

Equações de Maxwell, leis de conservação,

Ref.: Secs. 6.1-6.4; 6.7; 6.10-6.12, Jackson

Eqs. de Maxwell (vácuo):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad (50.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (50.2)$$

potenciais escalar e vetor,

ideia: generalizam relações (7.2) e (35.3) entre potenciais e campos estáticos p/ caso dependente t .

- consideram eqs. de Maxwell homogêneas (50.2):

como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$, similar caso estático, podemos escrever

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (50.3)$$

$$\text{notan: } \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = 0$$

↑
Eq. (50.3)

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

como $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = 0$ p/ ψ função escalar $\psi = \psi(\vec{r}, t)$, temos que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi \quad \text{ou} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \Phi = \Phi(\vec{r}, t) \quad (50.4)$$

notan Eqs. (50.3) e (50.4): \vec{E} e \vec{B} definidos em termos Φ e \vec{A} satisfazem eqs. homogêneas (50.2)

- consideram eqs. de Maxwell não-homogêneas (50.1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A}) = -\nabla^2 \Phi - \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = +\rho / \epsilon_0$$

↑ Eq. (50.4)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t (\vec{\nabla} \Phi + \partial_t \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

↑ Eq. (50.3)

como $\rho / \epsilon_0 \checkmark \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$: identidade

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (51.1)$$

↳

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j} \quad (51.2)$$

: eqs. de movimento p/ Φ e \vec{A} !

notas: 4 eqs. diferenciais acopladas de 1ª ordem → 2 eqs. diferenciais acopladas de 2ª ordem!

próxima etapa: consideram a invariância de gauge (calibre) dos campos \vec{E} e \vec{B} p/ simplificam (51.1) e (51.2).

· invariância de gauge.

$$\text{notas: se } \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

(51.3)

$$\text{e } \Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \partial_t \Lambda \quad ; \quad \Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$$

$$\text{↳ } \vec{E}' = -\vec{\nabla} \Phi' - \partial_t \vec{A}' = -\vec{\nabla} \Phi - \partial_t \vec{A} = \vec{E}$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B},$$

i.e., conjuntos (\vec{A}, Φ) e (\vec{A}', Φ') \rightarrow mesmos \vec{E} e \vec{B} : invariância de gauge !

Eq. (51.3) : transformação de gauge (calibre) ;

liberdade que permite escolha conveniente \vec{A} e Φ !

(comparar caso estático, pg. 36)

vamos discutir 2 casos :

(i) gauge de Lorenz,

nesse caso, liberdade (51.3) permite escolha :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0 \quad : \text{ gauge de Lorenz} \quad (52.1)$$

\rightarrow eqs. de movimento (51.1) e (51.2) desacopladas :

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (52.2)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

notar: se \vec{A} e Φ não satisfazem (52.1), é possível determinar \vec{A}' e Φ' ou c/ (52.1) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi' = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) + \frac{1}{c^2} \partial_t (\Phi - \partial_t \Lambda) = 0$$

\uparrow Eq. (51.3) \uparrow condição

$$\rightarrow \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \right), \quad (52.3)$$

i.e., se $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ solução (52.3) \rightarrow \vec{A}' e Φ' ou c/ (52.1) !

Eq. (52.3) \rightarrow se \vec{A} e Φ ou c/ (52.1) e $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ é

tal que

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \quad (53.1)$$

$$\hookrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \quad \text{e} \quad \Phi' = \Phi - \partial_t \Lambda \quad \text{OK c/ (52.1)};$$

$\hookrightarrow \exists$ conjunto de potenciais (\vec{A}', Φ') que satisfazem condição (52.1) ou pertencem ao gauge de Lorenz!

(ii) gauge de Coulomb (transverso ou radiação),

nesse caso, liberdade (51.3) permite escolha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad : \text{ gauge de Coulomb} \quad (53.2)$$

\hookrightarrow eqs. de movimento (51.1) e (51.2):

$$\nabla^2 \Phi = -\rho / \epsilon_0 \quad (53.3)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} (\partial_t \Phi)$$

notas: (1) Φ satisfaz eq. de Poisson

$$\text{L pg. 10} \rightarrow \Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (53.4)$$

Eq. (53.4): potencial de Coulomb : termo "gauge de instantâneo $\sim \rho(\vec{r}, t)$ Coulomb"

(2) densidade de corrente \vec{J} pode ser escrita como

$$\vec{J} = \vec{J}_\perp + \vec{J}_\parallel \quad (53.5)$$

\swarrow corrente transversal, $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\perp = 0$
 \searrow " longitudinal, $\vec{\nabla} \times \vec{J}_\parallel = 0$

Lembrando teorema de Helmholtz (8.5):

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \underbrace{-\vec{\nabla}}_{=\vec{J}_e} \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3n'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t) \right) + \underbrace{\nabla \times}_{=\vec{J}_t} \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3n'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{J}(\vec{r}', t) \right), \quad (54.1)$$

pois $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e$ e $\vec{\nabla} \times \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{J}_t$

notas: Eq. (53.4) \oplus eq. de continuidade (29.3):

$$\partial_t \phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3n'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \partial_t \rho(\vec{r}', t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3n'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t) \quad (54.2)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} (\partial_t \phi) = \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} (\partial_t \phi) = \mu_0 \vec{J}_e = \mu_0 (\vec{J} - \vec{J}_t)$$

nesse caso, eq. de movimento (53.4) assume a forma:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}_t \quad (54.3)$$

Eq. (54.3): \vec{A} determinado apenas: termo "gauge" por \vec{J}_t "transverso"

de modo análogo à (52.3): se \vec{A} e ϕ não satisfazem (53.2), é possível determinar \vec{A}' e ϕ' ou c/ (53.2):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) = 0$$

\uparrow Eq. (53.3) \uparrow condição

$$\hookrightarrow \nabla^2 \Lambda = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad : \text{similar eq. de Poisson p/ } \Lambda = \Lambda(\vec{r}, t).$$

$$\text{L'pg. 30} \rightarrow \Lambda(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3n'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{A}(\vec{r}', t), \quad \text{p/ } \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0!$$

• solução geral eq. de onda não-homogênea,

notas: Eqs. (52.2) e (54.3) : eqs. de onda, forma geral:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\vec{n}, t) = -4\pi f(\vec{n}, t) \quad (55.1)$$

