Ondas eletromagnéticas.

Refs.: Secs. 7.1 - 7.2, Jackson

Secs. 16.1 - 16.4, Zangwill

consequências eqs. de Maxwell (50.1) e (50.2) : $\exists$ perturbações ondulatorias, i.e., ondas eletromagnéticas ~ transporte energia pto A $\rightarrow$ pto B

ideia: descrever onda EM + simples : onda plana monocromática. (vácuo)

considerar eqs. de Maxwell (50.1) e (50.2);

hipótese: ausência de fontes : $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (82.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (82.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \qquad (82.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = 0 \qquad (82.4)$$

notar: $\vec{\nabla} \times$ Eq. (82.3) : $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$

identidade: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$

Eqs. (82.1) e (82.4): $-\nabla^2 \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

$$\hookrightarrow \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (82.5)$$

de modo análogo, $\vec{\nabla} \times$ Eq. (82.4):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \nabla^2 \vec{B} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\hookrightarrow \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (82.6)$$

lembrar : onda plana :

considerar a eq. de onda homogênea

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (82.7)$$

hipótese : $u = u(z,t)$, i.e., $\underline{u}$ depende apenas $\underline{1}$ variável espacial

Eq. (82.7) : $$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0 \qquad (82.8)$$

definindo: $\xi = z + ct \;\rightarrow\; z = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$

$\eta = z - ct \qquad t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta)$

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Eq. (82.8) : $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

funções arbitrárias !

sol. geral : $u(\xi,\eta) = f(\eta) + g(\xi)$: sol. tipo

ou $u(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct)$ onda plana

(82.9)

notar : · $f(z-ct) = cte$ p/ ptos $(z,t) \in$ plano $z - ct = cte$;

propagação $+\hat{z}$; velocidade propagação c ;

(82.10)

· $g(z+ct) = cte$ p/ ptos $(z,t) \in$ plano $z + ct = cte$;

propagação $-\hat{z}$; velocidade propagação c .

notar: cada componente cartesiana dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$
satisfaz uma eq. de onda homogênea!

vamos considerar soluções Eqs. (82.5) e (82.6) do tipo:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \qquad (83.1)$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

onde $\vec{E}_0$ e $\vec{B}_0 \in \mathbb{C}$!
nesse caso, observáveis $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ~ Re [Eq. (83.1)]

Eqs. (82.5) e (82.6) ⊕ (83.1):

$$\left(-k^2 + \omega^2/c^2\right)\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0$$
e $\longrightarrow k = \omega/c$!
$$\left(-k^2 + \omega^2/c^2\right)\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0$$

definição: $\vec{k} = k\hat{n}$; $\hat{n}^2 = 1$

Eqs. (83.1): $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{r}-kct)} = \vec{E}_0\, e^{ik(\hat{n}\cdot\vec{r}-ct)}$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{r}-kct)} = \vec{B}_0\, e^{ik(\hat{n}\cdot\vec{r}-ct)} \qquad (83.2)$$

Eq. (83.2): onda plana monocromática $\longrightarrow$ 1 única frequência ω !

comparar Eq. (82.9)

· Lembrar: $\phi(\vec{r},t) = \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t$: fase onda plana (83.2)

p/ $\phi(\vec{r},t)$ = cte $\longrightarrow \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{k}{\omega}\hat{n} = c\hat{n}$: velocidade de fase (83.4)

(veja Eq. (82.10))

· Eqs. (82.1) - (82.4) ⊕ (83.2) :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = ik\,\hat{n}\cdot\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{n}-\omega t)} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = ik\,\hat{n}\cdot\vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{n}-\omega t)} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = \left(ik(\hat{n}\times\vec{E}_0) - i\omega\vec{B}_0\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{n}-\omega t)} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} = \left(ik(\hat{n}\times\vec{B}_0) + \frac{i\omega}{c^2}\vec{E}_0\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{n}-\omega t)} = 0$$

↳ $\hat{n}\cdot\vec{E}_0 = 0$ e $\hat{n}\cdot\vec{B}_0 = 0$ (84.1)

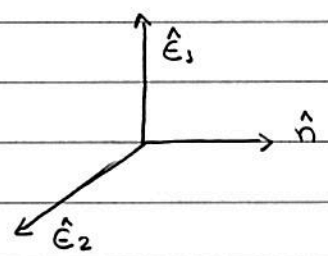
$\hat{n}\times\vec{E}_0 = c\vec{B}_0$ ou $\hat{n}\times\vec{B}_0 = -\vec{E}_0/c$ (84.2)

notar Eqs. (84.1) : $\vec{E}$ e $\vec{B}$ $\perp$ direção de propagação $\hat{n}$
↳ Eq. (83.2) : ondas planas <u>transversais</u>

Eq. (84.2) : · $[cB] = [E]$: ok c/ transf. dual (76.2) !

