

## Guias de onda e cavidades ressonantes,

Ref.: Secs. 8.1 - 8.5, 8.7 e 8.8, Jackson

Secs. 19.4 e 19.6, Zangwill

- até o momento: descrição campos EM  $\subset$  volume  $V \rightarrow +\infty$
- ideia próxima etapa: " " "  $\subset$  " "  $V$  finito  
de finito por um conjunto superfícies  
(metálicas)  $S_i$ , i.e.,  
soluções eqs. de Maxwell  $\oplus$  condições contorno  
 $\sim$  superfícies!

• interessante: transmissão / confinamento campos EM.

em detalhes:

- transmissão campos EM, frequência  $\sim$  micro-ondas:  
via tubos metálicos (guias de onda);

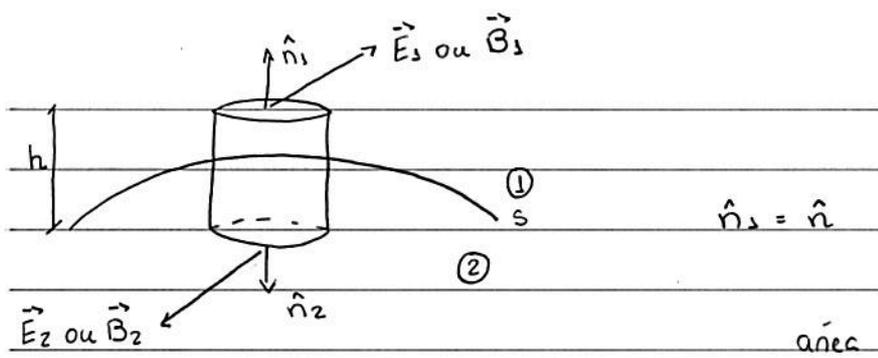
- " " " " "  $\sim$  visível, IR:  
via cabos dielétricos (fibras ópticas);

- confinamento campos EM: cavidades ressonantes  
(estudo interação radiação-matéria)

Lembrar:  $\sim$  | M.W. | IR | vis. | UV |  $\lambda$  (m)  
| |  $10^{-3}$  |  $10^6$  |  $10^7$  |  $10^{-5}$  |

• inicial: condições de contorno, campos  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ ,

(i) considerar: superfície arbitrária  $S \oplus$  densidade  
superficial de carga  $Z(\vec{r}, t) \oplus$   
cilindro infinitesimal



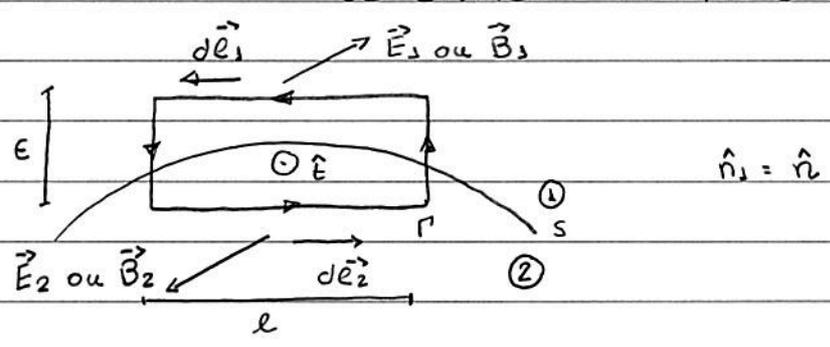
Eq. (5.3) :  $\oint_{\text{CILINDRO}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (\hat{n}_1 \cdot \vec{E}_1 + \hat{n}_2 \cdot \vec{E}_2) A = Q/\epsilon_0 = \Sigma \cdot A/\epsilon_0$

$\hookrightarrow \hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 1/\epsilon_0 \Sigma$

Eq. (33.3) :  $\oint_{\text{CILINDRO}} \vec{B} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (\hat{n}_1 \cdot \vec{B}_1 + \hat{n}_2 \cdot \vec{B}_2) A = 0$

$\hookrightarrow \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

(ii) considerar: superficie arbitraria S ⊕ densidade superficial de corrente  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  ⊕ curva fechada infinitesimal  $\Gamma$



Eq. (43.3) :  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot (ds \hat{e})$

$\hookrightarrow$  sup. fronteira =  $\Gamma$

$\hookrightarrow \epsilon \rightarrow 0 \rightarrow (\vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}_2) \cdot l = 0$ , pois área sup. S  $\rightarrow 0$ !

$\hookrightarrow \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

$$\text{Eq. (49.1)} : \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot (d\vec{s} \hat{n})$$

$$\xrightarrow{L \rightarrow 0} (\vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell}_2) L = \mu_0 I, \text{ pois \u00e1rea sup. } S \rightarrow 0$$

$$\text{Eq. (30.2)} \quad \vec{j} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 d\vec{\ell}_1 \cdot (\vec{k} \times \hat{n}) \cdot L$$

$$\hookrightarrow \hat{n} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{j}$$

Resumo condi\u00e7\u00f5es de contorno:

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \Sigma / \epsilon_0$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

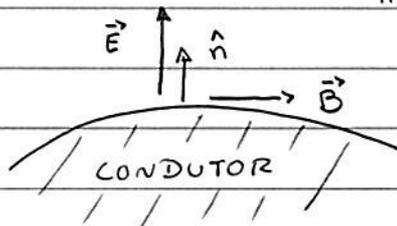
(102.1)

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{j}$$

Lembran: Eq. (102.1): comportamento campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  vizinhan\u00e7a sup. S.

caso particular: regi\u00e3o 1: v\u00e1cuo:  $\vec{E}_1, \vec{B}_1 \rightarrow \vec{E}, \vec{B}$   
 " 2: condutor:  $\vec{E}_2, \vec{B}_2 \rightarrow \vec{E}_c, \vec{B}_c$



hip\u00f3tese: condutor = condutor perfeita ( $\sigma \rightarrow +\infty$ )

$$\hookrightarrow \vec{E}_c = \vec{B}_c = 0$$

$$\text{Eq. (102.1)} : \hat{n} \cdot \vec{E} = \Sigma / \epsilon_0$$

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\hat{n} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

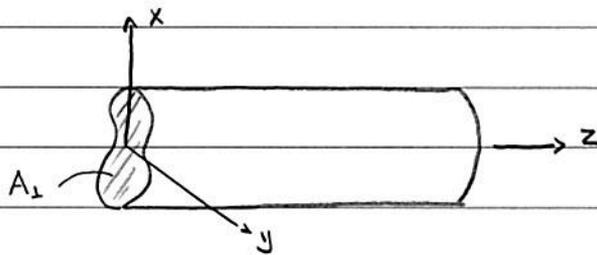
(102.2)

: comportamento  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  vizinhan\u00e7a interface v\u00e1cuo-condutor! 

Obs.: pr bons condutores  $\sigma < +\infty \rightarrow \exists$  efeitos dissipativos  
(veja abaixo e Sec. 8.1, Jackson)

· guias de onda cilíndricos,

consideram: tubo comprimento  $L \rightarrow +\infty$ , paredes metálicas  
(condutor perfeito), interior = vácuo,  
eixo de simetria  $\perp$  eixo  $\hat{z}$ ,  
área secção transversal arbitrária e cte;



ideia: determinar sol. eqs. de Maxwell pr pto  $\vec{r}$  e interior tubo!