↳ fonte, função conhecida
↳ velocidade propagação meio

ideia: determinar sol. particular (55.1) via método da função de Green (veja pg. 12, caso estático)

hipóteses: meio não dispersivo;

volume $V \rightarrow +\infty$, i.e., sistema não é delimitado por superfícies (fronteiras)

considerar eq. auxiliar:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{n}, t; \vec{n}', t') = -4\pi \delta(\vec{n} - \vec{n}') \delta(t - t') \quad (55.2)$$

hipótese: $G(\vec{n}, t; \vec{n}', t') = G(\vec{n} - \vec{n}', t - t') \sim$ invariância translações espacial e temporal (55.2)

definindo $\vec{R} = \vec{n} - \vec{n}' \rightarrow \nabla^2 = \nabla_{\vec{R}}^2 \rightarrow \nabla^2$

$$\tau = t - t' \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (55.2)}: \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) G(\vec{R}, \tau) = -4\pi \delta(\vec{R}) \delta(\tau) \quad (55.3)$$

considerar transformada de Fourier de $G(\vec{R}, \tau)$:

$$G(\vec{R}, \tau) = \int d^3k \, d\omega \, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega \tau)} G(\vec{k}, \omega) \quad (55.4)$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 G(\vec{R}, \tau) = \int d^3k \, d\omega \, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega \tau)} (-k^2) G(\vec{k}, \omega)$$

$$\partial_{\tau}^2 G(\vec{R}, \tau) = \int d^3\kappa d\omega e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{R} - \omega\tau)} (-\omega^2) G(\vec{\kappa}, \omega)$$

como pg. 4.2 : $\delta(\vec{R})\delta(\tau) = \int \frac{d^3\kappa d\omega}{(2\pi)^4} e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{R} - \omega\tau)}$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (55.3)} : \int d^3\kappa d\omega e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{R} - \omega\tau)} \left((-\kappa^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) G(\vec{\kappa}, \omega) + \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \right) = 0$$

$$\hookrightarrow G(\vec{\kappa}, \omega) = \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \frac{1}{\kappa^2 - \omega^2/c^2} \quad (56.1)$$

notas: polos $G(\vec{\kappa}, \omega)$: $\kappa = \pm \omega/c$: relação # onda e frequência !

verifica-se que (veja pg. 56.1)

$$G^{(+)}(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{R} \delta(\tau - R/c) \quad : \text{função de Green retardada} \quad (56.2)$$

$$G^{(-)}(\vec{R}, \tau) = \frac{1}{R} \delta(\tau + R/c) \quad : \quad " \quad " \quad \text{avançada}$$

ou, em termos das variáveis originais:

$$G^{(+)}(\vec{n} - \vec{n}', t - t') = \frac{1}{|\vec{n} - \vec{n}'|} \delta\left(t' - (t - |\vec{n} - \vec{n}'|/c)\right) \quad (56.3)$$

$$G^{(-)}(\vec{n} - \vec{n}', t - t') = \frac{1}{|\vec{n} - \vec{n}'|} \delta\left(t' - (t + |\vec{n} - \vec{n}'|/c)\right)$$

$$\hookrightarrow \Psi^{(\pm)}(\vec{n}, t) = \int d^3n' dt' G^{(\pm)}(\vec{n}, t; \vec{n}', t') f(\vec{n}', t') :$$

$$: \text{sol. particular (55.1)} \quad (56.4)$$

Vamos verificar Eq. (56.2).

Eqs. (55.4) ⊕ (56.1):

$$G(\vec{R}, t) = \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{k^2 - \omega^2/c^2} \int \sin\theta d\theta d\varphi e^{i\vec{k}\cdot\vec{R} \cos\theta}$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{1}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi i} \frac{k}{k^2 - \omega^2/c^2} (e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} - e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}})$$

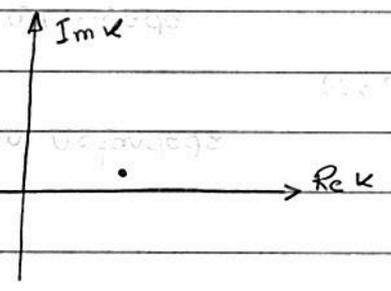
notas! ↗ ↘ I

I pode ser calculada por resíduos;
 devido ao modo de tratamento das singularidades
 (relacionado às possíveis condições de contorno, veja pg. 57),
 é necessário considerarmos 2 casos:

(i) $\omega \rightarrow \omega + i\eta$; $\eta \rightarrow 0^+$

polos: $k = +\omega/c \rightarrow +\omega/c + i\eta$

$k = -\omega/c \rightarrow -\omega/c - i\eta \dashrightarrow$



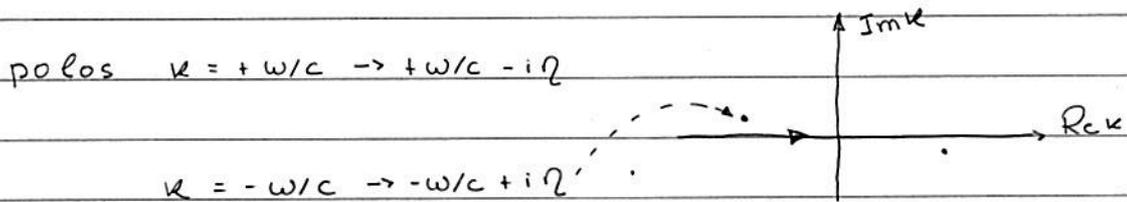
como $I = I_1 + I_2$, onde

$$I_1 = \int_{\text{counterclock}} \frac{dk}{2\pi i} \frac{k e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{(k + \omega/c + i\eta)(k - \omega/c - i\eta)} = \frac{2\pi i}{2\pi i} (+1) \cdot \frac{1}{2} e^{i\omega R/c}$$

$$I_2 = \int_{\text{clockwise}} \frac{dk}{2\pi i} \frac{(-k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{(k + \omega/c + i\eta)(k - \omega/c - i\eta)} = \frac{2\pi i}{2\pi i} (-1)(-1) \cdot \frac{1}{2} e^{i\omega R/c}$$

$$\hookrightarrow G(\vec{R}, \tau) = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot \frac{1}{2R} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(\tau - R/c)}}_{\delta(\tau - R/c)} = G^{(+)}(\vec{R}, \tau)$$

$$(ii) \omega \rightarrow \omega - i\eta; \quad \eta \rightarrow 0^+$$



nesse caso,

$$I_1 = \int_{\text{contour}} \frac{dk}{2\pi i} \frac{k e^{i k R}}{(k + \omega/c - i\eta)(k - \omega/c + i\eta)} = \frac{2\pi i (+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-i\omega R/c}}{2\pi i}$$

$$I_2 = \int_{\text{contour}} \frac{dk}{2\pi i} \frac{(-k) e^{-i k R}}{(k + \omega/c - i\eta)(k - \omega/c + i\eta)} = \frac{2\pi i (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-i\omega R/c}}{2\pi i}$$

$$\hookrightarrow G(\vec{R}, \tau) = \frac{4\pi}{2\pi} \cdot \frac{1}{2R} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(\tau + R/c)}}_{\delta(\tau + R/c)} = G^{(-)}(\vec{R}, \tau)$$

sobre os termos "retardada" e "avanzada",

Eqs. (56.3) e (56.4):

- $G^{(+)}$ relaciona evento em (\vec{r}, t) c/ ação fonte em \vec{r}'
no instante anterior $t' = t - R/c$, i.e. $t' < t$.