· se $\hat{n}\in\mathbb{R}$ → fase $\vec{E}_0$ = fase $\vec{B}_0$.

· definição : $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{n})$: vetores <u>ortonormais</u>



; $\hat{n}\in\mathbb{R}$

podemos escrever : $\vec{E}_0 = E_0\,\hat{\epsilon}_1$ e $\vec{B}_0 = B_0\,\hat{\epsilon}_2 = {}^1\!/_c\, E_0\,\hat{\epsilon}_2$ (84.3)

ou $\vec{E}_0 = E_0'\,\hat{\epsilon}_2$ e $\vec{B}_0 = B_0'\,\hat{\epsilon}_1 = {}^1\!/_c\, E_0'\,\hat{\epsilon}_1$ (84.4)

(veja discussão abaixo)

· propriedades onda plana (83.2).

ideia: determinar $\vec{S}$, u e $\vec{g}$!

(i) vetor de Poynting.

Eq. (60.2): $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \overset{\text{Eq. (83.2)}}{=} \frac{1}{\mu_0} Re[\vec{E}] \times Re[\vec{B}]$

$= \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{2} \left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{n} - \omega t)} + c.c. \right) \times \frac{1}{2} \left(\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{n} - \omega t)} + c.c. \right)$

$= \frac{1}{4\mu_0} \left(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0 e^{2i(\vec{k}\cdot\vec{n} - \omega t)} + c.c. + \vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* + c.c. \right)$ (85.1)

como (85.1) é uma função oscilatória em $\underline{t}$, é interessante considerar sua média temporal em $\underline{1}$ período;

Lembrar: se $f = f(t)$

↳ $\langle f \rangle \equiv \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} dt\, f(t)$: valor médio $\underline{f}$ em um período τ_0

[verificar] $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} \left(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* + c.c. \right) = \frac{1}{2\mu_0} Re\left(\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* \right)$ (85.2)

Como: $\vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* \underset{\text{Eq. (84.2)}}{=} \frac{1}{c} \vec{E}_0 \times (\hat{n} \times \vec{E}_0^*) \underset{\text{identidade}}{=} \frac{1}{c} \left(|\vec{E}_0|^2 \hat{n} - \underbrace{(\hat{n}\cdot\vec{E}_0)}_{=0} \vec{E}_0^* \right)$

↳ $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}_0|^2 \hat{n}$: valor médio (temporal) $\vec{S}$ (densidade de corrente de energia) p/ onda plana (83.2) (85.3)

notar: direção propag.

Obs.: Eq. (85.2) corresponde caso geral:

se $A(t) = A_0 e^{i\omega t}$ e $B(t) = B_0 e^{i\omega t}$

$$\hookrightarrow \langle AB \rangle = 1/2 \, \mathrm{Re}\left[A \cdot B^* \right] \qquad (86.1)$$

(ii) densidade de energia,

Como Eq. (60.1): $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

de modo análogo ao vetor de Poynting, temos que

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}\epsilon_0 \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* \right] + \frac{1}{4\mu_0} \mathrm{Re}\left[\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^* \right]$$

como:

identidade

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* = |\vec{E}_0|^2$$

$$\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_0^* = \frac{1}{c^2}(\hat{n} \times \vec{E}_0) \cdot (\hat{n} \times \vec{E}_0^*) = \frac{1}{c^2}\left(\hat{n}^2 |\vec{E}_0|^2 - \underbrace{(\hat{n} \cdot \vec{E}_0)}_{=0} (\hat{n} \cdot \vec{E}_0^*) \right)$$

$$\hookrightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{4}\epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{4\mu_0} \cdot \epsilon_0 \mu_0 |\vec{E}_0|^2$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \qquad (86.2)$$

: valor médio (temporal) p/ onda plana (83.2)

comparar Eqs. (85.3) e (86.2):

$$\langle \vec{S} \rangle = c \cdot \frac{1}{2}\epsilon_0 |\vec{E}_0|^2 \hat{n} = c \langle u \rangle \hat{n} \qquad (86.3)$$

definição: <u>velocidade de energia</u>

$$\vec{v}_E = \frac{\langle \vec{S} \rangle}{\langle u \rangle} \qquad (86.4)$$

Eq. (86.3): $\vec{v}_E = \frac{c\langle u \rangle \hat{n}}{\langle u \rangle} = c\hat{n}$: velocidade de fase (83.4)!

Exercício : verificar $[v_E] = [\text{velocidade}]$.

