\gamma_{u'} u'_3 = \gamma_v \gamma_u (u_3 - v)$$

↳ • $\gamma_{u'} = \gamma_v \gamma_u (1 - v u_3/c^2)$: identidade

• $\gamma_{u'} u'_1 = \gamma_v \cancel{\gamma_u} \left(1 - \frac{v u_3}{c^2}\right) u'_1 = \cancel{\gamma_u} u_1$

↳ $u'_1 = \dfrac{u_1}{\gamma_v\left(1 - \frac{v u_3}{c^2}\right)}$: inversa Eq. (188.1)

· similar p/ u'_2 e u_2

· $\gamma_{u'} u'_3 = \cancel{\gamma_v}\gamma_u\left(1 - \frac{v u_3}{c^2}\right) u'_3 = \cancel{\gamma_v}\gamma_u\left(u_3 - v\right)$

↳ $u'_3 = \dfrac{u_3 - v}{1 - \frac{v u_3}{c^2}}$: inversa Eq. (188.1)

(ii) quadri-aceleração,

de modo análogo à 4-velocidade, podemos definir

$$D_0 = \frac{dU_0}{d\tau} = \frac{dU_0}{dt}\frac{dt}{d\tau} = c\,\gamma_u \frac{d}{dt}(\gamma_u)$$

: 4-aceleração (191.1)

$$D_i = \frac{dU_i}{d\tau} = \frac{dU_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \frac{d}{dt}(\gamma_u u_i) \quad ; \quad i = 1,2,3$$

como $\dfrac{d}{dt}(\gamma_u) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{a}/c^2}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}$; $\vec{a} = \dfrac{d\vec{u}}{dt}$

e $\dfrac{d}{dt}(\gamma_u u_i) = \dot{\gamma}_u u_i + \gamma_u a_i$

↳ $D_0 = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{a}/c}{(1 - u^2/c^2)^2}$ (191.2)

$$D_i = \frac{a_i}{1 - u^2/c^2} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}/c^2}{(1 - u^2/c^2)^2}\,u_i \quad ; \quad i = 1,2,3$$

Obs. : veja P.-11.5, Jackson p/ transformação componentes vetor aceleração $\vec{a}$ sob transf. Lorentz.

notar:

$$U_0^2 - |\vec{U}|^2 = \gamma_u^2 c^2 - \gamma_u^2 u^2 = \frac{c^2 - u^2}{1 - u^2/c^2} = c^2 \text{ : invariante}$$

(192.1)

$$\hookrightarrow \; U_0 D_0 - \vec{U}\cdot\vec{D} = U_0 \frac{dU_0}{d\tau} - \vec{U}\cdot\frac{d\vec{U}}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left(U_0^2 - |\vec{U}|^2\right) = 0 \;:$$

4-vetores $(U_0, \vec{U})$ e $(D_0, \vec{D})$ são $\perp$: similar movimento circular em 3-D!

(iii) quadri-momento.
considerar partícula massa m;
como $\underline{m}$ (escalar) é um invariante, podemos definir:

$$P_0 = m U_0 = \gamma_u m c \qquad : \text{4- momento} \qquad (192.2)$$
$$P_i = m U_i = \gamma_u m u_i \,, \quad i = 1,2,3$$

· verifica-se que a componente espacial de $(P_0, \vec{P})$ é a generalização relativística do momento linear, i.e.

$$\vec{P} = \gamma_u m \vec{u} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad : \text{momento relativístico} \qquad (192.3)$$

notar, p/ $\frac{u}{c} \ll 1$, temos que

$$\vec{P} \simeq m\vec{u}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} + \dots\right)$$

--> momento linear mec. Newton.

· além disso, a componente temporal de $(P_0, \vec{P})$ está relacionada c/ a energia total da partícula, i.e.,

$E = cP_0 = \gamma_u mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$: energia total (193.1)

notar, p/ $\frac{u}{c} \ll 1$, temos que

$E \simeq mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} + \ldots \right) = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{8}m\frac{u^4}{c^2} + \ldots$

energia cinética mec. Newton

↳ define-se : mc^2 : energia de repouso

e $T = E - mc^2 = (\gamma_u - 1)mc^2$: energia cinética relativística (193.2)

notar : $P_0^2 - |\vec{P}|^2 = \gamma_u^2 (mc)^2 - \gamma_u^2 (m\vec{u})^2 = \dfrac{m^2(c^2 - u^2)}{1 - u^2/c^2} = (mc)^2$: invariante

por outro lado : $P_0^2 - |\vec{P}|^2 = \dfrac{E^2}{c^2} - p^2 = (mc)^2$

↳ $E = \left((mc^2)^2 + (pc)^2 \right)^{1/2}$: relação entre energia total e momento (193.3)

· além disso, c^2 + Eq. (192.3) : $c^2\vec{p} = (\gamma_u mc^2)\vec{u}$

↳ $\vec{u} = c^2\vec{p}/E$ (193.4)

caso particular $m=0$:

$E = cp$ e $\vec{u} = c\hat{p}$: fótons (193.4)

Obs.: Eqs. (192.3) e (193.1) podem ser derivadas considerando conservação do momento linear e energia e a cinemática das transf. Lorentz, veja Sec. 11.5, Jackson.

↳

· Geometria do espaço-tempo.

ideia:

Lembrar mecânicas clássica e quântica:

rotações em 3-D : conjunto de transformações de coordenadas $\hat{O}_{\hat{n}}(\theta)$ que preservam a norma vetor $\vec{r}$

$\{\hat{O}_{\hat{n}}(\theta)\}$: grupo

relatividade especial: p/ o 4-vetor (x_0, x_1, x_2, x_3), temos que

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad : \text{Eq. (176.1)}$$

é um invariante ⟶ determinação transf. Lorentz (177.3)

↳ podemos afirmar que a cinemática da Relatividade especial ~ conjunto de transf. de coordenadas que preservam s^2:

grupo de Lorentz homogêneo (194.1)

(rotações 3-D e transf. Lorentz (177.3))

generalização (194.1): considerar 2 4-vetores

(x_0, x_1, x_2, x_3) e (y_0, y_1, y_2, y_3)

seja $s^2(x,y) = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$

↳ conjunto de transf. de coordenadas que preservam $S^2(x,y)$:
grupo de Lorentz não-homogêneo (Grupo de Poincaré)
(notações 3-D ; transf. Lorentz (177.3) ;
translações e reflexões espaciais e temporais)
(p/ detalhes da divisão do grupo de Lorentz, veja Sec. 1.5, Barut)
Obs. : vamos considerar apenas o grupo de Lorentz homogêneo!