- $G^{(-)}$ " " ... no instante posterior $t' = t + R/c$, i.e. $t' > t$.

notas: em ambos os casos, efeito se propaga c/
velocidade finita c .

sobre as condições de contorno p/ t ,

sol. geral (55.1): $\psi = \psi_{\text{HOMOG}} + \psi_{\text{PART}}$

hipótese: $f(\vec{r}', t')$ localizado no tempo e no espaço, i.e.,
 $f(\vec{r}', t') \neq 0$ apenas p/ $-t_0 < t' < t_0$

vamos considerar 2 casos:

(i) p/ $t \rightarrow -\infty$: $\psi = \psi_{\text{HOMOG}} = \psi_{\text{IN}}(\vec{r}, t)$ (*);

nesse caso, a c.c. (*) é satisfeita apenas por $\psi^{(+)}$, i.e.,

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_{\text{IN}}(\vec{r}, t) + \psi^{(+)}(\vec{r}, t)$$

$$= \psi_{\text{IN}}(\vec{r}, t) + \underbrace{\int d^3n' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} f(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}_{(I)} \quad (57.1)$$

notas: a função delta de Dirac em $G^{(+)} \rightarrow \lim_{t \rightarrow -\infty} (I) = 0!$

(ii) p/ $t \rightarrow +\infty$: $\psi = \psi_{\text{HOMOG}} = \psi_{\text{OUT}}(\vec{r}, t)$ (**);

nesse caso, a c.c. (**) é satisfeita apenas por $\psi^{(-)}$, i.e.,

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_{\text{OUT}}(\vec{r}, t) + \psi^{(-)}(\vec{r}, t)$$

$$= \psi_{\text{OUT}}(\vec{r}, t) + \underbrace{\int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} f(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}_{(\text{II})} \quad (58.1)$$

notas: a função delta de Dirac em $G^{(-)} \rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (\text{II}) = 0!$

obs.: caso (i) usual; entretanto, caso (ii), em princípio, possível.

\hookrightarrow considerando a sol. retardada (57.1), as sol. particulares das eqs. de movimento (55.2) são dadas por:

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \quad (58.2)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)$$

Leis de conservação,

Eqs. (55.2): campos $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ apresentam dinâmica própria, independente fontes \rightarrow verificam validade leis de conservação de energia e momentos linear e angular.

(1) Teorema de Poynting (conservação de energia),

considerar: sistema N cargas pontuais q_i sob campo EM.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{dW_{EM \rightarrow q}}{dt} &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i q_i (\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t)) \cdot \vec{v}_i \\ &= \sum_i q_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t) : \text{trabalho/tempo realizado} \\ &\quad \text{pelo campo EM sob cargas} \end{aligned}$$

pr distribuição contínua de cargas $\rho \cdot \rho(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{EM \rightarrow q}}{dt} &= \sum_i \Delta\sigma_i \frac{\Delta q_i}{\Delta\sigma_i} \vec{v}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t) \xrightarrow{\Delta\sigma_i \rightarrow 0} \int d^3\vec{r} \underbrace{\rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)}_{(29.5) = \vec{J}(\vec{r}, t)} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &= \int d^3\vec{r} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (59.1) \end{aligned}$$

ideia: reescrever (59.1) na forma de uma lei de conservação (lembra eq de continuidade (29.3)).

Eq. (59.1) \otimes eqs. de Maxwell (50.1) e (50.2):

$$\int d^3\vec{r} \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \int d^3\vec{r} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} = (I)$$

$$\begin{aligned} \text{como (identidade): } \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}}_{= -\partial_t \vec{B}}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow (I) = - \int d^3n \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \underbrace{\epsilon_0 \vec{E} \cdot \partial_t \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \partial_t \vec{B}}_{\partial_t \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)}$$

hipótese: Eqs. (16.4) e (45.2), derivadas p/ campos estáticos,
válidas p/ campos dependentes \underline{t} , i.e.,

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(\vec{n}, t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{n}, t) : \text{densidade de energia campo EM.} \quad (60.1)$$

$$\text{Definindo: } \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) : \text{vetor de Poynting} \quad (60.2)$$

$$\hookrightarrow - \int_V d^3n \vec{J} \cdot \vec{E} = \int_V d^3n \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (60.3)$$

como o volume V é arbitrário,

$$\hookrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \vec{J} \cdot \vec{E} : \text{teorema de Poynting} \quad (60.4)$$

(conservação energia campo EM)

notas: Eq. (60.4) é similar eq. de continuidade (29.3) ~
conservação carga elétrica, porém o termo extra
de fonte/sumidouro "- $\vec{J} \cdot \vec{E}$ ";

identificação: $\rho \rightarrow u$ e $\vec{J} \rightarrow \vec{S}$

de fato $[S] = \text{energia/área} \cdot \text{tempo}$, similar $[J] = \text{carga/área} \cdot \text{tempo}$

\hookrightarrow interpretação \vec{S} : densidade de corrente de energia.

• Eq. (60.3) (forma integral teorema de Poynting) \oplus
teorema do divergente (5.2)

$$\int_V d^3n \frac{du}{dt} + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} = - \int_V d^3n \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (61.1)$$

taxa de variação

temporal energia

do campo EM no

volume V

fluxo energia/tempo

através sup. S

(fronteira V)

(-) trabalho

realizado pelo

campo EM sob

cargas

• interpretação alternativa:

hipótese: $\vec{J} \cdot \vec{E}$ fluxo de cargas através sup. S

identificação: $\vec{J} \cdot \vec{E} \sim$ energia mecânica sistema de cargas, i.e.,

$$\frac{dE_{MEC}}{dt} = \int_V d^3n \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (61.2)$$

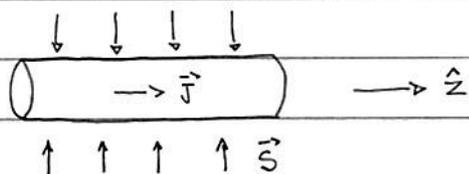
como

$$E_{EM} = \int_V d^3n u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V d^3n (E^2 + c^2 B^2) : \text{energia total campo EM @ volume } V$$

$$\xrightarrow[\text{p/ } V \text{ fixo}]{\text{Eq. (61.1)}} \frac{d(E_{EM} + E_{MEC})}{dt} = - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} \quad (61.3)$$

: conservação energia total $E = E_{EM} + E_{MEC}$
do sistema cargas-campo EM!

Exemplo: consideramos fio retilíneo, condutividade σ , raio a , comprimento L \oplus corrente estacionária I ; verificamos Eq. (61.3) (veja Sec. 15.4, Zangwill).



nesse caso:

vol. $V =$ vol. cilindro

sup. $S =$ sup. cilindro

notar (61.3): é necessário determinar \vec{S} na sup. S

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \rightarrow \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} = \sigma \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{I}{\sigma(\pi a^2)} \hat{z}$$

Lei de Ampère (35.1) : $\vec{B}(r=a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\phi}$

↳ Eq. (60.2) : $\vec{S}(r=a) = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{I}{\sigma(\pi a^2)} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\hat{z} \times \hat{\phi}) = \text{veja Fig. } (-\hat{\rho})$

$$\hookrightarrow - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} = - \oint_{\text{LATERAL}} \vec{S} \cdot (\hat{\rho} dA) = \frac{-I^2}{\sigma(\pi a^2)(2\pi a)} \int_{-2\pi a L} (-\hat{\rho}) \cdot (\hat{\rho}) dA$$

$$= I^2 \left(\frac{L}{\sigma \pi a^2} \right) \cdot R I^2 = \dot{U}_{\text{MEC}} : \text{OK pois } \dot{U}_{\text{EM}} = 0$$

p/ correntes estacionárias.