Eqs. de Maxwell vácuo, ausência de fontes (pg. 82):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \qquad (103.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = 0$$

hipótese (i): dependência  $t$  campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ : harmônicas:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \qquad ; \quad \vec{E}(\vec{r}) \text{ e } \vec{B}(\vec{r}) \in \mathbb{C} \qquad (103.2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Eqs. (103.1) e (103.2):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} - i\omega \vec{B} = 0 \qquad (103.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} + i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} = 0$$

de modo análogo pg. 82, temos que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} = i\omega (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{B}$$

$$\hookrightarrow (\nabla^2 + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2) \vec{E} = 0$$

(104.1)

$$(\nabla^2 + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2) \vec{B} = 0$$

hipótese (ii): separamos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em componentes

$\parallel$  (longitudinais) e  $\perp$  (transversais) ao eixo de simetria  $\hat{z}$ :

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) + E_z \hat{z} = (\hat{z} \times \vec{E}) \times \hat{z} + \vec{E}_z$$

(104.2)

$$\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_z = (B_x \hat{x} + B_y \hat{y}) + B_z \hat{z} = (\hat{z} \times \vec{B}) \times \hat{z} + \vec{B}_z$$

verifica-se que (veja pg. 104.1) as eqs. (103.3) assumem a forma:

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = -\partial_z E_z$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t = -\partial_z B_z$$

(104.3)

$$\hat{z} \cdot (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) = i\omega B_z$$

(104.4)

$$\partial_z \vec{E}_t + i\omega \hat{z} \times \vec{B}_t = \vec{\nabla}_t E_z$$

(104.5)

$$\hat{z} \cdot (\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t) = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega E_z$$

(104.6)

$$\partial_z \vec{B}_t - i\mu_0 \epsilon_0 \omega \hat{z} \times \vec{E}_t = \vec{\nabla}_t B_z$$

(104.6)

$$\text{onde } \vec{\nabla} = \hat{x} \partial_x + \hat{y} \partial_y + \hat{z} \partial_z \equiv \vec{\nabla}_t + \hat{z} \partial_z$$

• Vamos verificar as Eqs. (104.3) - (104.6),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\hookrightarrow (\vec{\nabla}_t + \hat{z} \partial_z) \cdot (\vec{E}_t + \vec{E}_z) = \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t + \partial_z E_z = 0 \quad : \text{ Eq. (104.3)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t + \partial_z B_z = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\hookrightarrow (\vec{\nabla}_t + \hat{z} \partial_z) \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z) = i\omega (\vec{B}_t + \vec{B}_z)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t + \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z + \hat{z} \partial_z \times \vec{E}_t + \underbrace{\hat{z} \partial_z \times \vec{E}_z}_{=0} = i\omega (\vec{B}_t + \vec{B}_z) \quad (104.7)$$

como:

$$\text{(exercício)} \quad \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = \hat{z} (\partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

$$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z = \hat{x} \partial_y E_z - \hat{y} \partial_x E_z$$

$$\hat{z} \partial_z \times \vec{E}_t = \hat{y} \partial_z E_x - \hat{x} \partial_z E_y$$

$$\hookrightarrow \hat{z} \cdot \text{Eq. (104.7)} : \hat{z} \cdot (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) = i\omega B_z$$

$$\hookrightarrow \hat{z} \times \text{Eq. (104.7)} :$$

$$\underbrace{\hat{z} \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_z)}_{\vec{\nabla}_t E_z} + \underbrace{\hat{z} \times (\hat{z} \partial_z \times \vec{E}_t)}_{-\partial_z \vec{E}_t} = i\omega \hat{z} \times \vec{B}_t \quad : \text{ Eq. (104.5)}$$

• de modo análogo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + i\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E} = 0 \rightarrow \text{Eq. (104.6)} !$$

Eqs. (104.3) - (104.6): componentes transversais  $\vec{E}_t$  e  $\vec{B}_t$  podem ser determinadas a partir comp. longitudinais  $E_z$  e  $B_z$ !

hipótese (iii): devido geometria do sistema, podemos escrever

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x,y) e^{+ikz} = (\vec{E}_t(x,y) + \vec{E}_z(x,y)) e^{+ikz} \quad (105.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(x,y) e^{+ikz} = (\vec{B}_t(x,y) + \vec{B}_z(x,y)) e^{+ikz}$$

determinado a posteriori

notas:  $E \sim e^{i(kz - \omega t)}$ : propagação onda sentido  $+\hat{z}$   
 $E \sim e^{-i(kz + \omega t)}$ : " " "  $-\hat{z}$

como  $\nabla^2 \vec{E} = \left( \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E} = (\nabla_t^2 - k^2) \vec{E}$ , temos que

• Eqs. (104.1) e (105.1):

$$(\nabla_t^2 + (\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - k^2)) \vec{E}(x,y) = 0 \quad (105.1)$$

$$(\nabla_t^2 + (\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - k^2)) \vec{B}(x,y) = 0$$

$$\text{onde } \nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

como  $\partial_z \vec{E}_t = \pm ik \vec{E}_t$ , podemos também considerar

• Eqs. (104.4) - (104.6) e (105.1)

$$\hat{z} \cdot (\nabla_t \times \vec{E}_t) = i\omega B_z \quad \pm ik \vec{E}_t + i\omega \hat{z} \times \vec{B}_t = \nabla_t E_z \quad (105.2)$$

$$\hat{z} \cdot (\nabla_t \times \vec{B}_t) = -i\mu_0 \epsilon_0 \omega E_z \quad \pm ik \vec{B}_t - i\mu_0 \epsilon_0 \omega \hat{z} \times \vec{E}_t = \nabla_t B_z$$

notas: Eqs. (105.1) e (105.2): duas possibilidades p/ determinação

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{B}(x, y)$$

(i) determinação  $\vec{E}_t$  e  $\vec{B}_t$  em termos  $E_z$  e  $B_z$ : via (105.2):

$$\text{notas: } \pm i\kappa (\hat{z} \times \vec{E}_t) + i\omega \underbrace{\hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{B}_t)}_{= -\vec{B}_t} = \hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z$$

$$\text{como } \hat{z} \times \vec{E}_t = \frac{1}{i\mu_0 \epsilon_0 \omega} (\pm i\kappa \vec{B}_t - \vec{\nabla}_t B_z)$$

$$\text{exercício} \rightarrow \gamma^2 \vec{B}_t = i (\pm \kappa \vec{\nabla}_t B_z + \mu_0 \epsilon_0 \omega (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z))$$

(106.1)

onde

$$\gamma^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - \kappa^2$$

(106.2)

de modo análogo, temos que (exercício)

$$\gamma^2 \vec{E}_t = i (\pm \kappa \vec{\nabla}_t E_z - \omega (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t B_z))$$

(106.3)

(ii) determinação  $E_z$  e  $B_z$ : via (105.1):

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) E_z(x, y) = 0$$

: eq. de Helmholtz (106.4)

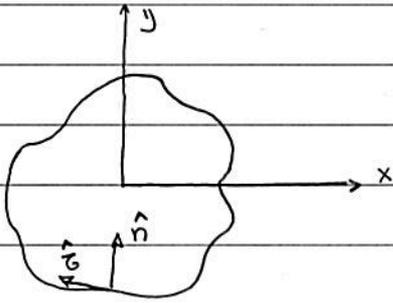
$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) B_z(x, y) = 0$$

2-D!