↳ ideia : considerações sobre a estrutura do grupo de Lorentz.

inicial : resumo propriedades espaço vetorial não-Euclidiano
(similar discussão transf. $\underline{L}$ em 3-D, pgs. 68 - 73)

considerar espaço-tempo : espaço 4-D ;
pto $\underline{P}$ descrito pelas coordenadas
(x^0, x^1, x^2, x^3)

uma transformação de coordenadas que transforma
$(x^0, x^1, x^2, x^3) \longrightarrow (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ pode ser escrita como:

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad , \quad \alpha = 0,1,2,3 \qquad (195.1)$$

de modo análogo à notações em 3-D (veja Eq. (70.2)), Eq. (195.1)
pode ser utilizada p/ definir tensor ordem K no espaço
não-Euclidiano 4-D :

(i) tensor ordem 0 : 1 componente, invariante sob (195.1) :
escalar

(ii) tensor ordem 1 : 4 componentes ; 2 tipos : vetor

(1) contravariante A^α:

sob transf. (195.1) : $A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta$; $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ (196.1)

convenção : soma sob índices repetidos

(2) covariante B_α:

sob transf. (195.1) : $B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta$; $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$

determinada via inversa (195.1) (196.2)

notar Eqs. (196.1) e (196.2) : $\neq$ posição índices α e β !

(iii) tensor ordem 2 : 16 componentes, 3 tipos:

(1) contravariante $F^{\alpha\beta}$:

sob transf. (195.1) : $F'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}$

(2) covariante $G_{\alpha\beta}$:

sob transf. (195.1) : $G'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} G_{\gamma\delta}$ (196.3)

(3) misto $H^\alpha{}_\beta$:

sob transf. (195.1) : $H'^\alpha{}_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\beta} H^\gamma{}_\delta$

Obs.: a generalização p/ tensores ordem ≥ 2 é similar.

· produto escalar : definido como produto componentes covariante e contravariante :

$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha$: notar posição índices (196.4) notar: $B' \cdot A' = B'_\alpha A'^\alpha = \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}}_{= \delta^\beta{}_\gamma} B_\beta A^\gamma = B_\beta A^\beta = B \cdot A$: invariante

$= \delta^\beta{}_\gamma$: 4-D delta de Kronecker

· traço do tensor $F^{\alpha\beta}$ é dado por:

$$F^\alpha{}_\alpha = F^0{}_0 + F^1{}_1 + F^2{}_2 + F^3{}_3 \qquad (197.1)$$

onde tensor misto $F^\alpha{}_\beta$ é obtido a partir de $F^{\alpha\beta}$ (veja abaixo)

Eqs. (196.4) e (197.1) : exemplos de contrações

notar: - posição índices;

- tensor ordem 2 $\xrightarrow{\text{contração}}$ tensor ordem 0

similar: produto $F^{\alpha\beta}$ e B_γ :

$F^{\alpha\beta} B_\beta = C^\alpha$: tensor ordem 3 $\xrightarrow{\text{contração}}$ tensor ordem 1

· próxima etapa: considerar caso particular da relatividade especial

Lembrar: geometria espaço-tempo ~ invariância s^2 : Eq. (176.1).

Eq. (176.1), forma diferencial,

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad (197.2)$$

: notar posição índices

caso geral (197.2):

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (197.3)$$

: norma ou métrica do espaço-tempo

$g_{\alpha\beta}$: <u>tensor</u> <u>métrico</u> (tensor covariante)

em particular, p/ (197.2) : $g_{00} = 1$
(espaço-tempo plano) $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ (198.1)
$g_{\alpha\beta} = 0 \ , \ \alpha \neq \beta$

$g^{\alpha\beta} \equiv (-1)^{\alpha+\beta} g_{\alpha\beta}$: matriz cofatora $\xrightarrow{\text{Eq. (198.1)}}$ $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$

↳ $g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$

· notar : Eq. (197.3) pode ser escrita como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta} \overset{\text{Eq. (196.4)}}{=} dx_{\alpha} dx^{\alpha} ,$$

pois ds^2 é um invariante, escrito como um produto escalar

↳ $dx_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, dx^{\beta}$

ou $x_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, x^{\beta}$: relação entre componentes vetores covariante e contravariante (198.2)

Eq. (198.2) : $g^{\gamma\alpha} x_{\alpha} = g^{\gamma\alpha} g_{\alpha\beta}\, x^{\beta} = \delta_{\beta}{}^{\gamma} x^{\beta} = x^{\gamma}$

↳ $x^{\alpha} = g^{\alpha\beta} x_{\beta}$ (198.3)

Eqs. (198.2) e (198.3) : tensor métrico pode ser utilizado (via contração) p/ "abaixar"/"levantar" índices!

caso geral : se A^0, A^1, A^2, A^3 : componentes 4-vetor contravariante A^{α}

Eqs. (198.1) e (198.2) : $A_{\alpha} = g_{\alpha\beta} A^{\beta}$

↳ $A_0 = A^0$: relação entre componentes
$A_1 = -A^1$; $A_2 = -A^2$; $A_3 = -A^3$ covariantes e contravariantes (199.1)

temos que : $A^\alpha = (A^0, \vec{A})$

$A_\alpha = (A^0, -\vec{A})$, onde $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$ (199.2)

↳ produto escalar (196.4) :

$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha = B^0 A^0 - \vec{B} \cdot \vec{A}$: consistente c/ Eq. (179.4) (199.3)

Obs. : formulação utilizada Secs. anteriores : <u>contravariante</u>; posição dos índices não foi considerada explicitamente !