(2) conservação do momento linear,

similar caso (1), ponem quantidade vetorial!

considerar : sistema de N cargas pontuais q_i sob campo EM :

$$\hookrightarrow \vec{F} = \sum_{i=1}^N q_i (\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t)) : \text{força campo EM sob partículas}$$

p/ distribuição contínua :

$$\vec{F} = \int d^3n \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \frac{d\vec{P}_{\text{MEC}}}{dt} \quad \text{2ª Lei de Newton} \quad (62.1)$$

onde \vec{P}_{MEC} : momento linear total partículas \in vol. v .

novamente : vamos reescrever (62.1) em termos de uma lei de conservação !

Eq. (62.1) \oplus eqs. de Maxwell (50.1) e (50.2) :

$$\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \underbrace{\epsilon_0 \partial_t \vec{E} \times \vec{B}}_{(I)}$$

como

$$(I) = \vec{B} \times \partial_t \vec{E} = -\partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) + \underbrace{\vec{E} \times \partial_t \vec{B}}_{= -\vec{\nabla} \times \vec{E}}$$

e $c^2 \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0$ pode ser adicionado

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \left(\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \right. \\ &\quad \left. + c^2 \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - c^2 \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right) - \epsilon_0 \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \vec{\pi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. (62.1)} \rightarrow \frac{d \vec{P}_{MEC}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V d^3n \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) &= \int_V d^3n \vec{\pi} \quad (63.1) \\ &\quad \swarrow \text{vol. } V \text{ fixo!} \end{aligned}$$

$$\text{Definindo: } \vec{P}_{EM} = \epsilon_0 \int_V d^3n (\vec{E} \times \vec{B}) \quad : \text{ momento linear total} \quad (63.2)$$

campo EM e vol. V

$$\vec{g} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) \quad : \text{ densidade de momento} \quad (63.3)$$

linear campo EM

$$\text{Eq. (63.1)} \rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{P}_{MEC} + \vec{P}_{EM}) = \int_V d^3n \vec{\pi} \quad (63.4)$$

comparar Eqs. (63.3) e (63.4): Eq. (63.4) é uma lei de conservação

se $\vec{\pi}$ = divergente;

como $\vec{\pi}$ é vetor $\rightarrow \vec{\pi} = \vec{\nabla} \cdot \vec{T}$

\swarrow tensor (cartesiano)
ordem 2

(veja Sec. 1.8, Zangwill)

vamos analisar componente x ou (1), vetor $\vec{\pi}$,

notas:

$$(\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}))_1 = E_1(\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3)$$

$$- E_2(\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) + E_3(\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3)$$

$$= E_1 \partial_1 E_1 - E_2 \partial_1 E_2 - E_3 \partial_1 E_3 + \underbrace{E_1 \partial_2 E_2 + E_2 \partial_1 E_1}_{\text{cancela}}$$

$$+ \underbrace{E_1 \partial_3 E_3 + E_3 \partial_1 E_3}_{\text{cancela}}$$

$$= \frac{1}{2} \partial_1 E_1^2 - \frac{1}{2} \partial_1 E_2^2 - \frac{1}{2} \partial_1 E_3^2 + \frac{1}{2} \partial_1 E_3^2 + \partial_2(E_1 E_2) + \partial_3(E_1 E_3)$$

$$= \partial_1 E_1^2 + \partial_2(E_1 E_2) + \partial_3(E_1 E_3) - \frac{1}{2} \partial_1 (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2)$$

$$\hookrightarrow (\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}))_\alpha = \sum_\beta \partial_\beta (E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} E^2)$$

definindo:

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 (E_\alpha E_\beta + c^2 B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + c^2 B^2)) : \quad (64.1)$$

: Tenson de tensão de Maxwell

$$\hookrightarrow \vec{\pi}_\alpha = \int_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}$$

$$\text{Eq. (63.4)} \quad \text{1 comp. } \alpha \rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{P}_{MEC} + \vec{P}_{EM})_\alpha = \int_\beta \int_V d^3x \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \stackrel{\text{teo. do divergente}}{=} \sum_\beta \oint_S T_{\alpha\beta} n_\beta ds$$

notas sinal "+"

comp. β vetor \hat{n} : $d\vec{S} = \hat{n} ds$

$$\text{ou} \quad \frac{d}{dt} (\vec{P}_{MEC} + \vec{P}_{EM}) = \oint_S \vec{T} \cdot (\hat{n} ds) : \quad (64.2)$$

: conservação mom. linear total sistema cargas-campo EM.

notar similaridade entre (64.2) e (63.3);

$[T] = \text{momento} / \text{área} \cdot \text{tempo}$, similar $[S]$ e $[j]$

↳ interpretação \vec{T} : densidade de corrente de momento

$T_{\alpha\beta}$: fluxo componente α -momento linear através elemento de área $npds$ (direção β)

importante: sinal "+" R.H.S. Eq. (64.2) indica que o fluxo de momento $\sim \vec{T}$ é p/ dentro vol. V !

Obs.: a relação entre a densidade de corrente de energia (60.2) e a densidade de momento linear do campo EM (63.3) é

$$\vec{g} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \vec{S};$$

Lembrar p/ fótons: energia $E = pc \rightarrow p = \frac{1}{c^2} E$!
 e corrente de energia $E v = E c$

(3) conservação do momento angular
 (p/ detalhes, veja P6.10, Jackson).

nesse caso, eq. inicial, equivalente (62.1):

$$\vec{N} = \int_V d^3n \vec{n} \times (p\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{L}_{MEC}}{dt} \quad (65.1)$$

onde \vec{L}_{MEC} : momento angular total partículas @ vol. V .

verifica-se que, eq. equivalente (64.2) é dada por

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_{MEC} + \vec{L}_{EM}) = - \int_V d^3n \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = - \oint_S \vec{M} \cdot (\hat{n} ds), \quad (66.1)$$

onde

notar sinal

$$\vec{L}_{EM} = \epsilon_0 \int_V d^3n \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \int_V d^3n \vec{r} \times \vec{g} : \text{momento angular total campo EM e vol. } V$$

$\vec{r} \times \vec{g}$: densidade de momento angular campo EM

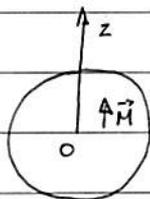
$$\vec{g} \text{ tensor } \vec{M} = \vec{T} \times \vec{r} \quad \text{ou} \quad M_{ij} = T_{ik} n_k E_{jkl} \quad (66.2)$$

[M] = mom. angular / área. tempo, i.e., \vec{M} : densidade de corrente de mom. angular.