⊕ condições de contorno apropriadas (veja abaixo)

• sobre as condições de contorno p/ (106.4),

consideram vetores unitários  $\hat{n}, \hat{e}, \hat{z}$ :



$$\begin{aligned} \hat{n} \times \hat{t} &= \hat{z} \\ \hat{t} \times \hat{z} &= \hat{n} \\ \hat{z} \times \hat{n} &= \hat{t} \end{aligned}$$

condições de contorno (102.2):

(i)  $\hat{n} \times \vec{E} \Big|_s = 0$   
 ↑ p/ p/ os  $\vec{n} \in \text{sup.}$

↳  $E_{\parallel} \Big|_s = 0$  ou  $E_z \Big|_s = 0$  e  $\hat{t} \cdot \vec{E} = \hat{t} \cdot (\vec{E}_t + \vec{E}_z) \Big|_s = 0$

↳  $\hat{t} \cdot \vec{E}_t \Big|_s = 0$

(ii)  $\hat{n} \cdot \vec{B} \Big|_s = 0 \rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{B}_t + \vec{B}_z) = \hat{n} \cdot \vec{B}_t \Big|_s = 0$

Eq. (105.2):  $\hat{n} \cdot (\pm i k \vec{B}_t - i \mu_0 \epsilon_0 \omega (\hat{z} \times \vec{E}_t)) = \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_z$

$\pm i k (\hat{n} \cdot \vec{B}_t) \Big|_s - i \mu_0 \epsilon_0 \omega \hat{n} \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_t) \Big|_s = \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_z \Big|_s$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$\vec{E}_t \cdot (\hat{n} \times \hat{z}) \Big|_s = 0$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{-\hat{t}}$

↳  $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_z \Big|_s \equiv \frac{\partial B_z}{\partial n} \Big|_s = 0$

↳ c.c. p/  $E_z$ :  $E_z \Big|_s = 0$

(107.1)

c.c. p/  $B_z$ :  $\frac{\partial B_z}{\partial n} \Big|_s = 0$

notas: Eq. (106.4) e c.c. (107.1): problema de autovalores / autovetores 2-D;

Como as c.c. p/  $E_z$  e  $B_z$  são distintas, vamos separar as soluções em 2 categorias:

(i) modo TM (transverse magnetic)

hipótese:  $B_z(x,y) = 0$ ,  $\vec{n}$  é interior tubo

$$\text{Eq. (106.4)} : (\nabla_t^2 + \gamma^2) E_z(x,y) = 0 \quad \oplus \quad \text{c.c. } E_z|_s = 0$$

(108.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eq. (106.3)} : \gamma^2 \vec{E}_t = \pm i \kappa \nabla_t E_z \\ \text{Eq. (105.2)} : \vec{B}_t = \pm \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{\kappa} \hat{z} \times \vec{E}_t \end{array} \right.$$

(ii) modo TE (transverse electric)

hipótese:  $E_z(x,y) = 0$ ,  $\vec{n}$  é interior tubo

$$\text{Eq. (106.4)} : (\nabla_t^2 + \gamma^2) B_z(x,y) = 0 \quad \oplus \quad \text{c.c. } \frac{\partial B_z}{\partial n} \Big|_s = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eq. (106.3)} : \gamma^2 \vec{B}_t = \pm i \kappa \nabla_t B_z \\ \text{Eq. (105.2)} : \vec{E}_t = \mp \frac{\omega}{\kappa} \hat{z} \times \vec{B}_t \end{array} \right. \quad (108.2)$$

Obs.: modos TM e TE  $\oplus$  modo TEM (veja abaixo):

conjunto completo de funções = base p/ expansão

campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  arbitrários! (veja sec. 19.4.3, Zengwille)

notas: Eqs. (\*) e (\*\*\*) relacionadas via transformação de dualidade  $\vec{E} = c \vec{B}'$  e  $\vec{B} = -\vec{E}'/c$  (veja pg. 77)

notas: expressões completas campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ ,

(i) modo TM,

Eqs. (103.2), (105.1) e (108.1):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\pm i k \vec{V}_t E_z}{r^2} + \hat{z} E_z \right) e^{i(\pm k z - \omega t)} \quad (108.3)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{i \mu_0 \epsilon_0 \omega}{r^2} (\hat{z} \times \vec{V}_t E_z) e^{i(\pm k z - \omega t)}$$

onde  $E_z = E_z(x, y)$

(ii) modo TE,

Eqs. (103.2), (105.1) e (108.2):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{i \omega}{r^2} (\hat{z} \times \vec{V}_t B_z) e^{i(\pm k z - \omega t)} \quad (108.4)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\pm i k \vec{V}_t B_z}{r^2} + \hat{z} B_z \right) e^{i(\pm k z - \omega t)}$$

onde  $B_z = B_z(x, y)$

sobre o modo TEM (transverse electromagnetic),

hipótese:  $E_z(x,y) = B_z(x,y) = 0$ ,  $\vec{n}$  é interior tubo

$$\hookrightarrow \text{Eq. (104.3)} : \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = 0$$

$$\rightarrow \vec{E}_t = -\vec{\nabla}\Phi_t \quad \text{e} \quad \nabla^2\Phi_t = 0 \quad (109.1)$$

$$\text{Eq. (105.2)} : \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = 0$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (105.3)} : (\nabla_t^2 + \gamma^2) \vec{E}_t = \gamma^2 \vec{E}_t = 0 \rightarrow \gamma^2 = 0 \rightarrow \kappa = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \omega$$

ou:  $\omega = c\kappa$ : relação frequência e número de onda  
= ondas planas (109.2)

$$\hookrightarrow \text{Eq. (105.2)} : \pm i\kappa \vec{B}_t = i\mu_0 \epsilon_0 \omega \hat{z} \times \vec{E}_t + \vec{\nabla}_t B_z$$

$$= i\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \kappa \hat{z} \times \vec{E}_t$$

$$\hookrightarrow \vec{B}_t = \pm \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \hat{z} \times \vec{E}_t : \text{similar Eq. (84.2)} \quad (109.3)$$

p/ ondas planas

Eqs. (109.1) - (109.3): características modo TEM;

em particular (109.1):  $\vec{E}_t$  é solução problema eletrostático

notas: p/ geometria pg. 103 (tubo  $L \rightarrow +\infty$ , paredes metálicas),

temos que  $\vec{E}_t = 0$ :

de fato, como paredes metálicas = sup. equipotencial,  
teorema de Earnshaw (veja Sec. 3.3, Zangwill)

$\hookrightarrow$  sol. (109.1):  $\Phi_t(\vec{r}) = \text{cte}$ ,  $\vec{r}$  é interior tubo.

modo TEM possível p/ sistema c/ # sups.  $\geq 2$ ,

e.g., cabo coaxial.

sobre o problema de autovalores (106.4) ⊕ (107.1),

$\gamma_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots$  : autovalores

temos que  $\gamma^2 > 0 \sim$  soluções oscilatórias

Eq. (106.2) :  $\gamma_\lambda^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - k^2$  : relação entre número de onda  $k$  e frequência  $\omega$

$$\hookrightarrow k = (\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - \gamma_\lambda^2)^{1/2} = \frac{1}{c} (\omega^2 - c^2 \gamma_\lambda^2)^{1/2} = \frac{1}{c} (\omega^2 - \omega_{\lambda,c}^2)^{1/2} \quad (110.1)$$

onde  $\omega_{\lambda,c} = c \gamma_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$  : frequência de corte

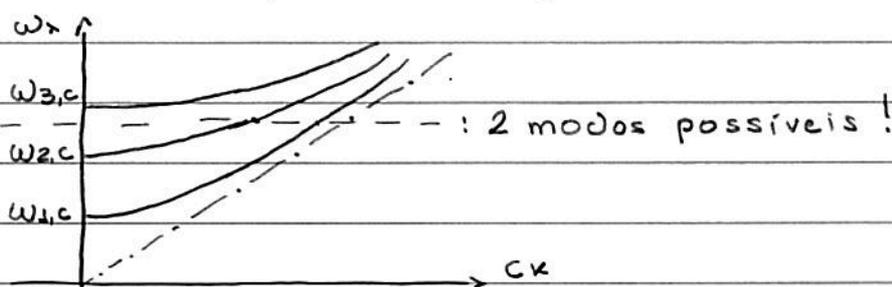
notas : se  $\omega > \omega_{\lambda,c} \rightarrow k \in \mathbb{R}$  : modo propagante  
se  $\omega < \omega_{\lambda,c} \rightarrow k \in \mathbb{C}$  : " evanescente

Eq. (110.1) pode ser escrita como :

$$\omega_\lambda = \omega_\lambda(k) = (\omega_{\lambda,c}^2 + c^2 k^2)^{1/2} : \text{relação de dispersão} \quad (110.2)$$

notas : (i) cada  $\omega_{\lambda,c}$  define um ramo p/ a relação de dispersão;