(iii) densidade de momento linear,

como (veja pg. 65) : $\vec{g} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \vec{S}$

↳ $\langle \vec{g} \rangle = \frac{1}{c^2} \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{c} \langle u \rangle \, \hat{n}$ (87.1)

· polarização,

a solução (83.1) da eq. de onda (82.5) e (82.6) c/

$\vec{E_0} = E_1 \hat{\epsilon}_1$ e $\vec{B_0} = 1/c \, E_1 \hat{\epsilon}_2$: Eq. (84.3)

é uma onda plana monocromática linearmente polarizada, c/ vetor de polarização $\hat{\epsilon}_1$ = direção campo $\vec{E}$; analogamente,

se $\vec{E_0} = E_2 \hat{\epsilon}_2$ e $\vec{B_0} = 1/c \, E_2 \hat{\epsilon}_1$: Eq. (84.4)

temos uma onda plana monocromática linearmente polarizada c/ vetor de polarização $\hat{\epsilon}_2$ = direção campo $\vec{E}$!

como (84.3) e (84.4) são soluções linearmente independentes

↳ $\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_1 \hat{\epsilon}_1 + E_2 \hat{\epsilon}_2) \, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$: sol. geral Eq. (82.5) (87.1)

c/ E_1 e $E_2 \in \mathbb{C}$.

vamos analisar 3 casos,

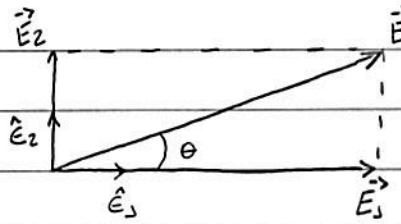
(i) polarização linear.

hipótese : fase E_1 = fase E_2, i.e., $E_1 = |E_1| e^{i\delta}$ e $E_2 = |E_2| e^{i\delta}$

Eq. (87.1) : $\vec{E}(\vec{r},t) = \left(|E_1|\hat{\epsilon}_1 + |E_2|\hat{\epsilon}_2 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta)}$

$$\xrightarrow{Re} \left(|E_1|\hat{\epsilon}_1 + |E_2|\hat{\epsilon}_2 \right) \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta \right) :$$

: onda linearmente polarizada — ∡ entre direção polarização e $\hat{\epsilon}_1$.



$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{|E_2|}{|E_1|}$$

(ii) polarização circular.

hipótese : $|E_1| = |E_2|$ e $\delta = \delta_2 - \delta_1 = \pm \pi/2$: ≠ fase entre E_1 e E_2

Eq. (87.1) : $\vec{E}(\vec{r},t) = |E_1| \left(\hat{\epsilon}_1 \pm i \hat{\epsilon}_2 \right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

$$\xrightarrow{Re} |E_1| \left(\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\,\hat{\epsilon}_1 \mp \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\,\hat{\epsilon}_2 \right) :$$

: onda circularmente polarizada

notar:

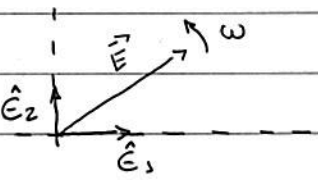
· $|\vec{E}(\vec{r},t)| = |E_1|$

· p/ pto fixo no espaço, e.g., $\vec{r} = 0$:

$\omega t = 0$: $\vec{E} = |E_1|\,\hat{\epsilon}_1$ (sinal sup.) $\quad \vec{E} = |E_1|\,\hat{\epsilon}_1$ (sinal inf.)

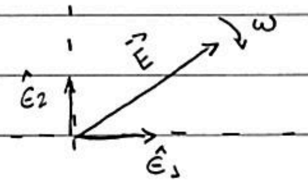
$\omega t = \pi/2$: $\vec{E} = |E_1|\,\hat{\epsilon}_2$ " $\quad \vec{E} = -|E_1|\,\hat{\epsilon}_2$ "

dessa forma,



: $\hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2$: onda circularmente polarizada à esquerda (LCP) ou onda c/ helicidade positiva

e

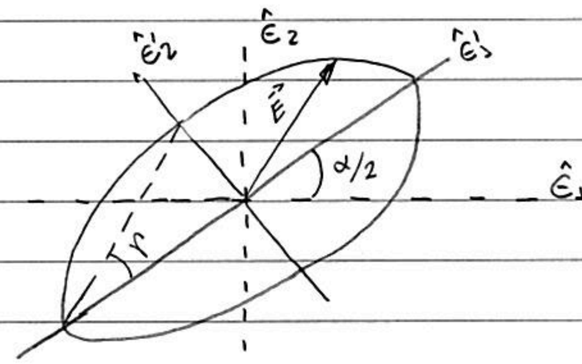


: $\hat{\epsilon}_1 - i\hat{\epsilon}_2$: onda circularmente polarizada à direita (RCP) ou onda c/ helicidade negativa