Exemplo 15.4, 2. : esfera metálica FM, raio R , carga Q , magnetização $\vec{M} = M \hat{z}$;

(a) determinar \vec{L}_{EM} através (66.2);

(b) considerar processo desmagnetização esfera, calcular \vec{L}_{MEC} e comparar c/ item (a).



centro esfera = origem

p/ esfera metálica, carga Q : $\vec{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{n}, & r > R \end{cases}$

" " magnetização uniforme \vec{M} :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}, & r < R \\ \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos\theta \hat{n} + \sin\theta \hat{\theta}), & r > R \end{cases} ; \vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}$$

: \vec{B} dipolo pontual \vec{m} @ origem

(veja Eq. (40.2))

$$(a) \text{ Eq. (66.2)} : \vec{L}_{EM} = \epsilon_0 \int d^3n \vec{n} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \int d^3n (\vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{n} \cdot \vec{E}))$$

$$\text{como } \vec{E}(\vec{n} \cdot \vec{B}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mu_0 m}{4\pi n^4} \cdot 2\cos\theta \hat{n}$$

$$\vec{B}(\vec{n} \cdot \vec{E}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mu_0 m}{4\pi n^4} (2\cos\theta \hat{n} + \sin\theta \hat{\theta})$$

$$\hookrightarrow \vec{L}_{EM} = -\frac{Q\mu_0 m}{(4\pi)^2} \int d^3n \frac{1}{n^4} \sin\theta \hat{\theta} = \frac{Q\mu_0 m}{6\pi R} \hat{z}$$

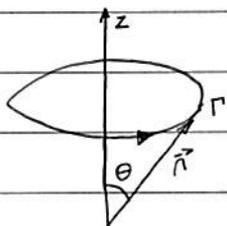
$$\int_R^\infty \frac{dn}{n^2} \int d\theta d\phi \sin^3\theta \hat{z} = 2\pi \cdot \frac{4}{3}$$

$$\text{pois Eq. (26.1)} : \hat{\theta} = \hat{x} \cos\theta \cos\phi + \hat{y} \cos\theta \sin\phi - \hat{z} \sin\theta$$

$$\text{i.e., } \vec{L}_{EM} = \frac{2}{9} \mu_0 Q R^2 \vec{M} \quad (67.1)$$

$$(b) \text{ como } \frac{d\vec{M}}{dt} \neq 0 \rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0 \xrightarrow{\text{Lei de Faraday}} \vec{E} \neq 0;$$

vamos considerar torque \vec{E} sob carga Q @ sup. esfera



Lei de Faraday p/ curva Γ sob sup. esfera :

$$\text{como } \vec{B}_{in} \propto \hat{z} \rightarrow \vec{E} \propto \hat{\phi}$$

$$\text{Eq. (43.3)} \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{e} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}_{in} \cdot d\vec{s}$$

$$\int (E\hat{\phi}) \cdot (\hat{\phi} dl) = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B}_{in} \hat{z}) \cdot (ds \hat{z})$$

$$\hookrightarrow E 2\pi R \sin\theta = -\dot{B}_{in} \pi (R \sin\theta)^2 \rightarrow \vec{E}(R, \theta) = -\frac{1}{2} R \sin\theta \hat{\phi}$$

$$\hookrightarrow \vec{N} = \int_S \vec{n} \times (\alpha \vec{E}) ds = -\frac{1}{2} R \cdot R^2 \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \int d\Omega \sin\theta R \underbrace{(\hat{n} \times \hat{\phi})}_{-\hat{\theta}}$$

$$\vec{N} = -\frac{R^4}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \int d\theta d\varphi \sin^3 \theta \hat{z} = -\frac{1}{3} Q R^2 B \sin \hat{z}$$

$2\pi \cdot 4/3$

$$\hookrightarrow \vec{L}_{MEC} = -\frac{1}{3} Q R^2 B \sin \hat{z} = -\frac{2}{9} \mu_0 Q R^2 \vec{M} = -\vec{L}_{EM} \quad (68.1)$$

• propriedades quantidades EM sob transformações,
 ideia: determinar comportamento campos e fontes
 sob notação, inversão espacial e reversão temporal;

inicial: considerações gerais sobre transformações
 de coordenadas

(i) notação.

• transformação linear de coordenadas

pto $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \rightarrow \vec{r}' = (r'_1, r'_2, r'_3)$ tal que

$$r'^2 = r^2 \quad (68.2)$$

a relação entre r'_α e r_β é dada por

$$r'_\alpha = A_{\alpha\beta} r_\beta \quad : \text{convenção = soma sob} \quad (68.3)$$

índices repetidos

↙ elementos

matriz \hat{A} : matriz ortogonal que descreve
 a transformação de coordenadas.

$$\text{Eqs. (68.2) } \oplus \text{ (68.3): } r'^2 = r^2 = A_{\alpha\beta} A_{\gamma\tau} r_\beta r_\tau = \delta_{\beta\tau} r_\beta r_\tau$$

\uparrow (68.2)

$$\hookrightarrow A_{\alpha\beta} A_{\alpha\tau} = \delta_{\beta\tau} \text{ ou } \hat{A} \cdot \hat{A}^T = \mathbb{1}$$

ou $\hat{A}^T = \hat{A}^{-1}$: definição matriz
 ortogonal!

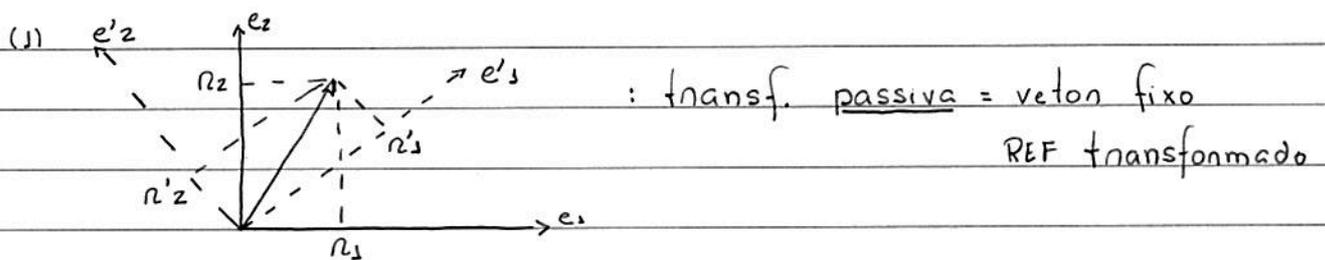
notan : $\hat{A} \cdot \hat{A}^T = I \rightarrow \det(\hat{A} \cdot \hat{A}^T) = \det \hat{A} \cdot \det \hat{A}^T = (\det \hat{A})^2 = 1$

$\hookrightarrow \det \hat{A} = \pm 1 : \exists 2$ classes de transf. ortogonais.

- $\det \hat{A} = +1$: rotações : rotações próprias

- $\det \hat{A} = -1$: reflexão, inversão espacial : " impróprias

em detalhes : consideras vetor \vec{n} sob transf. coordenadas (notação), duas possibilidades :



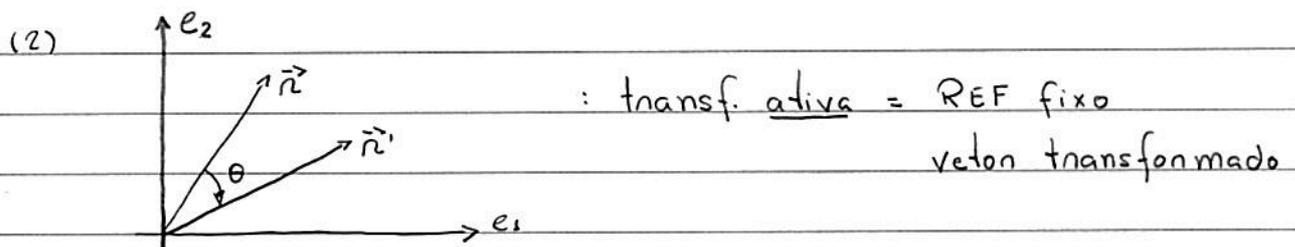
Eq. (68.3) : $n'_\alpha = A_{\alpha\beta} n_\beta$

\hookrightarrow componente \vec{n} w.r.t. REF. 0
" " " REF. 0'

Obs. : referencial (REF) 0, base (vetores unitários) $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$

" " 0', " " $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$

\hookrightarrow vetor $\vec{n} = n_\alpha \hat{e}_\alpha$.