· sobre as derivadas parciais,

notar : $\dfrac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x^\beta}$ ⊕ Eq. (196.2)

↳ 4 - vetor $\partial/\partial x'^\alpha$ é <u>covariante</u> ;

por outro lado, Eq. (198.3) :

$\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial x_\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x^\beta} = g^{\beta\alpha} \dfrac{\partial}{\partial x^\beta} = g^{\alpha\beta} \dfrac{\partial}{\partial x^\beta}$: 4- vetor $\partial/\partial x_\alpha$ é <u>contravariante</u>

Define-se : $\partial_\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^0}, +\vec{\nabla} \right)$

$\partial^\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right)$ (199.4)

onde $\partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta$

$\hookrightarrow \quad \partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \dfrac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$: 4-divergente 4-vetor A^α (200.1)

e $\quad \square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \dfrac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \nabla^2$: 4-Laplaciano (d'Alembertiano) (200.2)

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

notar : Eq. (200.1) ~ eq. de continuidade ;
Eq. (200.2) ~ " " onda !

· Propriedades grupo de Lorentz (homogêneo).

ideia : determinar elementos do grupo de Lorentz em termos dos geradores das transf. de coordenadas. (similar discussão rotações em M.Q.)

inicial : notação matricial :

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x^t = (x^0 \; x^1 \; x^2 \; x^3) \qquad (200.3)$$

tensor métrico $g_{\alpha\beta}$: $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Eq. (195.1) pode ser escrita como

$$x'^{\alpha} = A^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta} \qquad (201.1)$$

elementos matriz 4x4 A que corresponde à transf. de coordenadas

ou, em notação matricial: $X' = A\,X$ (201.2)

como a transf. Lorentz ~ invariância s^2, Eq. (176.1), temos que

$$x'_{\alpha} x'^{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, x'^{\beta} x'^{\alpha} = g_{\alpha\beta}\, A^{\beta}{}_{\mu} A^{\alpha}{}_{\nu}\, x^{\mu} x^{\nu} = x_{\nu} x^{\nu} = g_{\nu\mu}\, x^{\mu} x^{\nu}$$

condição s^2 invariante

como o 4-vetor x^{α} é arbitrário

↳ $A^{\alpha}{}_{\nu}\, g_{\alpha\beta}\, A^{\beta}{}_{\mu} = (A^t)_{\nu}{}^{\alpha}\, g_{\alpha\beta}\, A^{\beta}{}_{\mu} = g_{\nu\mu}$

(201.3)

ou $A^t g A = g$: definição matriz A que descreve transf. Lorentz (notar similaridade definição matriz $\hat{A}$, pg. 68).

· propriedades matriz A,
(i) determinante,

Eq. (201.3) : $\det(A^t g A) = \det g \cdot (\det A)^2 = \det g$

como $\det g = -1 \neq 0 \rightarrow \det A = \pm 1$ (201.4)

↳ ∃ 2 classes de transf. Lorentz :
(cuidado : ≠ análogo notações pg. 69)

(1) transf. de Lorentz próprias : transf. que podem ser obtidas continuamente a partir identidade. Nesse caso temos, necessariamente, det $A = 1$;

(2) transf. de Lorentz impróprias : transf. que não podem ser obtidas continuamente a partir identidade. Nesse caso, podemos ter det $A = +1$ ou -1.

Ex. transf. (2) :

- inversão espacial :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = g \tag{202.1}$$

↳ det $A = -1$

- inversão espaço-temporal :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = -1_{4\times4} \tag{202.2}$$

↳ det $A = +1$

(ii) sobre número parâmetros,

- como A matriz 4×4 → 16 elementos
- Eq. (201.3) → 16 equações ;

entretanto, como $g = g^t$ → apenas 10 eqs. linearmente independentes

↳ 6 parâmetros (elementos A) livres

ou são necessários 6 parâmetros p/ especificar transf. descrita pela matriz A !

e.g., - 3 ângulos de Euler : orientação eixos REF K'
w.r.t. REF K (veja Fig. pg. 173)

e

- 3 componentes velocidade relativa $\vec{v}$ (ou vetor $\vec{\beta}$) : boost REF K' w.r.t. REF K (203.1)

notar : (203.1) consistente c/ (194.1) !

Obs. : discussão Secs. anteriores : apenas boost considerado !

próxima etapa : determinar matriz A ~ transf. Lorentz própria.

· hipótese : $A = e^L$. (203.2)

onde L : matriz 4×4

e $$e^L = 1 + L + \frac{1}{2!} L^2 + \frac{1}{3!} L^3 + \ldots \qquad (203.3)$$

verifica-se que (veja pg. 203.1)

$$\det A = \det(e^L) = \exp\big(\mathrm{Tr}(L)\big) \qquad (203.4)$$

$\hookrightarrow$ - se $L^\alpha{}_\beta \in \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{Tr}\,L \in \mathbb{R} \rightarrow \det A \neq -1$

- se $\mathrm{Tr}\,L = 0 \rightarrow \det A = +1$

$\hookrightarrow$ propriedades matriz L : $L^\alpha{}_\beta \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{Tr}\,L = 0$ (203.4)

notar Eq. (201.3) :

$$A^t g A = g \rightarrow g A^t g A = g^2 = 1 \rightarrow g A^t g = A^{-1}$$

↳ $A^{-1} = g\left(1 + L^t + \frac{1}{2!}(L^t)^2 + \frac{1}{3!}(L^t)^3 + \dots\right) g$

$= 1 + gL^tg + \frac{1}{2!}\underbrace{gL^tg^2L^tg}_{(gL^tg)^2} + \frac{1}{3!}\underbrace{gL^tg^2L^tg^2L^tg}_{(gL^tg)^3} + \dots$

Eq. (203.2)

$= e^{gL^tg} \stackrel{\downarrow}{=} e^{-L}$

↳ $gL^tg = -L \rightarrow g^2L^tg = -gL = L^tg = (gL)^t$, (204.1)

pois $g^2 = 1_{4\times4}$ e $g^t = g$.

se $L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{10} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{20} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{30} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \rightarrow gL = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ -L_{10} & -L_{11} & -L_{12} & -L_{13} \\ -L_{20} & -L_{21} & -L_{22} & -L_{23} \\ -L_{30} & -L_{31} & -L_{32} & -L_{33} \end{pmatrix}$

como gL é antisimétrica → $L_{\alpha\alpha} = 0$
(Eq. (204.1)) $L_{0\alpha} = L_{\alpha 0}$, $\alpha = 1,2,3$
$L_{21} = -L_{12}$, $L_{31} = -L_{13}$, $L_{32} = -L_{23}$

Dessa forma,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (204.2)$$

: forma geral matriz L.
ok c/ Eqs. (201.3), (203.2) e (203.4)

componente espacial (antisimétrica) ~ rotações em 3-D.