(iii) polarização elíptica,

de fato, caso geral : $|E_1| \neq |E_2|$ e $\delta = \delta_2 - \delta_1 \neq 0$;

nesse caso, verifica-se que campo $\vec{E}$ descreve uma elipse c/ eixos principais inclinados como na FIG. :



(89.1)

vamos verificar o resultado ilustrado na Fig. (89.1).

nesse caso, é interessante introduzir a base $\hat{\epsilon}_\pm$:

$$\hat{\epsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\epsilon}_1 \pm i\hat{\epsilon}_2)$$

~ polarização circular!

: base ortonormal (veja abaixo)

temos que

$$\hat{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_+ + \hat{\epsilon}_-) \quad e \quad \hat{\epsilon}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_- - \hat{\epsilon}_+)$$

e as propriedades (verificar):

$$\hat{\epsilon}_\pm^* \cdot \hat{\epsilon}_\mp = 0 \quad ; \quad \hat{\epsilon}_\pm^* \cdot \hat{\epsilon}_\pm = 1 \quad ; \quad \hat{\epsilon}_\pm^* \cdot \hat{\epsilon}_3 = 0 \tag{90.1}$$

notar conjugação complexa p/ o produto escalar!

temos que:

$$\vec{E}_0 = E_1\hat{\epsilon}_1 + E_2\hat{\epsilon}_2 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - iE_2)}_{\equiv E_+}\hat{\epsilon}_+ + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + iE_2)}_{\equiv E_-}\hat{\epsilon}_-$$

$$= E_+\hat{\epsilon}_+ + E_-\hat{\epsilon}_- \tag{90.2}$$

: como esperado, pois $(\hat{\epsilon}_+, \hat{\epsilon}_-)$: base $\perp$!

· Lembrar: matriz rotação $\measuredangle\,\theta$ w.r.t. eixo $\hat{n} = \hat{\epsilon}_3$:

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad : \text{base } (\epsilon_1, \epsilon_2)$$

$$\hookrightarrow R_3(\theta)\,\hat{\epsilon}_+ = R_3(\theta)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = e^{i\theta}\,\hat{\epsilon}_+$$

(90.3)

de modo análogo (verificar): $R_3(\theta)\,\hat{\epsilon}_- = e^{-i\theta}\,\hat{\epsilon}_-$

· hipótese:

$$\frac{E_-}{E_+} = \frac{E_1 + iE_2}{E_1 - iE_2} \equiv n e^{i\alpha} \tag{90.4}$$

Eq. (90.3) p/ $\theta = -\alpha/2$: $\hat{\epsilon}_+' = R_3(-\alpha/2)\,\hat{\epsilon}_+ = e^{-i\alpha/2}\,\hat{\epsilon}_+$

$$\hat{\epsilon}_-' = R_3(-\alpha/2)\,\hat{\epsilon}_- = e^{i\alpha/2}\,\hat{\epsilon}_-$$

Eq. (90.2) :

$$\vec{E_0} = E_+ \left(\hat{\epsilon}_+ + n e^{i\alpha} \hat{\epsilon}_- \right) = E_+ e^{i\alpha/2} \left(e^{-i\alpha/2} \hat{\epsilon}_+ + n e^{i\alpha/2} \hat{\epsilon}_- \right)$$

$$= E_+ e^{i\alpha/2} \left(\hat{\epsilon}'_+ + n \hat{\epsilon}'_- \right)$$

notar nova base : $\hat{\epsilon}'_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\epsilon}'_1 \pm i \hat{\epsilon}'_2 \right)$

$$= \frac{E_+ e^{i\alpha/2}}{\sqrt{2}} \left((1+n) \hat{\epsilon}'_1 + i(1-n) \hat{\epsilon}'_2 \right) \quad ; \quad E_+ = |E_+| e^{i\delta_+}$$

Eq. (87.2) : $\vec{E}(\vec{n},t) = \frac{E_+ e^{i\alpha/2}}{\sqrt{2}} \left((1+n) \hat{\epsilon}'_1 + i(1-n) \hat{\epsilon}'_2 \right)$

$$\xrightarrow{Re} \frac{|E_+|}{\sqrt{2}} \Big((1+n) \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{n} - \omega t + \delta_+ + \alpha/2 \right) \hat{\epsilon}'_1 -$$

$$- (1-n) \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{n} - \omega t + \delta_+ + \alpha/2 \right) \hat{\epsilon}'_2 \Big)$$

$$\equiv E'_1(\vec{n},t)\, \hat{\epsilon}'_1 + E'_2(\vec{n},t)\, \hat{\epsilon}'_2 \tag{91.1}$$

notar : $\frac{E_1'^2}{(1+n)^2} + \frac{E_2'^2}{(1-n)^2} = \frac{|E_+|^2}{2}$: eq. elipse !