Eq. (68.3) : $n'_\alpha = A_{\alpha\beta} n_\beta$

\hookrightarrow comp. \vec{n}' w.r.t. REF 0
" \vec{n} " " "

caso (2) : matriz \hat{A} pode ser vista como um operador que transforma \vec{r} em \vec{r}' !

Obs. : vamos considerar apenas transformações ativas !

↳ Definição vetor : objeto formado por 3 componentes que se transformam como (68.3) sob transf. \hat{A} . (70.1)

caso geral (70.1) : tensor cartesiano \hat{T} ordem (rank) N :

objeto c/ 3^N elementos $T_{\alpha\beta\gamma\dots}$ tal que
 N índices

$$T'_{\alpha'\beta'\gamma'\dots} = A_{\alpha'\alpha} A_{\beta'\beta} A_{\gamma'\gamma} \dots T_{\alpha\beta\gamma\dots} \quad (70.2)$$

sob transformação ortogonal (passiva) \hat{A} .

notas:

• tensor ordem 0 : 1 componente, invariante sob \hat{A} : escalar

• " " 1 : 3 componentes,

$$T'_{\alpha'} = A_{\alpha'\alpha} T_{\alpha} = \text{Eq. (68.3)} \quad : \text{vetor}$$

• " " 2 : 9 componentes,

$$T'_{\alpha'\beta'} = A_{\alpha'\alpha} A_{\beta'\beta} T_{\alpha\beta} \quad : \text{matriz } 3 \times 3$$

Ex. : tensor $N=2$: tensor de inércia $I_{\alpha\beta}$

" " tensão de Maxwell $T_{\alpha\beta}$: Eq. (64.1)

notas: se vetor $\vec{m} = \vec{u} \times \vec{v}$, verifica-se que (veja pg. 70.1) sob transf. ortogonal \hat{A} :

$$m'_{\alpha} = (\det \hat{A}) A_{\alpha\beta} m_{\beta},$$

• vamos verificar (70.3) :

em termos componentes : $m_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\beta v_\gamma$

$\hookrightarrow m'_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u'_\beta v'_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} u_\mu A_{\gamma\nu} v_\nu$
 \uparrow (68.3)

$= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\beta\alpha} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu} u_\mu v_\nu$

$A_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta}$

$= (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\alpha} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu}) A_{\alpha\beta} u_\mu v_\nu = (\det \hat{A}) A_{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\mu\nu} u_\mu v_\nu$

identidade $\uparrow = (\det \hat{A}) \epsilon_{\beta\mu\nu}$

i.e., \vec{m} se transforma como um vetor apenas p/ notações,
comparar Eqs. (68.3) e (70.3);

se \hat{A} = reflexão ou inversão espacial $\rightarrow \exists$ sinal "-" extra
(veja discussão abaixo).

- p/ quantidades EM:
- funções escalares, e.g., potencial escalar $\phi = \phi(\vec{r}, t)$
- " vetoriais, e.g., $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

considerar: notação sistema (= transf. ativa) w.r.t. eixo \hat{n} , $\hat{\theta}$:

$\phi'(\vec{r}', t) = \phi(\vec{r}, t)$: escalar, invariante sob notação

$E'_\alpha(\vec{r}', t) = A_{\alpha\beta} E_\beta(\vec{r}, t)$:

$B'_\alpha(\vec{r}', t) = (\det \hat{A}) A_{\alpha\beta} B_\beta(\vec{r}, t)$: veja abaixo

Lembrar: operador gradiente = op. vetorial (verificar)

$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}, \nabla^2 \phi$: escalar, invariante sob notação
 $\vec{\nabla} \phi$: vetor.

(ii) inversão espacial (paridade)

• transf. discreta \neq notação = transf. contínua!

• nesse caso: $A_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ ou $\hat{A} = -\hat{1} \rightarrow \det \hat{A} = -1$ (+)

Eqs. (68.3), (70.3) e (+) $\rightarrow \exists$ duas classes de vetores,
distintas sob inversão espacial:



(i) vetor polar = definição (70.1);

em particular, sob inversão espacial:

$$\text{Eq. (68.3)} : v'_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta} v_\beta = -v_\alpha$$

(72.1)

$$\text{ou } \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = -\vec{v}$$

Ex.: $\vec{r}, \vec{v}, \vec{F}, \vec{E}$

(iii) vetor axial ou pseudovetor: objeto formado por 3 componentes que se transformam como (70.3) sob transf. \hat{A} ; em particular, sob inversão espacial:

$$\text{Eq. (70.3)} : v'_\alpha = (\det \hat{A}) \Lambda_{\alpha\beta} v_\beta = (-1)(-1) \delta_{\alpha\beta} v_\beta = v_\alpha$$

(72.2)

$$\text{ou } \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = +\vec{v}$$

Ex.: $\vec{\omega}, \vec{l}, \vec{B}$

verifica-se que: axial \times polar = polar

polar \times polar = axial

axial \times axial = axial

(72.3)

notas:

• campo vetorial (polar) sob inversão espacial:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}'(\vec{r}', t) = \vec{E}'(-\vec{r}, t) = -\vec{E}(\vec{r}, t)$$

• campo pseudovetorial sob inversão espacial:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{B}'(\vec{r}', t) = \vec{B}'(-\vec{r}, t) = +\vec{B}(\vec{r}, t)$$

analogamente, temos

• escalar: $\phi \rightarrow \phi' = \phi$, sob inversão espacial

• pseudoescalar: $x \rightarrow x' = -x$, " " " "

(Ex., veja abaixo)

- tensor ordem N : $\vec{T} \rightarrow \vec{T}' = (-1)^N \vec{T}$, sob inversão espacial
- pseudo tensor " " : $\vec{T} \rightarrow \vec{T}' = (-1)^{N+1} \vec{T}$, " " " "

(iii) reversão temporal,

- transf. discreta;
- nesse caso, a transf. é definida por : $t \rightarrow t' = -t$ (*)

quantidades podem ser classificadas como pares / ímpares sob (+);

se, e.g., p/ vetor \vec{v} :

$\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = +\vec{v}$: \vec{v} é par sob reversão temporal;

$\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = -\vec{v}$: " " ímpar " " " "

Ex.: propriedades vetores (mecânica) sob transfs. (ii) e (iii);

	inv. espacial		nev. temporal
	$\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$	} polar	$\vec{r} \rightarrow \vec{r}$
$\vec{v} = d\vec{r}/dt$:	$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$		$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$
$\vec{p} = m\vec{v}$:	$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$		$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$
$\vec{F} = d\vec{p}/dt$:	$\vec{F} \rightarrow -\vec{F}$		$\vec{F} \rightarrow \vec{F}$ (73.1)
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$:	$\vec{L} \rightarrow \vec{L}$	} axial	$\vec{L} \rightarrow -\vec{L}$
$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$:	$\vec{N} \rightarrow \vec{N}$		$\vec{N} \rightarrow \vec{N}$

notas: 2ª Lei de Newton: invariante sob reversão temporal!