(ii) p/ uma dada frequência  $\omega$ ,  $\exists$  # finito de modos possíveis (veja linha ----)



(iii) velocidade de fase modo  $\lambda$ ,

$$\text{Eq. (83.4)} : v_{p,\lambda} = \frac{\omega_\lambda(k)}{k_\lambda} = \frac{c\omega}{(\omega^2 - \omega_{\lambda,c}^2)^{1/2}} = c \frac{1}{(1 - \omega_{\lambda,c}^2/\omega^2)^{1/2}} > c \quad (111.1)$$

notas :  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_{\lambda,c}} v_{p,\lambda} = +\infty$  ;

correspondente velocidade de grupo.

$$v_{g,\lambda} = \frac{d\omega_\lambda(k)}{dk} = \frac{c(\omega^2 - \omega_{\lambda,c}^2)^{-1/2} \cdot 2\omega}{\omega} < c \quad : \text{ veja Fig. pg. 110} \quad (111.2)$$

↑  
Eq. (110.2)

notas :  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_{\lambda,c}} v_{g,\lambda} = c$

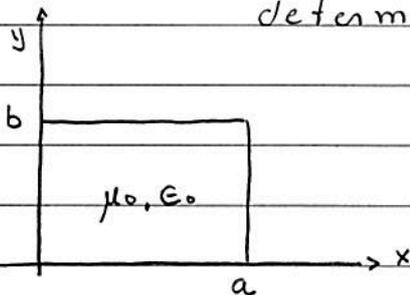
$\hookrightarrow v_p v_g = c^2$  e  $v_g < c < v_p$  : p/ tubo  $L \rightarrow +\infty$  cilindrico!

Ex.: guia de onda retangular,

considerar: guia de onda, área seção transversal

retangular;

determinar modos TM e TE.



hipótese:  $a > b$  !

(i) modos TM,

$$\text{Eq. (108.1)} : \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right) E_z(x, y) = 0 \quad (112.1)$$

condições de

$$\text{contorno} : E_z(0, y) = E_z(a, y) = E_z(x, 0) = E_z(x, b) = 0$$

solução (112.1) : via método separação de variáveis,

$$\text{hipótese} : E_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (112.2)$$

$$\text{Eqs. (112.1) } \oplus \text{ (112.2)} : YX'' + XY'' + \gamma^2 XY = 0$$

$$+ \frac{1}{XY} : \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 = 0$$

$$\hookrightarrow X'' + \alpha^2 X = 0$$

$$; \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

$$Y'' + \beta^2 Y = 0$$

$\swarrow \searrow$  chaves de separação !

$$\hookrightarrow X_\alpha(x) = A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x$$

$$Y_\beta(y) = C_\beta \cos \beta y + D_\beta \sin \beta y$$

$$\hookrightarrow E_z(x,y) = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x) (C \cos \beta y + D \sin \beta y)$$

onde ctes  $A, B, C, D, \alpha, \beta \sim$  condições de contorno.

notas:

$$- E_z(0,y) = 0 \rightarrow A = 0 \rightarrow E_z(x,y) = \sin \alpha x (C \cos \beta y + D \sin \beta y)$$

$$- E_z(x,0) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow E_z(x,y) = E_0 \sin \alpha x \sin \beta y$$

$$- E_z(a,y) = E_0 \sin \alpha a \sin \beta y = 0 \rightarrow \alpha a = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$- E_z(x,b) = E_0 \sin \alpha x \sin \beta b = 0 \rightarrow \beta b = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\hookrightarrow E_z^{m,n}(x,y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) ; \quad m, n = 1, 2, \dots$$

(113.1)

$$\text{como } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \rightarrow \gamma_{m,n}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

$$\hookrightarrow \omega_{m,n,c} = c \gamma_{m,n} = c\pi \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{1/2} : \text{ frequências de conte}$$

$$\text{menor freq. de conte : } m=n=1 : \omega_{1,1,c} = c\pi \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{1/2}$$

$$\text{Eq. (110.1) : } K = \frac{1}{c} \left( \omega^2 - \omega_{m,n,c}^2 \right)^{1/2} \quad (113.2)$$

$$\text{Eq. (108.1) : } \gamma_{m,n}^2 \vec{E}_t = \pm i K_{m,n} \vec{\nabla}_t E_z,$$

verifica-se que (exercício)

$$E_z(\vec{r}, t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i\kappa z - i\omega t}$$

$$E_x(\vec{r}, t) = \frac{\pm i\kappa}{\gamma_{m,n}^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i\kappa z - i\omega t}$$

$$E_y(\vec{r}, t) = \frac{\pm i\kappa}{\gamma_{m,n}^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i\kappa z - i\omega t}$$

(114.1)

$$\text{e } \vec{B}_t = \pm \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{\kappa} \hat{z} \times \vec{E}_t, \text{ onde } \kappa: \text{ Eq. (113.2)}$$

(ii) modos TE,

$$\text{Eq. (108.2): } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right) B_z(x, y) = 0$$

condições de

$$\text{contorno: } \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial B_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial B_z}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0$$

verifica-se que (exercício):

$$B_z^{m,n}(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$c/ \quad m+n > 0$$

(114.2)

$$\gamma_{m,n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

$$\omega_{m,n,c} = c\pi \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2} : \text{ freq. de corte}$$

menor freq. de corte:  $m=1, n=0$ :  $\omega_{1,0,c} = \frac{c\pi}{a}$  ( $a > b$ )

notan:  $\omega_{10}^{TE} < \omega_{11}^{TM}$

pr  $a \sim 10^{-2} \text{ m} \rightarrow \omega_{10}^{TE} = c\pi/a \sim 10^{10} \text{ Hz}$ : micro-ondas!

Eq. (108.2):  $\nabla_{\perp}^2 \vec{B}_t = \pm i\kappa \vec{\nabla}_t B_z$ , temos que

$$B_z(\vec{r}, t) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i\kappa z - \omega t}$$

$$B_x(\vec{r}, t) = \mp i\kappa \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)}{r_{m,n}^2} B_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i\kappa z - \omega t}$$

$$B_y(\vec{r}, t) = \mp i\kappa \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)}{r_{m,n}^2} B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{\pm i\kappa z - \omega t}$$

(115.1)

$$\text{e } \vec{E}_t = \mp \frac{\omega}{\kappa} \hat{z} \times \vec{B}_t, \text{ onde } \kappa: \text{ Eq. (113.2)}$$

Obs.: (i) condições de contorno (102.2)  $\oplus$  (114.1) ou (115.1)

↳ determinação  $\Sigma = \Sigma(\vec{r}, t)$  e  $\vec{K} = \vec{K}(\vec{r}, t)$  nas paredes guia de onda retangular pr cada modo  $(m, n)$  TM e TE

(ii) veja Figs. 19.8 e 19.9, Zangwill pr exemplos configurações campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e densidade superficial de corrente  $\vec{K}$ .

fluxo de energia,

ideia: determinar comportamento do fluxo de energia ao longo de um guia de onda cilíndrico, Fig. pg. 103.

Lembrar: vetor de Poynting  $\vec{S}$ : densidade de corrente de energia

$[\vec{S}]$ : energia / área · tempo

Eq. (85.2):  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*)$ : valor médio (temporal)  $\vec{S}$

notas:  $\vec{S} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}^* = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_t + \vec{E}_z) \times (\vec{B}_t^* + \vec{B}_z^*)$

hipótese (ii), pg. 109

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left( \underbrace{\vec{E}_t \times \vec{B}_t^*}_{(I)} + \underbrace{\vec{E}_t \times \vec{B}_z^* + \vec{E}_z \times \vec{B}_t^*}_{(II)} \right)$$

como (verificar): (I)  $\propto \hat{z}$ ; (II)  $\propto \hat{x}$  e  $\hat{y}$

$\hookrightarrow \vec{S}_z = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_t \times \vec{B}_t^*)$  : fluxo energia ao longo eixo guia de onda

(116.1)

$\vec{S}_t = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_t \times \vec{B}_z^* + \vec{E}_z \times \vec{B}_t^*)$  : " " através paredes guia de onda

próxima etapa: analisar Eq. (116.1) p/ modos TM e TE;

ideia: escrever Eq. (116.1) em termos  $E_z$  ou  $B_z$ .