como notação vetores $\theta = -\alpha/2 \rightarrow$ notação base $\theta = +\alpha/2$:

veja pg. 91.1 : Fig. (89.1) ! (91.2)

notar Eq. (90.4) :

$n = 1$: $E_1 \neq 0$ e $E_2 = 0$: polarização linear

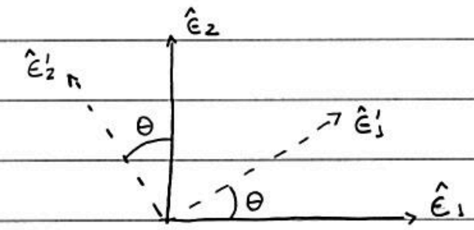
$n = -1$: $E_1 = 0$ e $E_2 \neq 0$: " "

$n = 0$: $E_1 = -i E_2$: " circular (LCP)

$n \to \infty$: $E_1 = +i E_2$: " " (RCP)

· sobre o resultado (91.2),

Lembrar notação base $\measuredangle\, \theta$ w.r.t. eixo $\hat{\epsilon}_3$:



temos que :
$$\hat{\epsilon}'_1 = \cos\theta\, \hat{\epsilon}_1 + \sin\theta\, \hat{\epsilon}_2$$
$$\hat{\epsilon}'_2 = -\sin\theta\, \hat{\epsilon}_1 + \cos\theta\, \hat{\epsilon}_2$$
$$\hat{\epsilon}'_3 = \hat{\epsilon}_3$$

$$\hookrightarrow \hat{\epsilon}_1 = \cos\theta\, \hat{\epsilon}'_1 - \sin\theta\, \hat{\epsilon}'_2$$
$$\hat{\epsilon}_2 = \sin\theta\, \hat{\epsilon}'_1 + \cos\theta\, \hat{\epsilon}'_2$$

como · $\hat{\epsilon}'_+ = e^{-i\alpha/2}\, \hat{\epsilon}_+ = \dfrac{e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{2}} \left(\hat{\epsilon}_1 + i\, \hat{\epsilon}_2 \right)$ $\qquad \theta = \alpha/2$

$$= \frac{e^{-i\alpha/2}}{\sqrt{2}} \left(e^{i\theta}\, \hat{\epsilon}'_1 + i e^{i\theta}\, \hat{\epsilon}'_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\epsilon}'_1 + i\, \hat{\epsilon}'_2 \right)$$

· $\hat{\epsilon}'_- = e^{i\alpha/2}\, \hat{\epsilon}_- = \dfrac{e^{+i\alpha/2}}{\sqrt{2}} \left(\hat{\epsilon}_1 - i\, \hat{\epsilon}_2 \right)$

$$= \frac{e^{i\alpha/2}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\theta}\, \hat{\epsilon}'_1 - i\, e^{-i\theta}\, \hat{\epsilon}'_2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\epsilon}'_1 - i\, \hat{\epsilon}'_2 \right)$$

$\theta = \alpha/2$

· parâmetros de Stokes.

ideia: determinação polarização (87.2) realizando apenas medidas de intensidade da onda.

nesse caso, é interessante introduzir os parâmetros de Stokes

considerar Eq. (87.2) c/ $E_1 = |E_1| e^{i\delta_1}$ e $E_2 = |E_2| e^{i\delta_2}$

p/ a base $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)$ (polarização linear), define-se:

$$s_0 = |\hat{\epsilon}_1 \cdot \vec{E}|^2 + |\hat{\epsilon}_2 \cdot \vec{E}|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2$$

$$s_1 = |\hat{\epsilon}_1 \cdot \vec{E}|^2 - |\hat{\epsilon}_2 \cdot \vec{E}|^2 = |E_1|^2 - |E_2|^2$$: parâmetros de Stokes

$$s_2 = 2\,\mathrm{Re}\Big((\hat{\epsilon}_1 \cdot \vec{E})^* (\hat{\epsilon}_2 \cdot \vec{E}) \Big) = 2|E_1||E_2| \cos\delta$$

$$s_3 = 2\,\mathrm{Im}\Big((\hat{\epsilon}_1 \cdot \vec{E})^* (\hat{\epsilon}_2 \cdot \vec{E}) \Big) = 2|E_1||E_2| \sin\delta \qquad (92.1)$$

onde $\delta = \delta_2 - \delta_1$.