• sobre quantidades EM,

experimento: eqs. EM invariantes (preservam forma) sob notação, inv. espacial e nev. temporal

L → campos e fontes : ∃ propriedades bem definidas sob essas transformações !

notas : sob notação, carga $q \rightarrow q' = q$
hipótese → q é invariante sob inversão espacial e reversão temporal !

(74.1)

L → densidade de carga ρ é escalar sob transf. (i) - (iii)

como Eq. (29.5) : $\vec{J} = \rho \vec{v} \rightarrow \vec{J}$ é vetor polar, ímpar
⊕ Eq. (73.1) sob rev. temporal

Lei de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$,

↳ Eqs. (72.3), (73.1) e (74.1) →

\vec{E} é vetor polar, par sob reversão temporal ;
 \vec{B} " " axial, ímpar " " " "

como $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \vec{A}$ é vetor polar, ímpar sob rev. temporal

⊕ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \rightarrow \phi$ " escalar, par " " "

Resumo :	inv. espacial	rev. temporal
	$\rho \rightarrow \rho$	$\rho \rightarrow \rho$
	$\vec{J} \rightarrow -\vec{J}$	$\vec{J} \rightarrow -\vec{J}$
	$\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$	$\vec{E} \rightarrow \vec{E}$
	$\vec{B} \rightarrow \vec{B}$	$\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$ (74.2)
	$\phi \rightarrow \phi$	$\phi \rightarrow \phi$
	$\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$	$\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$
$\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$	$\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$	$\vec{S} \rightarrow -\vec{S}$
	$T_{\alpha\beta} \rightarrow T_{\alpha\beta}$	$T_{\alpha\beta} \rightarrow T_{\alpha\beta}$

Exercício: verificar que tabela (74.2) \rightarrow eqs. de Maxwell são invariantes (mantêm a forma) sob inversão espacial e reversão temporal.

• Monopólos magnéticos.

ideia: considerações teóricas sobre \exists monopolo magnético
duas etapas: (i) modificações eqs. de Maxwell;
(ii) condição de quantização de Dirac.

(i) conexões eqs. de Maxwell,

eqs. de Maxwell (50.1) e (50.2) \oplus

ρ_m : densidade (volumétrica) de carga magnética;

\vec{J}_m : " " " corrente " ;

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J}_e \quad (75.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = -\vec{J}_m$$

consistente c/ eq. de continuidade,
i.e., conservação carga magnética:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m = 0 + \partial_t \rho_m$$

$$\hookrightarrow \partial_t \rho_m + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_m = 0 \quad : \text{similar Eq. (29.3)}$$

$$\text{notas: } [J_m] = \text{Tesla/s}; [\rho_m] = \text{Tesla/m} \rightarrow \frac{[J_m]}{[\rho_m]} = \frac{m}{s}$$

$$\text{consistente c/ Eq. (29.5): } \vec{J}_m = \rho_m \vec{v} !$$

Eqs. (74.2) e (75.1) :

• sob inversão espacial :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m \rightarrow -\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho'_m$ invariância $\rho_m \rightarrow -\rho_m$
eqs. de Maxw.

como $\vec{J}_m = \rho_m \vec{v} \rightarrow \vec{J}'_m = (-\rho_m)(-\vec{v}) = \vec{J}_m$, i.e., $\vec{J}_m \rightarrow \vec{J}_m$

• sob reversão temporal :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m \rightarrow -\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho'_m$ invariância $\rho_m \rightarrow -\rho_m$
eqs. de Maxw.

$\vec{J}_m = \rho_m \vec{v} \rightarrow \vec{J}'_m = (-\rho_m)(-\vec{v}) = \vec{J}_m$, i.e., $\vec{J}_m \rightarrow \vec{J}_m$

↳ ρ_m é um pseudoescalar, ímpar sob rev. temporal ;
 \vec{J}_m " " pseudovetor, par " " " "

Resumo :	inv. espacial	rev. temporal	
	$\rho_m \rightarrow -\rho_m$	$\rho_m \rightarrow -\rho_m$	
	$\vec{J}_m \rightarrow \vec{J}_m$	$\vec{J}_m \rightarrow \vec{J}_m$	
companas :	$\rho_e \rightarrow \rho_e$	$\rho_e \rightarrow \rho_e$	(76.1)
	$\vec{J}_e \rightarrow -\vec{J}_e$	$\vec{J}_e \rightarrow -\vec{J}_e$	

interessante : verifica-se que (exercício) eqs. de Maxwell (75.1) são invariantes (mantêm a forma) sob transformação de dualidade :

$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}}_{= \hat{A}} \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix} ;$

$\begin{pmatrix} \rho_e/\sqrt{\epsilon_0} \\ \rho_m/\sqrt{\mu_0} \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} \rho'_e/\sqrt{\epsilon_0} \\ \rho'_m/\sqrt{\mu_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{J}'_e/\sqrt{\epsilon_0} \\ \vec{J}'_m/\sqrt{\mu_0} \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} \vec{J}_e/\sqrt{\epsilon_0} \\ \vec{J}_m/\sqrt{\mu_0} \end{pmatrix} \quad (76.2)$

interpretação (76.2) : "notação" que gira "eixo elétrico" e "eixo magnético".

Obs.: eqs. de Maxwell (50.1) e (50.2) na ausência de fontes ($\rho = \vec{J} = 0$) apresentam simetria dual, i.e., são invariantes sob transformação $\vec{A} \text{ c/ } \beta = \pi/2$: $\vec{E} = c\vec{B}'$,
 $\vec{B} = -\vec{E}'/c$ (verificam!)

• invariância eqs. de Maxwell (75.1) sob transf. dual (76.2)

↳ se todas as partículas apresentam a mesma razão q_e/q_m
 → carga magnética não é um observável: nesse caso, é possível escolher β tal que $\rho_m = \vec{J}_m = 0$;

$$\text{Eq. (76.2): } \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \rho_m = -\sin\beta \frac{\rho'_e}{\sqrt{\epsilon_0}} + \cos\beta \frac{\rho'_m}{\sqrt{\mu_0}} \stackrel{\text{condição}}{=} 0$$

$$\hookrightarrow \text{tg } \beta = \frac{\rho'_m}{\rho'_e} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

(iii) condição de quantização de Dirac,

ideia: considerar sistema elétron \oplus monopolo magnético;
 descrição via mecânica quântica.

Jackson: descrição semiclassica e ideia tratamento quântico;
 discussão abaixo: Sec. 2.7, Sakurai, 2 ed.