↳ componente espaço-temporal
(simétrica) ~ boost

é interessante escrever a matriz L (204.2) em termos das matrizes S_i e K_i, $i=1,2,3$, definidas como

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ Eq. (204.2) : $$L = -L_{23}S_1 + L_{13}S_2 - L_{12}S_3 + \sum_{i=1}^{3} L_{0i}K_i \qquad (205.1)$$

matrizes S_i : geradores de rotações em 3-D
K_i : " de boost

propriedade S_i e K_i,
verifica-se que (exercício) : $(\hat{\epsilon}\cdot\hat{S})^3 = -\hat{\epsilon}\cdot\hat{S}$
e $(\hat{\epsilon}\cdot\hat{K})^3 = +\hat{\epsilon}\cdot\hat{K}$, (205.2)

onde $\hat{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$: vetor unitário

e $\hat{S} = (S_1, S_2, S_3)$: vetor, componentes = matrizes S_i
$\hat{K} = (K_1, K_2, K_3)$: " " " K_i

é interessante reescrever (205.1) como

$$L = -\vec{\omega}\cdot\hat{S} - \vec{\zeta}\cdot\hat{K} \qquad (205.3)$$

↳ Eq. (203.2) : $A = \exp(-\vec{\omega}\cdot\hat{S} - \vec{\zeta}\cdot\hat{K})$

onde $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$: parâmetros ~ rotações 3-D
$\vec{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$: " ~ boost

· considerar 2 casos particulares Eq. (205.3)

(i) boost REF K' w.r.t. REF K, direção x : Eq. (177.3),

↳ $\vec{\omega} = 0$ e $\vec{\zeta} = (\zeta, 0, 0)$ → Eq. (205.3) : $L = -\zeta K_1$

notar:

$$A = e^{-\zeta K_1} = 1 - \zeta K_1 + \frac{1}{2!}(-\zeta K_1)^2 + \frac{1}{3!}(-\zeta K_1)^3 + \frac{1}{4!}(-\zeta K_1)^4 + \dots$$

como Eq. (205.2) : $(-\zeta K_1)^3 = (-\zeta)^3 K_1^3 = (-\zeta)^3 K_1$

$$(-\zeta K_1)^4 = (-\zeta)^4 K_1^3 \cdot K_1 = (-\zeta)^4 K_1^2$$

$$↳ A = 1 - K_1^2 + \underbrace{\left(-\zeta + \frac{1}{3!}(-\zeta)^3 + \dots\right)}_{=\sinh(-\zeta)} K_1 + \underbrace{\left(1 + \frac{(-\zeta)^2}{2!} + \frac{(-\zeta)^4}{4!} + \dots\right)}_{\cosh(-\zeta)} K_1^2$$

$$= 1 - K_1^2 - (\sinh\zeta) K_1 + (\cosh\zeta) K_1^2$$

exercício!

$$↳ A = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta & 0 & 0 \\ -\sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{: comparar Eq. (176.4)} \qquad (206.1)$$

(ii) rotação REF K' w.r.t. eixo $\hat{e}_3$ REF K,

↳ $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ e $\vec{\zeta} = 0$ → Eq. (205.3) : $L = -\omega S_3$

notar: $A = e^{-\omega S_3} = 1 - \omega S_3 + \frac{1}{2!}(-\omega S_3)^2 + \frac{1}{3!}(-\omega S_3)^3 + \frac{1}{4!}(-\omega S_3)^4 + \ldots$

como Eq. (205.2): $(-\omega S_3)^3 = (-\omega)^3 (-S_3)$

$(-\omega S_3)^4 = (-\omega)^4 S_3 \cdot S_3^3 = (-\omega)^4 (-S_3^2)$

↳ $A = 1 + S_3^2 - \underbrace{\left(\omega - \frac{1}{3!}\omega^3 + \ldots\right)}_{\sin\omega} S_3 - \underbrace{\left(1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \ldots\right)}_{\cos\omega} S_3^2$

$= 1 + S_3^2 - \sin\omega\, S_3 - \cos\omega\, S_3^2$

exercício!

↳ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

· Eq. (205.3), caso geral, somente boost,

$A = e^{-\vec{\zeta} \cdot \hat{K}}$

Lembrar Eq. (177.2): $\beta = \tanh \zeta \rightarrow \zeta = \tanh^{-1}\beta \longrightarrow \vec{\zeta} = \hat{\beta} \tanh^{-1}\beta$

↳ $A_{boost}(\vec{\beta}) = \exp\left(-\hat{\beta} \cdot \vec{\zeta}\, \tanh^{-1}\beta\right)$ (207.1)

↳ transf. de coordenadas (somente boost) (201.1):

$x' = A_{boost}(\vec{\beta})\, x$ (207.2)

· sobre as matrizes S_i e K_i,

- geradores do grupo de Lorentz;

· sobre a representação 2x2 do grupo de Lorentz restrito
(p/ detalhes, veja Sec. 1.5, Barut)

· Definição : grupo de Lorentz restrito :
matriz $\hat{A}$ ~ transf. Lorentz é
tal que : $\det \hat{A} = +1$
$A^0{}_0 \geq 1$!

ideia : verificar a correspondência :
matriz complexa $\hat{B}_{2\times 2}$, unimodular $\longrightarrow$ transf. Lorentz $\hat{A}(\pm \hat{B})$ (207.3)

i.e., $\exists$ homomorfismo entre
grupo de Lorentz restrito e grupo $SL(2,C)$: matrizes 2x2 complexas e unimodulares.

↳ além da representação 4x4 discutida acima, o grupo de Lorentz restrito apresenta representação 2x2 !

notar Eq. (207.3) : homomorfismo é two-to-one !