notar: s_i não são independentes, pois

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \qquad (92.2)$$

verifica-se que (veja Ex. 16.3, Zangwill):

$$\begin{aligned} s_0 &= I_0 + I_{90} \\ s_1 &= I_0 - I_{90} \\ s_2 &= I_{+45} - I_{-45} \\ s_3 &= I_{LCP} - I_{RCP} \end{aligned} \qquad (92.3)$$

onde I_0 : intensidade onda, pol. linear eixo $\hat{\epsilon}_1$

I_{90} : " " " " " $\hat{\epsilon}_2$

$I_{\pm 45}$: " " " " $\pm 45°$ w.r.t. eixos $\hat{\epsilon}_1$ - $\hat{\epsilon}_2$

I_{RCP} : " " " circular $\hat{\epsilon}_- = (\hat{\epsilon}_1 - i\hat{\epsilon}_2)/\sqrt{2}$

I_{LCP} : " " " " $\hat{\epsilon}_+ = (\hat{\epsilon}_1 + i\hat{\epsilon}_2)/\sqrt{2}$

· interessante : cada estado de polarização corresponde a um pto em uma esfera de raio s_0, definida no espaço (s_1, s_2, s_3) : esfera de Poincaré.

verifica-se que (exercício) : $\delta = \delta_2 - \delta_1$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2|E_1||E_2|}{|E_1|^2 - |E_2|^2}\cos\delta \quad \text{e} \quad \sin 2r = \frac{2|E_1||E_2|}{|E_1|^2 + |E_2|^2}\sin\delta \qquad (93.1)$$

∡ notação eixos $\hat{\epsilon}'_1$ - $\hat{\epsilon}'_2$ w.r.t. eixos $\hat{\epsilon}_1$ - $\hat{\epsilon}_1$

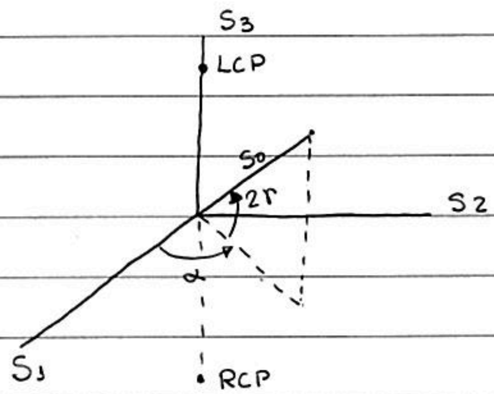
∡ definido pelos semieixos elipse (veja Fig. 89.1)

Eq. (92.1) e (93.1) : $\operatorname{tg}\alpha = s_2/s_1$ e $\sin 2r = s_3/s_0$

⊕ Eq. (92.2) :

$$s_1 = s_0 \cos 2r \cos\alpha$$
$$s_2 = s_0 \cos 2r \sin\alpha$$
$$s_3 = s_0 \sin 2r \qquad (93.2)$$

: pto ∈ esfera, coord. esféricas $(s_0, \pi/2 - 2r, \alpha)$



EQUADOR ($2r = 0$) : pol. linear!

(veja detalhes abaixo)

· polarização parcial,

(veja Sec. 50, Landau)

Vimos que: onda plana monocromática (87.1): polarizada;

considerar: onda quasimonocromática, i.e., onda que apresenta largura espectral finita $\Delta\omega \ll \omega$;

nesse caso, p/ pto fixo no espaço, podemos escrever

$$\vec{E}(t) = \underbrace{\vec{E}_0(t)}_{\text{variação temporal "lenta"}} e^{i\overbrace{\omega}^{\text{frequência média}} t} \qquad (94.1)$$

: Δt variação $\vec{E}_0(t) \sim 1/\Delta\omega \gg$ período médio onda $\sim 1/\omega$

Caso particular Eq. (94.1): $\vec{E}_0(t) = \vec{E}_0$: onda monocromática

Eq. (94.1): onda parcialmente polarizada

ideia: descrever o estado de polarização (94.1).

inicial: considerar onda monocromática (87.1).