(i) modo TM,

Eq. (108.1)  $\oplus$  (116.1):

$$\begin{aligned}\vec{S}_z &= \pm \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{\kappa} \vec{E}_t \times (\hat{z} \times \vec{E}_t^*) = \pm \frac{\epsilon_0 \omega}{2\kappa} |\vec{E}_t|^2 \hat{z} \\ &= \pm \frac{\omega \kappa \epsilon_0}{2r^4} |\vec{V}_t E_z|^2 \hat{z} \quad (117.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_t &= \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_z \times \vec{B}_t^*), \quad \text{pois } B_z = 0 \\ &= \pm \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{\kappa} \vec{E}_z \times (\hat{z} \times \vec{E}_t^*) = \mp \frac{\epsilon_0 \omega}{2\kappa} E_z \vec{E}_t = i \frac{\epsilon_0 \omega}{2r^2} E_z \vec{V}_t E_z^* \\ &\quad (117.2)\end{aligned}$$

como, em geral,  $E_z \in \mathbb{R} \rightarrow S_t \in \mathbb{C}$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (85.2)} : \langle \vec{S}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_z \times \vec{B}_t^*) = 0 : \text{ou c/ a}$$

hipótese paredes = condutor perfeito  
( $\nabla$  efeitos dissipativos)

temos que:

$$\langle P \rangle = \int_{A_\perp} \langle \vec{S}_z \rangle \cdot d\vec{S} = \int_{A_\perp} \langle \vec{S}_z \rangle \cdot (ds \hat{z}) : \text{média temporal}$$

potência através  
área secção transversal  $A_\perp$   
guia de onda (117.3)

$$\begin{aligned}\text{Eq. (117.1)} \downarrow \\ &= \pm \frac{\omega \kappa \epsilon_0}{2r^4} \int_{A_\perp} (\vec{V}_t E_z^*) \cdot (\vec{V}_t E_z) ds\end{aligned}$$

considerar:  $\oint$  identidade de Green (11.3) p/ caso 2-D:

$$\int_S d^2n (\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)) = \oint_{\Gamma} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl$$

se  $\phi \rightarrow E_z^*$  e  $\psi \rightarrow E_z$ , temos que

$$\langle P \rangle = \pm \frac{\omega k \epsilon_0}{2r^4} \left( - \oint_{\Gamma} E_z^* \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int_{A_{\perp}} d^2n E_z^* \nabla_{\perp}^2 E_z \right) \quad (118.1)$$

pois aqui  $\hat{n}$ : pr dentro  $A_{\perp}$  !  
 fronteira sup.  $A_{\perp} \subset$  paredes guia de onda  
 $= 0$ , pois c.c. modo TM:  $E_z|_S = 0$  !

como Eq. (108.1) :  $(\nabla_{\perp}^2 + r^2) E_z = 0 \rightarrow \nabla_{\perp}^2 E_z = -r^2 E_z$

$$\hookrightarrow \langle P \rangle = \pm \frac{\omega k \epsilon_0}{2r^2} \int_{A_{\perp}} d^2n |E_z|^2$$

como Eq. (110.3) :  $ck = (\omega^2 - \omega_{\lambda c}^2)^{1/2}$  ;  $\omega_{\lambda c} = c/r_{\lambda}$

$$\hookrightarrow \langle P \rangle = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda c}} \right)^2 \left( 1 - \frac{\omega_{\lambda c}^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \int_{A_{\perp}} d^2n |E_z|^2 \quad (118.2)$$

(ii) modo TE,

Eq. (108.2)  $\oplus$  (116.1) :

$$\vec{S}_z = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mp \omega}{k} \right) (\hat{z} \times \vec{B}_t) \times \vec{B}_t^* = \pm \frac{\omega}{2\mu_0 k} |\vec{B}_t|^2 \hat{z} = \pm \frac{\omega k}{2\mu_0 r^4} |\vec{\nabla}_t B_z|^2 \hat{z} \quad (118.3)$$

$$\vec{S}_t = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{E}_t \times \vec{B}_z^*) , \text{ pois } E_z = 0$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mp \omega}{k} \right) (\hat{z} \times \vec{B}_t) \times \vec{B}_z^* = \frac{\mp \omega}{2\mu_0 k} \vec{B}_z^* \vec{B}_t$$

$$= \frac{-i\omega}{2\mu_0 r^2} B_z^* \nabla_t B_z \in \mathbb{C} ! \quad (118.4)$$

de modo análogo ao caso TM:

$$\langle P \rangle = \int_{A_{\perp}} \langle \vec{S}_z \rangle \cdot (ds \hat{z}) = \pm \frac{\omega \kappa}{2\mu_0 r^4} \int_{A_{\perp}} d^2 n (\vec{v}_t B_z^*) \cdot (\vec{v}_t B_z)$$

$$= \pm \frac{\omega \kappa}{2\mu_0 r^2} \int_{A_{\perp}} d^2 n |B_z|^2 \quad : \text{análogo (118.1) ou, pois} \\ \text{c.c. modo TE : } \left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_s = 0$$

$$= \pm \frac{1}{2} \frac{c}{\mu_0} \left( \frac{\omega}{\omega_{\text{xc}}} \right)^2 \left( 1 - \frac{\omega_{\text{xc}}^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \int_{A_{\perp}} d^2 n |B_z|^2 \quad (119.1)$$

notas: Eq. (118.2)  $\oplus$  transf. de dualidade = Eq. (119.1) !  
 $\vec{E} \rightarrow c \vec{B}$

• sobre a densidade de energia,

$$\text{Eq. (86.2): } \langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2 \\ = \frac{1}{4} \epsilon_0 \left( |\vec{E}_t|^2 + |\vec{E}_z|^2 + c^2 |\vec{B}_t|^2 + c^2 |\vec{B}_z|^2 \right) \quad (119.2)$$

de modo análogo ao vetor de Poynting, vamos expressar (119.2) em termos  $E_z$  ou  $B_z$ ,

(i) modo TM,

$$\hookrightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \left( |\vec{E}_t|^2 + |\vec{E}_z|^2 + c^2 |\vec{B}_t|^2 \right), \text{ pois } B_z = 0$$

Eq. (108.1):

$$|\vec{E}_t|^2 = \frac{\kappa^2}{r^4} |\vec{v}_t E_z|^2$$

$$c^2 |\vec{B}_t|^2 = \frac{c^2 \omega^2}{\kappa^2 c^4} (\hat{z} \times \vec{E}_t) \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_t^*) = \frac{\omega^2}{\kappa^2 c^2} |\vec{E}_t|^2 = \frac{\omega^2}{c^2 r^4} |\vec{v}_t E_z|^2$$

$$L, \langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \left( |\vec{E}_z|^2 + \frac{\kappa^2}{r^4} \left( 1 + \frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} \right) |\vec{V}_t E_z|^2 \right)$$

temos que

$$\frac{\langle U \rangle}{L} = \int_{A_\perp} d^2 n \langle u \rangle \quad : \text{média temporal energia / comprimento} \quad (120.1)$$

$$= \frac{1}{4} \epsilon_0 \int_{A_\perp} d^2 n \left( |\vec{E}_z|^2 + \frac{\kappa^2}{r^4} \left( 1 + \frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} \right) |\vec{V}_t E_z|^2 \right)$$

$= r^2 |\vec{E}_z|^2$  : similar

Eq. (118.1)

$$= \frac{1}{4} \epsilon_0 \left( 1 + \frac{\kappa^2}{r^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} \right) \right) \int_{A_\perp} d^2 n |\vec{E}_z|^2$$

$= 2\omega^2 / \omega_{\lambda c}^2$  (exercício)

$$L, \frac{\langle U \rangle}{L} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda c}} \right)^2 \int_{A_\perp} d^2 n |\vec{E}_z|^2 \quad (120.2)$$

de modo análogo à onda plana, defini-se a velocidade de energia,

$$v_E = \frac{\langle P \rangle}{\langle U \rangle / L} \quad : \text{comparam Eq. (86.4)} \quad (120.3)$$

Eqs. (118.2), (120.2) e (120.3) :

$$v_E = \pm \frac{c}{\omega} (\omega^2 - \omega_{\lambda c}^2)^{1/2} = v_g \quad : \text{Eq. (111.2)} \quad (120.4)$$

: transporte de energia ao longo guia de onda : velocidade de grupo !