Obs. : notação Jackson/notas $\longleftrightarrow$ Barut
matriz $\hat{A}$ $\longleftrightarrow$ matriz $\hat{L}$
" $\hat{B}$ " " $\hat{A}$

considerar : (1) : $\hat{X}$: matriz Hermitiana 2x2

↳ $$\hat{X} = X^0 \hat{1}_{2\times 2} + X^i \hat{\sigma}_i = \begin{pmatrix} X^0 + X^3 & X^1 - iX^2 \\ X^1 + iX^2 & X^0 - X^3 \end{pmatrix} \qquad (207.4)$$

números $\mathbb{R}$ ↳ matriz de Pauli

se $\hat{\sigma}_0 = \hat{1}_{2\times 2}$ $\longrightarrow$ $\hat{X} = X^\mu \sigma_\mu$ (207.5)

(2) $\hat{B}$: matriz arbitrária 2×2 complexa e unimodular

↳ $\det \hat{B} = +1$

(3) $\hat{X}'$: matriz Hermitiana 2×2 tal que

$$\hat{X}' = \hat{B}\,\hat{X}\,\hat{B}^{\dagger} \qquad (207.6)$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (207.5)}} \quad \hat{X}' = X'^{\mu}\sigma_{\mu}$$

como $\det \hat{X}' = \det(\hat{B}\,\hat{X}\,\hat{B}^{\dagger}) = \det \hat{X}$

↳ $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2$ (207.7)

notar Eqs. (207.6) e (207.7) : matriz $\hat{B}$ ~ transf. Lorentz $x^{\mu} \to x'^{\mu}$!

dessa forma, temos que

Eq. (201.1) : $x'^{\mu} = A^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$

↳ $\hat{X}' = x'^{\mu}\hat{\sigma}_{\mu} = A^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}\hat{\sigma}_{\mu} \overset{(207.6)}{=} \hat{B}\, x^{\nu}\hat{\sigma}_{\nu}\,\hat{B}^{\dagger}$

↳ $(A^{\mu}{}_{\nu}\,\hat{\sigma}_{\mu})\, x^{\nu} = (\hat{B}\,\hat{\sigma}_{\nu}\,\hat{B}^{\dagger})\, x^{\nu} \longrightarrow A^{\mu}{}_{\nu}\,\hat{\sigma}_{\mu} = \hat{B}\,\hat{\sigma}_{\nu}\,\hat{B}^{\dagger}$

↳ $A^{\mu}{}_{\nu}\,\underbrace{\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_{\rho}\hat{\sigma}_{\mu})}_{2\delta^{\rho}{}_{\mu}} = \mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_{\rho}\,\hat{B}\,\hat{\sigma}_{\nu}\,\hat{B}^{\dagger})$

↳ $A(\hat{B})^{\mu}{}_{\nu} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_{\mu}\,\hat{B}\,\hat{\sigma}_{\nu}\,\hat{B}^{\dagger})$: elemento $A^{\mu}{}_{\nu}$ matriz $\hat{A}$ ~ transf. Lorentz determinado matriz $\pm\hat{B}_{2\times 2}$!

: homomorfismo (207.3) !

· álgebra : considerando o comutador entre duas matrizes $[A,B] = AB - BA$ e as matrizes (205.1), verifica-se que (exercício):

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$$: álgebra S_i = álgebra componentes momento angular;

$$[S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$$: $\hat{K}$ se transforma como vetor sob rotações;

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k \qquad (208.1)$$: boosts, em geral, não comutam

Eq. (208.1) : álgebra geradores grupo de Lorentz!

↳

· Formulação covariante da eletrodinâmica.

Lembrar postulado (1) : eqs. de Maxwell são covariantes (apresentam a mesma forma) sob transformações de Lorentz.

↳ ideia : analisar comportamento campos e fontes sob transf. de Lorentz e reescrever as Eqs. de Maxwell em uma forma explicitamente covariante!

Vamos analisar as principais eqs. do EM.

(i) eq. de continuidade.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \qquad (208.2)$$

Lembrar: 4-divergente do 4-vetor A^α:

$$\partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \qquad (209.1)$$

comparando Eqs. (208.2) e (209.1) → definição 4-vetor contravariante

$$J^\alpha = (c\rho, \vec{J}) \qquad (209.2)$$

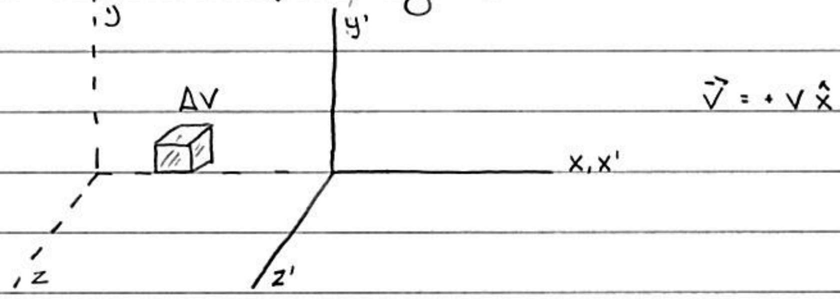
↳ Eq. (208.2): $\partial_\alpha J^\alpha = 0$, (209.3)

i.e., eq. de continuidade pode ser escrita como produto escalar 4-vetores ∂_α e J^α → Eq. (209.3) é invariante sob transf. Lorentz

ou Eq. (209.3): forma covariante eq. de continuidade!

De fato, a propriedade 4-vetorial de J^α ~ carga elétrica (escalar) é invariante;

considerar REFs K e K', volume ΔV em repouso w.r.t. REF K e Δq: carga elétrica ∈ ΔV



REF K: $J^\alpha = (c\rho, 0)$

Eq. (179.2):
$$J'^0 = \gamma J^0 = \gamma c\rho$$
$$J'^1 = -\gamma\beta J^0 = -\gamma v\rho \qquad (209.4)$$
$$J'^2 = 0$$
$$J'^3 = 0$$

por outro lado, temos que

$$J'^0 = c\rho' = c\,\frac{\Delta q}{\Delta V'} = c\,\gamma\,\frac{\Delta q}{\Delta V} = \gamma c\rho = \gamma J^0$$

--- contração volume Eq. (180.3) : $\Delta V' = \Delta V/\gamma$

e invariância Δq

$$\vec{J}' = \rho'(-\vec{v}) = -\rho' v\,\hat{x} \quad \rightarrow \quad J'^1 = -(\gamma\rho)v \quad : \text{Eq. (209.4) !}$$