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{(E_1\hat{\epsilon}_1 + E_2\hat{\epsilon}_2)}_{\equiv \vec{E}_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

verifica-se que (veja abaixo) o estado de polarização de (87.1) pode ser descrito pelo tensor

$$J_{\alpha\beta} = E_\alpha E_\beta^* \quad ; \quad \alpha = 1,2 \sim \hat{\epsilon}_1 \text{ e } \hat{\epsilon}_2 \qquad (94.2)$$

em detalhes,

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{pmatrix} E_1 E_1^* & E_1 E_2^* \\ E_2 E_1^* & E_2 E_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_1|^2 & |E_1||E_2| e^{-i\delta} \\ |E_1||E_2| e^{i\delta} & |E_2| \end{pmatrix} \qquad (95.1)$$

onde $E_i = |E_i| e^{i\delta_i}$; $i = 1, 2$ e $\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$.

· propriedades : $Tr \overleftrightarrow{J} = |\vec{E}|^2$: intensidade onda
$\det \overleftrightarrow{J} = 0$
$J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}^*$: Hermitiano

como $J_{\alpha\beta}$ é uma matriz 2×2, podemos escrever

$$\overleftrightarrow{J} = \tfrac{1}{2} s_0 \hat{1}_{2\times 2} + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} s_i \hat{\sigma}_i , \qquad (95.2)$$

→ parâmetros de Stokes (veja abaixo)

onde σ_i : matrizes de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

como (propriedades) : $\sigma_i^2 = 1$
$\sigma_i \sigma_j = i \epsilon^{ijk} \sigma_k$
$Tr(\sigma_i) = 0$

$$\hookrightarrow \; Tr(\overleftrightarrow{J}) = Tr(\tfrac{1}{2} s_0 \hat{1}) + \sum_i \underbrace{Tr(\tfrac{1}{2} s_i \hat{\sigma}_i)}_{=0} = s_0$$

$$Tr(\overleftrightarrow{J} \cdot \hat{\sigma}_j) = \underbrace{Tr(\tfrac{1}{2} s_0 \hat{\sigma}_j)}_{=0} + \sum_i \underbrace{Tr(\tfrac{1}{2} s_i \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j)}_{\neq 0 \text{ se } i=j} = s_j \qquad (95.3)$$

temos que (exercicio),

$$s_0 = Tr(\overleftrightarrow{J}) = |E_1|^2 + |E_2|^2 = s_0^{JACKSON}$$

$$s_1 = Tr(\overleftrightarrow{J} \cdot \hat{\sigma}_1) = E_1 E_2^* + E_2 E_1^* = 2|E_1||E_2| \cos\delta = s_2^J$$

$$s_2 = Tr(\overleftrightarrow{J} \cdot \hat{\sigma}_2) = i(E_1 E_2^* - E_2 E_1^*) = 2|E_1||E_2| \sin\delta = s_3^J \qquad (96.1)$$

$$s_3 = Tr(\overleftrightarrow{J} \cdot \hat{\sigma}_3) = |E_1|^2 - |E_2|^2 = s_1^J$$

notar: definição s_i Landau $\neq$ definição s_i Jackson !

vamos analisar 3 casos,

(i) polarização linear,

$\measuredangle$ direção pol. - $\hat{\epsilon}_1$

$$\vec{E_0} = (|E_1|\hat{\epsilon}_1 + |E_2|\hat{\epsilon}_2)e^{i\delta} = |E_0|(\cos\theta\, \hat{\epsilon}_1 + \sin\theta\, \hat{\epsilon}_2)e^{i\delta}$$

↳ Eq. (95.1):

$$\overleftrightarrow{J} = |E_0|^2 \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

e Eq. (96.1):

$$\begin{aligned} s_0 &= |E_0|^2 \\ s_1 &= |E_0|^2 \sin 2\theta = s_2^J \\ s_2 &= 0 = s_3^J \\ s_3 &= |E_0|^2 \cos 2\theta = s_1^J \end{aligned}$$

: pto $\in$ EQUADOR esfera de Poincaré, pg. 93

(ii) polarização circular,

$$\vec{E_0} = \frac{|E_0|}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_1 \pm i\hat{\epsilon}_2) \; : \; \begin{cases} \text{LCP} \\ \text{RCP} \end{cases}$$

↳ $\overleftrightarrow{J} = \frac{|E_0|^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}$

e $S_0 = |E_0|^2$

$S_1 = 0 = S_2^J$: polos norte (LCP) e

$S_2 = \pm|E_0|^2 = S_3^J$ sul (RCP), esfera

$S_3 = 0 = S_1^J$ de Poincaré

(iii) polarização elíptica.