(ii) modo TE.

$$\hookrightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 \left( |\vec{E}_t|^2 + c^2 |\vec{B}_t|^2 + c^2 |\vec{B}_z|^2 \right), \text{ pois } E_z = 0$$

Eq. (108.2):

$$c^2 |\vec{B}_t|^2 = \frac{c^2 k^2}{r^4} |\vec{V}_t B_z|^2$$

$$|\vec{E}_t|^2 = \frac{\omega^2}{k^2} (\hat{z} \times \vec{B}_t) \cdot (\hat{z} \times \vec{B}_t) = \frac{\omega^2}{k^2} |\vec{B}_t|^2 = \frac{\omega^2}{r^4} |\vec{V}_t B_z|^2$$

$$\hookrightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 c^2 \left( |B_z|^2 + \frac{k^2}{r^4} \left( 1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) |\vec{V}_t B_z|^2 \right)$$

de modo análogo ao caso TM,

$$\begin{aligned} \frac{\langle U \rangle}{L} &= \int_{A_\perp} d^2 n \langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 c^2 \left( 1 + \frac{k^2}{r^2} \left( 1 + \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \right) \right) \int_{A_\perp} d^2 n |B_z|^2 \\ &= 2\omega^2 / \omega_{\lambda c}^2 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \frac{\langle U \rangle}{L} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda c}} \right)^2 \int_{A_\perp} d^2 n |B_z|^2 \quad (121.1)$$

$$\text{Eqs. (119.1), (120.4) e (121.1): } v_E = \pm \frac{c}{\omega} (\omega^2 - \omega_{\lambda c}^2)^{1/2} = v_g$$

notas: Eq. (120.2)  $\oplus$  transf. de dualidade = Eq. (121.1)!

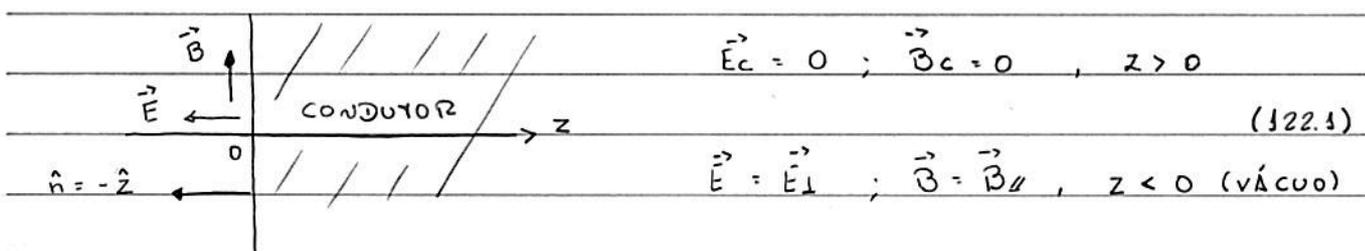
$$\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$$

Atenuação em guias de onda reais.

hipótese : paredes guia de onda = condutor imperfeito ( $\sigma < +\infty$ ):  
 $\sigma$  finito  $\rightarrow$   $\exists$  efeitos dissipativos : atenuação  
fluxo de energia ao longo guia de onda.

inicial : determinação campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  na vizinhança  
interface vacuo - condutor imperfeito (veja Sec. 8.1. Jackson)

Lembrar condutor perfeito :



hipótese : condutor imperfeito , porém  $\sigma \gg 1$

$\hookrightarrow$  Eqs. (122.1) : aproximação ordem 0 campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e  
conexões podem ser obtidas via tratamento

perturbativo : eqs. de Maxwell p/  $0 < z < \delta$  (veja abaixo)

⊕ C.C. (102.1)

considerar : eqs. de Maxwell (meios) p/ condutor:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_c = \sum f \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}_c + \partial_t \vec{B}_c = 0$$

(122.2)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_c = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H}_c - \partial_t \vec{D}_c = \vec{J}_f$$

⊕ Lei de Ohm :  $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}_c$

⊕ relação constitutiva :  $\vec{B}_c = \mu_c \vec{H}_c$

hipótese :  $\vec{E}_c, \vec{H}_c \sim e^{-i\omega t}$

$$\text{Eqs. (122.2)} : \vec{\nabla} \times \vec{E}_c = -i\omega \vec{B}_c = -i\omega\mu_c \vec{H}_c$$

(123.1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}_c \approx \vec{J}_f = \sigma \vec{E}_c$$

$$\text{hipótese : } \frac{\partial \psi}{\partial z} \gg \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} ; \psi = E_c, H_c$$

$$\hookrightarrow \vec{\nabla} \approx \hat{z} \partial_z = -\hat{n} \partial_z$$

$$\text{Eqs. (123.1)} : \vec{E}_c \approx -\frac{1}{\sigma} \hat{n} \times \partial_z \vec{H}_c$$

(123.2)

$$\vec{H}_c \approx \frac{i}{\omega\mu_c} \hat{n} \times \partial_z \vec{E}_c$$

notas:

$$\cdot \hat{n} \cdot \vec{E}_c \approx -\frac{1}{\sigma} \hat{n} \cdot (\hat{n} \times \partial_z \vec{H}_c) = 0 \rightarrow \partial_z (\hat{n} \cdot \vec{E}_c) = \hat{n} \cdot (\partial_z \vec{E}_c) = 0$$

$$\cdot \hat{n} \cdot \vec{H}_c \approx \frac{i}{\omega\mu_c} \hat{n} \cdot (\hat{n} \times \partial_z \vec{E}_c) = 0 \rightarrow \partial_z (\hat{n} \cdot \vec{H}_c) = \hat{n} \cdot (\partial_z \vec{H}_c) = 0$$

$$\cdot \hat{n} \times \vec{H}_c \approx \frac{i}{\omega\mu_c} \hat{n} \times (\hat{n} \times \partial_z \vec{E}_c) \approx \frac{-i}{\omega\mu_c} \partial_z \vec{E}_c$$

$$(\hat{n} \cdot \partial_z \vec{E}_c) \hat{n} - \partial_z \vec{E}_c$$

$$\text{como : } \partial_z \vec{E}_c \approx -\frac{1}{\sigma} \partial_z (\hat{n} \times \partial_z \vec{H}_c) = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\hat{n} \times \vec{H}_c)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\hat{n} \times \vec{H}_c) + 2i \underbrace{\left( \frac{\mu_c \omega \sigma}{2} \right)}_{= \delta^{-2} : \text{"skin depth"}} (\hat{n} \times \vec{H}_c) \approx 0$$

(123.2)

$$\hat{n} \cdot \vec{H}_c \approx 0$$

$$\text{sol. (123.2)} : \vec{H}_c(z, t) = \vec{H}_0 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-z(1-i)/\delta}$$

(123.3)

$$\text{c.c. (102.1)} : \hat{n} \times (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \mu_0 \vec{j} \text{ p/ meios} \rightarrow \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_f$$

p/ vácuo - condutor,  $\hat{n} \times (\vec{H} - \vec{H}_c) = 0$ , pois, nesse caso, imperfeito

$\vec{j} \in$  camada condutor  $0 < z < s$ !