(ii) potenciais escalar e vetor,

Lembrar eqs. de movimento (52.2) p/ Φ e $\vec{A}$, gauge de Lorentz (sistema Gaussiano) :

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Phi = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c}(c\rho)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

(210.1)

+ condição de Lorentz (52.1): $\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

e 4- Laplaciano (200.2) $\square = \partial_\alpha\partial^\alpha = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2$

↳ Eqs. (209.2) e (210.1) → definição 4-vetor contravariante

$$A^\alpha = (\Phi, \vec{A}) \qquad (210.2)$$

↳ é possível escrever a condição de Lorentz forma covariante:

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \qquad (210.2)$$

e, de modo análogo, as eqs. de onda (52.2), i.e.,

$$\Box A^{\alpha} = \partial_{\beta}\partial^{\beta}A^{\alpha} = \frac{4\pi}{c}J^{\alpha} \qquad (211.1)$$

(iii) campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$,

Lembrar: campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos potenciais Φ e $\vec{A}$:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\Phi \qquad e \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

temos que, e.g., componente x: Eqs. (199.4) e (210.2)

$$\cdot\; E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial A_x}{\partial x^0} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = -\partial^0A^1 + \partial^1A^0$$

$$= -(\partial^0A^1 - \partial^1A^0)$$

$$\cdot\; B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial A_y}{\partial x^3} = \partial^3A^2 - \partial^2A^3 = -(\partial^2A^3 - \partial^3A^2)$$

↳ é interessante definir tensor antisimétrico de ordem 2

$$F^{\alpha\beta} = \partial^{\alpha}A^{\beta} - \partial^{\beta}A^{\alpha} \quad : \text{tensor de campo} \qquad (211.2)$$

onde $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$;
em termos componentes campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (verificar)

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (211.3)$$

além disso, é útil introduzir 2 tensores derivados a partir de $F^{\alpha\beta}$,

(1) tensor covariante $F_{\alpha\beta}$,

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (212.1)$$

notar : $F^{\alpha\beta} \xrightarrow{\vec{E} \to -\vec{E}} F_{\alpha\beta}$!

(2) tensor dual $\tilde{F}_{\alpha\beta}$,

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (212.2)$$

onde

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} +1, & \alpha\beta\mu\nu = 0123 \text{ e permutações cíclicas} \\ -1, & \alpha\beta\mu\nu = 1023 \text{ e } \quad \text{"} \quad\quad \text{"} \quad : \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (212.3)$$

: tensor ordem 4 totalmente antisimétrico

notar : $F^{\alpha\beta} \xrightarrow[\vec{B} \to -\vec{E}]{\vec{E} \to \vec{B}} \tilde{F}^{\alpha\beta}$

transf. dual pg. 77 (sistema Gaussiano)

Obs. : propriedade $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$,

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\bar{\alpha}} g_{\beta\bar{\beta}} g_{\mu\bar{\mu}} g_{\nu\bar{\nu}} \epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\mu}\bar{\nu}}$$

$$= \underbrace{(+1)\cdot(-1)^3}\, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \quad (212.4)$$

↳ pois elementos $\neq 0$ ~ 1 índice temporal
3 " espaciais $\neq$s !

(iv) eqs. de Maxwell,

Eqs. de Maxwell (50.1) e (50.2) (vácuo), (sistema Gaussiano):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c}(c\rho) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \qquad (213.1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = 0 \qquad (213.2)$$

comparando Eqs. (211.3), (213.1) e (213.2)

↳ é interessante considerar: $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}$!

notar:

(1) : $\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30}$

$$= +\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

(213.3)

(2) : $\partial_\alpha F^{\alpha 1} = \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31}$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = (\vec{\nabla}\times\vec{B})_x - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

e similar p/ $\beta = 2,3$!

Eqs. (210.2) e (213.3) -> eqs. não-homogêneas (213.1) assumem a forma covariante:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \qquad (213.4)$$

sobre as eqs. homogêneas (213.2):

como L.H.S. (213.2) $\xrightarrow[\vec{B} \to -\vec{E}]{\vec{E} \to \vec{B}}$ L.H.S. (213.1),

vamos considerar o tensor dual $\tilde{F}^{\alpha\beta}$,

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \left(\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu - \underbrace{\partial_\alpha \partial_\nu A_\mu}_{\nu \leftrightarrow \mu} \right)$$

$$= \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\mu A_\nu$$

$$= 1/2\, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu + \underbrace{\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu}_{\alpha \leftrightarrow \mu} \right)$$

$$= 1/2\, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu - \underbrace{\partial_\mu \partial_\alpha A_\nu}_{\partial_\alpha \partial_\mu A_\nu} \right) = 0 \qquad (214.1)$$

notar:

(1): $\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 0} = \partial_1 \tilde{F}^{10} + \partial_2 \tilde{F}^{20} + \partial_3 \tilde{F}^{30} = 0$

$$= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(2): $\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha 1} = \partial_0 \tilde{F}^{01} + \partial_2 \tilde{F}^{21} + \partial_3 \tilde{F}^{31} = 0$

$$= \frac{-1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = -(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x - \frac{1}{c} \partial_t B_x = 0$$

e análogo p/ $\beta = 2, 3$!

↳ <u>forma covariante</u> eqs. homogêneas (213.2):

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0 \qquad (214.2)$$

(v) Lei de Lorentz,

considerar partícula massa m, carga q sob campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$; eq. de movimento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right) \qquad (214.3)$$

a fim de determinar a forma covariante de (214.3), vamos proceder de modo análogo à discussão da 4-velocidade e considerar:

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d\vec{p}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c}\left((\gamma c)\vec{E} + (\gamma\vec{u})\times\vec{B}\right) \qquad (215.1)$$

considerar componente x, Eq. (215.1):

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \frac{q}{c}\left((\gamma c)E_x + \underbrace{(\gamma u_y)B_z - (\gamma u_z)B_y}_{(-\gamma u_y)(-B_z) \,+\, (-\gamma u_z)B_y}\right)$$

Eqs. (190.1) e (211.3) →

$$= \frac{q}{c}\left(U_0F^{10} + U_2F^{12} + U_3F^{13}\right) = \frac{q}{c}F^{1\alpha}U_\alpha$$