Como Eq. (50.4) : $\frac{E_-}{E_+} = \frac{E_1 + iE_2}{E_1 - iE_2} = re^{i\alpha} \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{(1+re^{i\alpha})}{i(1-re^{i\alpha})}$

↳ $\vec{E}_0 = \frac{|E_0|}{2(1+r^2)}\Big((1+re^{i\alpha})\,\hat{\epsilon}_1 + i(1-re^{i\alpha})\,\hat{\epsilon}_2 \Big)$

verifica-se que (exercício):

$$\overleftrightarrow{J} = \frac{1}{2}|E_0|^2 \begin{pmatrix} 1 + \frac{2r}{1+r^2}\cos\alpha & \frac{2r}{1+r^2}\sin\alpha - \frac{i(1-r^2)}{1+r^2} \\ \frac{2r}{1+r^2}\sin\alpha + \frac{i(1-r^2)}{1+r^2} & 1 - \frac{2r}{1+r^2}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

e

$S_0 = |E_0|^2$

$S_1 = |E_0|^2 . \frac{2r}{1+r^2}\sin\alpha = |E_0|^2\cos 2r \sin\alpha = S_2^J$

$S_2 = |E_0|^2 . \frac{(1-r^2)}{1+r^2} = |E_0|^2 \sin 2r = S_3^J$

$S_3 = |E_0|^2 . \frac{2r}{1+r^2}\cos\alpha = |E_0|^2 \cos 2r \cos\alpha = S_1^J$

: comparar Eq. (93.2) !

caso geral Eq. (94.2):

$$J_{\alpha\beta} = \langle E_\alpha E_\beta^* \rangle \;:\; \text{média temporal } E_\alpha E_\beta^* \qquad (98.1)$$

notar: Eq. (94.2) $\subset$ Eq. (98.1) pois, p/ onda monocromática

$$J_{\alpha\beta} = \langle E_\alpha E_\beta^* \rangle = E_\alpha E_\beta^* \quad !$$

tensor (98.1) permite descrever onda parcialmente pol. (94.1).

· Definição:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J} \;:\; \underline{\text{tensor de polarização}} \qquad (98.2)$$

onde $J = J_{11} + J_{22}$: intensidade da onda

vimos que: $\det(\overleftrightarrow{J}) = \det(\overleftrightarrow{\rho}) = 0$: onda monocromática !

· caso geral: $\det(\overleftrightarrow{J}) \geq 0 \qquad (98.3)$

vamos verificar (98.3),

ideia: considerar $\langle \ldots \rangle \sim$ soma discreta,

$$\det(\overleftrightarrow{J}) = \langle E_1 \cdot E_1^* \rangle \cdot \langle E_2 \cdot E_2^* \rangle - \underbrace{\langle E_1 E_2^* \rangle \cdot \langle E_2 E_1^* \rangle}_{|\langle E_1 E_2^* \rangle|^2}$$

como

$$|\langle E_1 E_2^* \rangle|^2 = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_{1,i} E_{2,i}^* \right|^2 \leq \underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |E_{1,i}|^2 \right)\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |E_{2,i}|^2 \right)}_{\langle |E_1|^2 \rangle \cdot \langle |E_2|^2 \rangle}$$

desigualdade de Schwarz

↳ $\det(\overleftrightarrow{J}) \geq 0 \rightarrow \det(\overleftrightarrow{\rho}) \geq 0$ (99.1)

Além do limite inferior (99.1), é possível estabelecer um limite superior p/ $\det(\overleftrightarrow{\rho})$;

· considerar luz natural: onda completamente não polarizada; nesse caso,

$$\overleftrightarrow{\rho} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1/2\, \hat{1}_{2\times 2} \quad \text{: tensor de polarização p/ luz natural} \qquad (99.2)$$

nesse caso: $\det(\overleftrightarrow{\rho}) = 1/4$

Eq. (99.1) ⊕ (99.2): $0 \leq \det(\overleftrightarrow{\rho}) \leq 1/4$ (99.3)

· Definição: grau de polarização P da onda,

$$\det(\overleftrightarrow{\rho}) = \frac{1}{4}(1 - P^2) \qquad (99.4)$$

Eq. (99.3): $0 \leq P \leq 1$

luz natural ↙ ↘ onda polarizada

notar

Eq. (95.2): $\overleftrightarrow{\rho} = \dfrac{\overleftrightarrow{J}}{S_0} = 1/2\, \hat{1}_{2\times 2} + 1/2 \sum_{i=1}^{3} S_i/S_0\, \hat{\sigma}_i$

↳ $\det(\overleftrightarrow{\rho}) = \dfrac{1}{4} + \sum_{i=1}^{3} \det\left(1/2\, S_i/S_0\, \hat{\sigma}_i\right) = \dfrac{1}{4}\left(1 + \sum_{i=1}^{3} \dfrac{S_i^2}{S_0^2}\right)$

↳ $P = \dfrac{1}{S_0}\left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^{1/2}$

Como $P \leq 1 \rightarrow S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$: comparar Eq. (92.2)