$$\hat{n} \times (\vec{H} - \vec{H}_c) = 0 \rightarrow \vec{H}_c(z=0, t) = \vec{H}_{0, \parallel} = \vec{H}_{\parallel} \in \mathbb{C} \text{ aproximação ordem zero, } \vec{H} \text{ vácuo}$$

$$\hookrightarrow \vec{H}_c(z, t) = \vec{H}_{\parallel} e^{-z/s} e^{iz/s}$$

$\hat{=}$  aproximação

: campos  $\vec{E}_c$  e  $\vec{H}_c$

$$\text{Eq. (123.2)} : \vec{E}_c(z, t) = \frac{1}{\sigma s} (1-i) (\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}) e^{-z(1-i)/s}$$

vizinhança

sup. condutor

(124.1)

notas Eqs. (124.1) :  $\vec{E}_c$  e  $\vec{H}_c \neq 0$  p/  $z < s$ !

$$\text{c.c. (102.1)} : \hat{n} \times (\vec{E} - \vec{E}_c) = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_c(z=0, t) = \frac{1}{\sigma s} (1-i) (\hat{n} \times \vec{H}_{\parallel}) :$$

(124.2)

:  $\hat{=}$  aproximação componente  $\parallel$  campo  $\vec{E}$  vácuo.

notas:

$$\text{p/ interface vácuo - condutor perfeito} : \vec{E}_{\parallel} \times \vec{B}_{\parallel}^* = 0$$

$$\text{" " " " imperfeito} : \vec{E}_{\parallel} \times \vec{B}_{\parallel}^* \neq 0$$

$$\text{Eq. (85.2)} \oplus (124.2) : \text{notas: campos } \vec{E} \text{ e } \vec{B} \text{ vácuo!}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} (\vec{E}_{\parallel} \times \vec{B}_{\parallel}^*)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma s} \text{Re} \left( (1-i) (\hat{n} \times \vec{B}_{\parallel}) \times \vec{B}_{\parallel}^* \right)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \operatorname{Re} \left( (i-1) \hat{n} |\vec{B}_{\perp}|^2 \right) = -\frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} |\vec{B}_{\perp}|^2 (-\hat{n}) \quad (125.1)$$

fluxo de energia:  
vácuo  $\rightarrow$  condutor!

como  $[\vec{S}]$ : energia / área  $\cdot$  tempo

$$\hookrightarrow \frac{d\langle P_{\text{dis}} \rangle}{dA} = -\langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} |\vec{B}_{\perp}|^2 : \text{potência média absorvida pelo condutor} \quad (125.2)$$

de fato, energia absorvida condutor  $\sim$  dissipação ôhmica.

notas: similar vetor de Poynting (85.2):

$$\langle u_{\text{dis}} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{J} \cdot \vec{E}_c) \stackrel{\text{Eq. (124.1)}}{=} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \sigma \cdot \frac{1}{(\sigma \delta)^2} (1-i)(1+i) |\hat{n} \times \vec{H}_c|^2 e^{-2z/\delta} \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{d\langle P_{\text{dis}} \rangle}{dA} = \int_0^{\infty} dz \langle u_{\text{dis}} \rangle = \frac{|\vec{B}_{\perp}|^2}{\sigma \delta^2 \mu_0^2} \int_0^{\infty} dz e^{-2z/\delta}$$

$$= \frac{1}{2\sigma \delta \mu_0^2} |\vec{B}_{\perp}|^2 : \text{Eq. (125.2)}$$

Obs.: exemplo "skin depth",

$$p/\text{ cobre} : \sigma^{-1} = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\hookrightarrow \delta = \left( \frac{2}{\mu_0 \omega \sigma} \right)^{1/2} = \frac{6,52 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{\nu \text{ (Hz)}}} \quad \nu \sim 10^{10} \text{ Hz} \rightarrow \delta \sim 10^{-4} \text{ cm} \quad (\text{micro-ondas})$$

considerar: guia de onda real,

Vimos que, pg. 110:

pr condutor perfeito:  $\kappa_x \in \mathbb{R}$  ou  $\kappa_x$ : imaginário puro;  
pr " imperfeito, temos que:

$$\kappa_x \approx \kappa_x^{(0)} + \alpha_x + i\beta_x$$

$\nearrow$  pr  $\sigma \rightarrow +\infty$        $\searrow$  cte de atenuação

notar:  $e^{i\kappa_x z} \rightarrow e^{i(\kappa_x^{(0)} + \alpha_x)z} e^{-\beta_x z}$

pr guia de ondas, paredes cond. imperfeito, podemos escrever Eq. (117.3) como

$$\langle P(z) \rangle = P_0 e^{-2\beta_x z} \quad : \quad \text{potência média através } A_{\perp} \text{ ao longo guia de onda} \quad (126.1)$$

$$L \rightarrow \frac{d\langle P(z) \rangle}{dz} = -2\beta_x \langle P(z) \rangle \rightarrow \beta_x = -\frac{1}{2} \frac{1}{\langle P(z) \rangle} \frac{d\langle P(z) \rangle}{dz} \quad (126.2)$$

como  $-d\langle P(z) \rangle / dz \sim$  Eq. (125.2), pois

$$- \frac{d\langle P(z) \rangle}{dz} = \oint_{\Gamma} \frac{d\langle P \rangle}{dA} d\ell = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma s} \oint_{\Gamma} |\hat{n} \times \vec{B}|^2 d\ell$$

$\nwarrow$  fronteira  $A_{\perp}$

$$L \rightarrow \beta_x = \frac{1}{2\langle P(z) \rangle} \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma s} \oint_{\Gamma} |\hat{n} \times \vec{B}|^2 d\ell \quad (126.3)$$

próxima etapa: similar seção anterior, vamos determinar  $\beta_x$  em termos  $E_z$  ou  $B_z$ .

(i) modo TM,

$$\hat{n} \times \vec{B} = \hat{n} \times \vec{B}_t + \underbrace{\hat{n} \times \vec{B}_z}_{=0} \stackrel{\text{Eq. (108.1)}}{=} + \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{\kappa} \underbrace{\hat{n} \times (\hat{z} \times \vec{E}_t)}_{(\hat{n} \cdot \vec{E}_t) \hat{z}}$$

$$= \pm \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{\kappa} \cdot \left( \pm i \kappa \right) \frac{1}{r^2} (\hat{n} \cdot \vec{\nabla}_t E_z) \hat{z} = i \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{r^2} \frac{\partial E_z}{\partial n} \hat{z} \quad (127.1)$$

$$L_z - d \langle P \rangle = \frac{1}{2\sigma\delta} \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda,c}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\mu_0^2 \omega_{\lambda,c}^2} \oint_{\Gamma} \left| \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|^2 dl \quad (127.2)$$

podemos escrever:

$$\frac{1}{2\sigma\delta} = \frac{1}{2\sigma} \left( \frac{\mu_c \omega \sigma}{2} \right)^{1/2} = \frac{1}{2\sigma} \left( \frac{\mu_c \omega_{\lambda,c} \sigma}{2} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda,c}} \right)^{1/2} \\ \equiv \delta_\lambda : \text{"skin depth" na freq. de corte } \omega_{\lambda,c}$$

como  $\langle P \rangle$ : Eq. (118.2) :  $\langle P \rangle$  p/ guia de onda; paredes condutoras perfeitas

L> Eqs. (118.2), (126.3) e (127.2) (verifican):

$$\beta_\lambda = \frac{c}{2\sigma\mu_0\delta_\lambda} \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda,c}} \right)^{3/2} \frac{1}{\omega_{\lambda,c} (\omega^2 - \omega_{\lambda,c}^2)^{1/2}} + (I) \quad (127.3)$$

onde

$$(I) = \frac{\oint_{\Gamma} \left| \frac{dE_z}{dn} \right|^2 dl}{\int_{A_\lambda} d^2n |E_z|^2}$$