↳ forma covariante, eq. de movimento partícula:

$$\frac{dP^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c}F^{\alpha\beta}U_\beta \qquad (215.2)$$

onde $P^\alpha = (P^0, \vec{P}) = (E/c, \vec{P})$: 4-momento (192.2)!

notar: $\dfrac{dP^0}{d\tau} = \dfrac{q}{c}F^{0\beta}U_\beta$

$$\frac{d(E/c)}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{q}{c}\left(\underbrace{F^{01}U_1 + F^{02}U_2 + F^{03}U_3}_{(-E_x)(-\gamma u_x) + (-E_y)(-\gamma u_y) + (-E_z)(-\gamma u_z)}\right)$$

↳ $\dfrac{dE}{dt} = q\vec{E}\cdot\vec{u} = \vec{J}\cdot\vec{E}$: variação temporal energia partícula: Eq. (61.2)! (215.3)

Obs. : componente espacial (215.2) $\rightarrow$ eq. de movimento (214.3)

Resumo: formulação covariante EM, em termos:

4-vetores $J^\alpha = (c\rho, \vec{J})$ e $A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$
tensores $F^{\alpha\beta}$ e $\tilde{F}^{\alpha\beta}$

e Eqs. (213.4), (214.2) e (215.2);
Eq. (209.3).

· Transformação campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

a transf. das componentes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sob uma transformação de Lorentz pode ser obtida a partir da transf. do tensor $F^{\alpha\beta}$.

Eqs. (196.3) e (201.1) : $F'^{\alpha\beta} = A^\alpha{}_\mu A^\beta{}_\nu F^{\mu\nu} = A^\alpha{}_\mu F^{\mu\nu} (A^t)_\nu{}^\beta$ (216.1)

ou em notação matricial : $F' = A F A^t$

considerar, em particular, boost direção $\hat{x}$; nesse caso

Eq. (206.1) : $$A = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (216.2)

temos que,

$$F'^{0i} = A^0{}_\mu A^i{}_\nu F^{\mu\nu} = A^0{}_0 A^i{}_\nu F^{0\nu} + A^0{}_1 A^i{}_\nu F^{1\nu}$$

$$= A^0{}_0 A^i{}_i F^{0i} + A^0{}_1 A^i{}_\nu F^{1\nu} = \gamma \left(A^i{}_i F^{0i} - \beta A^i{}_\nu F^{1\nu} \right)$$

$\hookrightarrow -E'_x = F'^{01} = \gamma(\gamma F^{01} - \beta(-\beta\gamma) F^{10})$

$= \gamma^2(-E_x + \beta^2 E_x) = -E_x$

$-E'_y = F'^{02} = \gamma(F^{02} - \beta \cdot 1 \cdot F^{12}) = \gamma(-E_y - \beta(-B_z))$

$-E'_z = F'^{03} = \gamma(F^{03} - \beta \cdot 1 \cdot F^{13}) = \gamma(-E_z - \beta B_y)$

temos que,

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) \end{aligned} \quad \xrightarrow[\vec{B} \to -\vec{E}]{\vec{E} \to \vec{B}} \quad \begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \qquad (217.1)$$

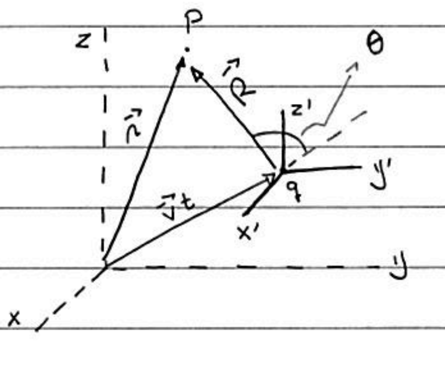
caso geral: $\forall \vec{v}$ e eixos $\hat{e}_i \parallel$ eixos $\hat{e}'_i$ (veja Eq. (178.2)),

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E})$$
$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{B}) \qquad (217.2)$$

Obs.: transf. inversa: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{E}'$; $\vec{B} \leftrightarrow \vec{B}'$ e $\vec{\beta} \to -\vec{\beta}$

Ex.: considerar carga pontual q, velocidade $\vec{v}$, movimento uniforme; determinar campos $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$

(REF K)



carga q em repouso w.r.t. REF K'.

Obs.: caso particular: $\vec{v} = v\hat{j}$ e pto $P = (0,0,z)$
discutido Sec. 11.10, Jackson;
vamos considerar caso geral: $\forall\, \vec{v}$.

REF K': $\vec{E}' = \dfrac{q}{r'^2}\,\hat{r}' = \dfrac{q\vec{r}'}{r'^3}$ e $\vec{B}' = 0$ (218.1)

transf. inversa (217.2) ⊕ $\vec{B}' = 0$:

$$\vec{E} = \gamma\left(\vec{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{E}')\right)$$

$$\vec{B} = \gamma\vec{\beta}\times\vec{E}' \qquad (218.2)$$

notar Eq. (218.2): $\vec{B} = \vec{\beta}\times\vec{E}$

↳ ideia: utilizar (218.2) e determinar $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$!

é interessante introduzir vetor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t = \vec{r} - \vec{\beta}x_0$

Eqs. (218.1) e (218.2): $\vec{E} = \dfrac{\gamma q}{r'^3}\left(\vec{r}' - \dfrac{\gamma}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{r}')\right)$

Eq. (178.2): $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\beta}\gamma x_0 + \underbrace{\dfrac{(\gamma-1)}{\beta^2}}_{\gamma^2/1+\gamma}\vec{\beta}(\vec{r}\cdot\vec{\beta})$

↳ $\vec{r}' = \vec{R} + \vec{\beta}x_0 - \vec{\beta}\gamma x_0 + \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{R} + \beta^2 x_0\right)$

$= \vec{R} + \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{R}) + \vec{\beta}(1-\gamma)x_0 + \vec{\beta}(\gamma-1)x_0$

$= \vec{R} + \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{R})$ (218.3)

$\hookrightarrow r'^2 = R^2 + \dfrac{\gamma^4\beta^2}{(\gamma+1)^2}(\vec{\beta}\cdot\vec{R})^2 + \dfrac{2\gamma^2}{(1+\gamma)}(\vec{\beta}\cdot\vec{R})^2$