Lembrar: Hamiltoniano partícula massa m , carga q sob campo EM:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \quad (77.1)$$

considerar: monopolo magnético, carga magnética $q_m = g$,
 localizado na origem

↳ $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{n}$: campo \vec{B} devido monopolo,
 consistente c/ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m$.

em princípio, potencial vetor correspondente é dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi n} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi} = A_{\phi}(n, \theta) \hat{\phi} \quad (78.1)$$

pois $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\hat{n}}{n \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{g}{4\pi n} \frac{(1 - \cos\theta) \cdot \sin\theta}{\sin\theta} \right) = \frac{g}{4\pi n^2} \hat{n}$

coord. esféricas!

entretanto, Eq. (78.1) é singular p/ $\theta = \pi$ (semieixo z negativo),
i.e. $\vec{A}(n, \theta = \pi, \phi) \rightarrow \infty$!

de fato, não é possível determinar $\vec{A}(\vec{r})$ não singular p/ $\forall \vec{r}$
pois, nesse caso, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$: NOT OK c/ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m$!

Lembrar: $\vec{A}(\vec{r})$ é uma função auxiliar, apenas \vec{B} é observável;
podemos então considerar:

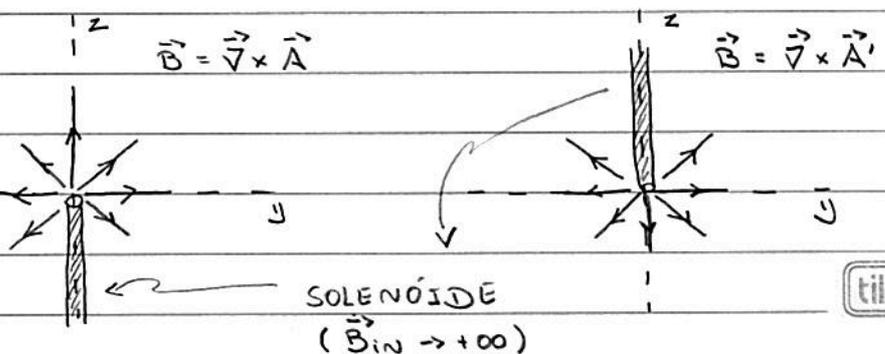
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi n} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi - \epsilon : \text{singular } \theta = \pi \quad (78.2)$$

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \frac{-g}{4\pi n} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \hat{\phi}, \quad \epsilon \leq \theta \leq \pi : \text{ " } \theta = 0, \quad (78.3)$$

i.e., é possível determinar $\vec{B}(\vec{r})$ p/ $\forall \vec{r}$, via (78.2) e (78.3)

interpretação singularidade (78.2) e (78.3) ao longo semieixos $\pm \hat{z}$:
 \exists solenóide muito longo, $B_{in}^{sol} \rightarrow \infty$!

linhas de
campo:



considerar região $\epsilon < \theta < \pi - \epsilon$,

como $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \rightarrow \vec{A}$ e \vec{A}' relacionados por
uma transf. de gauge (51.3)!

notas:

$$\vec{A}'(\vec{r}) = -\frac{g}{4\pi n} \frac{(1 + \cos\theta \pm 1)}{\sin\theta} \hat{\phi} = \vec{A}(\vec{r}) - \underbrace{\frac{g}{2\pi n \sin\theta} \hat{\phi}}_{\vec{\nabla}\Lambda}$$

se $\Lambda(\varphi) = -g\varphi/2\pi$ (79.1)

Lembrar: $\vec{\nabla}\Lambda = \hat{n} \frac{\partial}{\partial n} \Lambda + \hat{\theta} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \Lambda + \hat{\phi} \frac{1}{n \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Lambda$.

Lembrar transf. de gauge na mecânica quântica:

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \partial_t \Lambda \end{aligned} \right\} \text{Eq. (51.3)} \quad (79.2)$$

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(iq\Lambda/\hbar) \Psi$$

pr. que eq. de Schrödinger seja invariante sob transformação de gauge (veja pg.)

$$\hookrightarrow \Psi'(\vec{r}, t) = \exp(-iqg\varphi/\hbar) \Psi(\vec{r}, t) \quad (79.3)$$

como Ψ e Ψ' são "single-valued"

$$\hookrightarrow \Psi'(n, \theta, \varphi) = \Psi'(n, \theta, \varphi + 2\pi) ; \quad \epsilon < \theta < \pi - \epsilon$$

$$\exp(-iqg\varphi/\hbar) \Psi(n, \theta, \varphi) = \exp(-iqg\varphi/\hbar - 2\pi iqg/\hbar) \Psi(n, \theta, \varphi + 2\pi)$$

$$\hookrightarrow \frac{2\pi qg}{\hbar} = 2\pi n \quad \text{ou} \quad \frac{eg}{\hbar} = 2\pi n : \text{condição de} \quad (79.4)$$

quantização de Dirac

$q \rightarrow e$: carga elétron

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

interpretação (79.4) : se I carga magnética $q_m \rightarrow q_m e$ quantizada como em (79.4) !

Obs. : (1) a relação entre \vec{A} e \vec{A}' via transf. gauge pode ser associada à posição (arbitrária) do solenóide longo, veja Sec. 6.12, Jackson.

(2) Eq. (79.4) pode ser escrita como (verificar) :

$$\frac{g^2}{4\pi\mu_0\hbar c} = \underbrace{\left(\frac{4\pi\epsilon_0\hbar c}{e^2}\right)}_{\frac{1}{\alpha} \text{ de estrutura fina}} \frac{n^2}{4} \approx \frac{137}{4} n^2$$

• Vamos verificar a invariância de eq. de Schrödinger sob transformação (79.2),

$$\text{considerar: } \frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}')^2 \psi' + q\Phi'\psi' = i\hbar\partial_t \psi'$$

notar :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t \psi'(\vec{r}, t) &= i\hbar\partial_t \left(\exp(iq\Lambda/\hbar) \psi(\vec{r}, t) \right) \\ &= e^{iq\Lambda/\hbar} (i\hbar\partial_t \psi) + e^{iq\Lambda/\hbar} \underbrace{(-q\partial_t \Lambda)}_{\text{Eq. (79.2)} = q\Phi' - q\Phi} \psi \end{aligned} \tag{80.1}$$

$$\cdot (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}') e^{iq\Lambda/\hbar} \psi(\vec{r}, t) =$$

$$= e^{iq\Lambda/\hbar} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q(\underbrace{\vec{A}' - \vec{\nabla}\Lambda}_{\text{Eq. (79.2)} = \vec{A}}) \right) \psi(\vec{r}, t)$$

$$\hookrightarrow \text{identidade: } (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}') e^{iq\Lambda/\hbar} \psi = e^{iq\Lambda/\hbar} (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}) \psi \quad (81.1)$$

$$\hookrightarrow (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}')^2 e^{iq\Lambda/\hbar} \psi = (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}') e^{iq\Lambda/\hbar} (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}) \psi$$

$$\text{Eq. (81.1)} = e^{iq\Lambda/\hbar} (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}) \quad (81.2)$$

$$\hookrightarrow \text{(Eqs. (80.1) e (81.2))} \rightarrow \frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 \psi + q\Phi\psi = i\hbar\partial_t\psi.$$