$= R^2 + \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\vec{R})^2 = R^2\gamma^2\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right) \quad ; \quad \hat{\beta}\cdot\hat{R} = \cos\theta$

notar: $\vec{r}\,' = \vec{R} + \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{R})$

$\hookrightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{r}\,' = \vec{\beta}\cdot\vec{R} + \dfrac{\gamma^2\beta^2}{\gamma+1}(\vec{\beta}\cdot\vec{R}) = \gamma(\vec{\beta}\cdot\vec{R})$

$\hookrightarrow \dfrac{-\gamma}{1+\gamma}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{r}\,') = \dfrac{-\gamma^2}{1+\gamma}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{R})$

temos que

$$\vec{E} = \frac{\gamma q}{r'^3}\left(\vec{r}\,' - \frac{\gamma}{\gamma+1}\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{r}\,')\right)$$

$$= \frac{\gamma q \, \vec{R}}{R^3\gamma^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} = \frac{q}{R^2}\,\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\,\hat{R} \qquad (219.1)$$

e $\vec{B} = \vec{\beta}\times\vec{E}$

Lembrar: $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$.

Obs.: sobre o momento angular (p/ detalhes veja Cap. 2. Barut)

considerar tensor antisimétrico de ordem 2

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad ; \quad J^{\nu\mu} = -J^{\mu\nu} \qquad (219.2)$$

notar: $J^{12} = x^1 p^2 - x^2 p^1 = x p_y - y p_x = L_z$

$J^{13} = x^1 p^3 - x^3 p^1 = x p_z - z p_x = -L_y$: componentes espaciais momento angular!

$J^{23} = x^2 p^3 - x^3 p^2 = y p_z - z p_y = +L_x$

p/ as componentes espaço-temporal, temos que

$$J^{0i} = x^0 p^i - x^i p^0 = ct(\gamma_u m u_i) - x_i(\gamma_u m c)$$

$$= \gamma_u m c\,(u_i t - x_i) \qquad (219.3)$$

notar: p/ partícula movimento linear: $J^{0i} = 0$

↳ possível interpretação J^{0i}: medida desvio do movimento linear!

verifica-se que (exercício):

$$J^{\mu\nu} J_{\mu\nu} = (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu)(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) = 2 x^\mu x_\mu p^\nu p_\nu - 2(x^\mu p_\mu)^2$$

$$= J^{0i} J_{0i} + J^{i0} J_{i0} + J^{12} J_{12} + J^{13} J_{13} + J^{21} J_{21}$$

$$+ J^{31} J_{31} + J^{32} J_{32} = -2(J^{0i})^2 - 2\vec{L}\cdot\vec{L}$$

· Alternativa determinação Eq. (215.2),
(p/ detalhes veja Cap. 2, Barut)

considerar: partícula massa $\underline{m}$ sob força $\vec{F}$.

↳ $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$: eq. de movimento (219.4)

ideia: determinar forma covariante Eq. (219.4).

de modo análogo à determinação 4-velocidade, temos que

$\dfrac{dP^\mu}{d\tau} = K^\mu$: eq. de movimento de Minkowski (219.5)

K^μ ↳ 4-força

notar: (i) $\dfrac{dP^\mu}{d\tau} = \dfrac{d}{d\tau}(mU^\mu) = mD^\mu$

como $U_\mu D^\mu = 0 \rightarrow U_\mu K^\mu = 0$

↳ $U_0K^0 - (\gamma\vec{u})\cdot\vec{k} = (\gamma c)K^0 - (\gamma\vec{u})\cdot\vec{k} = 0 \rightarrow K^0 = \frac{1}{c}\vec{u}\cdot\vec{k}$

(ii) $\dfrac{dP^\mu}{d\tau} = \dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{dP^\mu}{dt} = \gamma\dfrac{dP^\mu}{dt}$

↳ $\gamma\dfrac{dP^0}{dt} = \dfrac{\gamma}{c}\dfrac{dE}{dt} = K^0 = \dfrac{1}{c}\vec{u}\cdot\vec{k}$

$\gamma\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{k} = \gamma\vec{F}$

↳ Eq. (219.4)

↳ $K^\mu = \left(\dfrac{\gamma}{c}\vec{u}\cdot\vec{F}, \gamma\vec{F}\right)$: 4-força em termos $\vec{F}$ (219.6)

(iii) $\frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c}\vec{u}\cdot\vec{K} = \frac{\gamma}{c}\vec{u}\cdot\vec{F}$

↳ $\frac{dE}{dt} = \vec{u}\cdot\vec{F}$: Eq. (215.3) !

Resumo propriedades 4-força K^μ:

$$U_\mu K^\mu = 0 \quad \text{e} \quad K^0 = \frac{1}{c}\vec{u}\cdot\vec{K} \qquad (219.7)$$

· sobre a forma K^μ.

como $K^0 \propto \vec{u}$ → $K^\mu \propto U^\mu$

vamos considerar 2 casos:

(1) hipótese: $K^\mu = \lambda F^{\mu\nu} U_\nu$

↳ $U_\mu K^\mu = \lambda F^{\mu\nu} U_\mu U_\nu = 1/2\,\lambda\,(F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu})\,U_\mu U_\nu = 0 \rightarrow F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

↳ $F^{\mu\nu}$: tensor antisimétrico ordem 2!

se $F^{\mu\nu}$: tensor de campo e $\lambda = q/c$ ⟶ Eq. (215.2) !

(2) hipótese : $K^\mu = \partial_\nu \phi \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} U^\mu U^\nu\right)$; $\phi = \phi(\vec{r}, t)$

↳ $U_\mu K^\mu = \partial_\nu \phi \left(U^\nu - \frac{1}{c^2} U^\nu U^\mu U_\mu\right) = 0$

verifica-se (exercicio):

$$K^0 = \frac{1}{c}(1-\gamma^2)\,\partial_t \phi - \frac{1}{c}\gamma^2 \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{K} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c^2}\gamma^2\vec{u}\left(\partial_t\phi + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\phi\right) \xrightarrow{v/c \ll 1} -\vec{\nabla}\phi \quad !$$

tilibra