Eq. (127.3) : dependência explicita  $\beta_\lambda$  em termos frequência  $\omega$ ;  
 p/ detalhes veja Fig. 8.6, Jackson  
 e Fig. 19.11, Zangwill

(ii) modo TE,

$$\hat{n} \times \vec{B} = \hat{n} \times \vec{B}_t + \hat{n} \times \vec{B}_z = \pm \frac{c\kappa}{r^2} (\hat{n} \times \vec{v}_t B_z) + \hat{n} \times \vec{B}_z$$

$$\hookrightarrow |\hat{n} \times \vec{B}|^2 = \frac{\kappa^2}{r^4} |\hat{n} \times \vec{v}_t B_z|^2 + |\vec{B}_z|^2$$

Como:

$$\frac{\kappa^2}{r^4} = \frac{c^4 \kappa^2}{c^4 r^4} = \frac{c^2 (\omega^2 - \omega_{\lambda,c}^2)}{\omega_{\lambda,c}^4} = \frac{c^2 \omega^2}{\omega_{\lambda,c}^4} \left( 1 - \frac{\omega_{\lambda,c}^2}{\omega^2} \right)$$

Eq. (126.3):

$$-\frac{d\langle P \rangle}{dz} = \frac{1}{2\sigma\delta\mu_0^2} \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda,c}} \right)^2 \underbrace{\int_r \frac{c^2}{\omega_{\lambda,c}^2} \left( 1 - \frac{\omega_{\lambda,c}^2}{\omega^2} \right) |\hat{n} \times \vec{v}_t B_z|^2}_{(II)} + \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda,c}} \right)^2 |\vec{B}_z|^2 \quad (128.1)$$

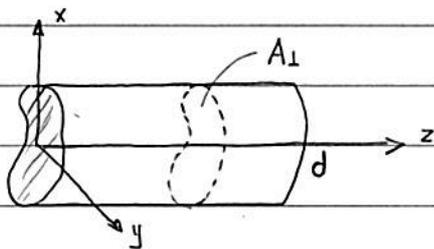
↳ Eqs. (119.1), (126.3) e (128.1) (verificam):

$$\beta_\lambda = \frac{1}{2c\sigma\mu_0\delta\lambda} \left( \frac{\omega}{\omega_{\lambda,c}} \right)^{1/2} \frac{\omega}{(\omega^2 - \omega_{\lambda,c}^2)^{1/2}} \frac{(II)}{\int_{A_\lambda} d\vec{n} |\vec{B}_z|^2} \quad (128.2)$$

Obs.: Veja aplicação 19.1, Zangwill: relação entre ideias guias de onda e aceleradores de partículas; uso componente Ez modo TM p/ aceleração partículas!

· cavidades ressonantes,

considerar: tubo comprimento  $d < +\infty$ , paredes laterais e bases ( $z=0$  e  $d$ ) metálicas (condutor perfeito), interior = vácuo, eixo de simetria  $\parallel$  eixo  $\hat{z}$ , área secção transversal  $A_{\perp}$  arbitrária e etc;



ideia: similar guias de onda, determinar sol. eqs. de Maxwell p/ pto.  $\vec{r} \in$  interior tubo!

· sobre forma solução geral: similar Eqs. (105.1) porém, aqui, é necessário considerar combinação linear ondas propagantes  $e^{\pm ikz} \rightarrow$  ondas estacionárias  $\sim$  condições de contorno

· sobre as condições de contorno: além Eqs. (107.1), i.e.,

$$\vec{E}_z \Big|_{\text{SUP. LATERAL}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial B_z}{\partial n} \Big|_{\text{SUP. LATERAL}} = 0, \quad (129.1)$$

é necessário considerar:

$$(i) \quad \hat{z} \times \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{z=0,d} = \hat{z} \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z) \Big|_{z=0,d} = \hat{z} \times \vec{E}_t \Big|_{z=0,d} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{E}_t(x,y,z=0) = \vec{E}_t(x,y,z=d) = 0 \quad (129.2)$$

$$(ii) \quad \hat{z} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \Big|_{z=0,d} = \hat{z} \cdot (\vec{B}_t + \vec{B}_z) \Big|_{z=0,d} = \hat{z} \cdot \vec{B}_z \Big|_{z=0,d} = 0$$

$$\hookrightarrow B_z(x,y,z=0) = B_z(x,y,z=d) = 0 \quad (129.3)$$

ideia determinação campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  pr cavidades ressonantes:  
 Como Eqs. (108.3) e (108.4) formam um conjunto completo de funções e satisfazem c.c. (129.1), vamos considerar combinações lineares de (108.3)/(108.4), tal que c.c. (129.1) e (129.2) OK!

(i) modo TM,

considerar  $\vec{E} \sim A e^{ikz} + B e^{-ikz}$ , i.e.,

Eq. (108.3):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{i\kappa \vec{\nabla}_t E_z}{r^2} (A e^{ikz} - A' e^{-ikz}) e^{-i\omega t} + \hat{z} E_z (A e^{ikz} + A' e^{-ikz}) e^{-i\omega t}$$

notar sinais!

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{i\mu_0 \epsilon_0 \omega}{r^2} (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z) (A e^{ikz} + A' e^{-ikz}) e^{-i\omega t}$$

onde  $E_z = E_z(x, y)$

notar:  $\vec{E}_t(x, y, z=0) = 0 \rightarrow A = A'$

$\vec{E}_t(x, y, z=d) = 0 \rightarrow \sin(\kappa d) = 0 \rightarrow \kappa d = p\pi, p=0, 1, 2, \dots$

se  $A = 1/2$ , temos que (verifican):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left( \frac{-\kappa (\vec{\nabla}_t E_z) \sin \kappa z}{r^2} + \hat{z} E_z \cos \kappa z \right) e^{-i\omega t} \quad (130.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{i\mu_0 \epsilon_0 \omega}{r^2} (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z) (\cos \kappa z) e^{-i\omega t}$$

onde  $E_z = E_z(x, y)$  e  $\kappa = \frac{p\pi}{d}, p=0, 1, 2, \dots$

notar: c.c. (129.2) OK, pois  $B_z(x, y) = 0$ : de fato, resultado geral, veja Ex. 19.2, Zangwill!

(ii) modo TE,

Eq. (108.4):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{-i\omega}{r^2} (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t B_z) (Ae^{ikz} + A'e^{-ikz}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{i\kappa}{r^2} \vec{\nabla}_t B_z (Ae^{ikz} - A'e^{-ikz}) e^{-i\omega t} + \hat{z} B_z (Ae^{ikz} + A'e^{-ikz}) e^{-i\omega t}$$

onde  $B_z = B_z(x, y)$  notan sinais!

$$\hookrightarrow \vec{E}_t(x, y, z=0) = 0 \rightarrow A = -A'$$

$$\vec{E}_t(x, y, z=d) = 0 \rightarrow \sin(\kappa d) = 0 \rightarrow \kappa d = p\pi, p = 1, 2, \dots$$

se  $A = -i/2$ , temos que (verificar)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{-i\omega}{r^2} (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t B_z) (\sin \kappa z) e^{-i\omega t} \tag{131.1}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\kappa}{r^2} (\vec{\nabla}_t B_z) \cos \kappa z + \hat{z} B_z \sin \kappa z \right) e^{-i\omega t}$$

onde  $B_z = B_z(x, y)$  e  $\kappa = \frac{p\pi}{d}, p = 1, 2, \dots$

$p=0$  excluido pois, nesse caso,  $\vec{E} \rightarrow 0!$

notan:  $\vec{B}(x, y, z=0) = \vec{B}(x, y, z=d) = 0$ , OK c/c.c. (129.2)

novamente:  $E_z = E_z(x, y)$  (modo TM) e  $B_z = B_z(x, y)$  (modo TE) determinados via eq. de Helmholtz 2-D (106.4)  $\oplus$  c.c. (107.1)

$$\text{Eq. (106.2): } r^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - \kappa^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$$

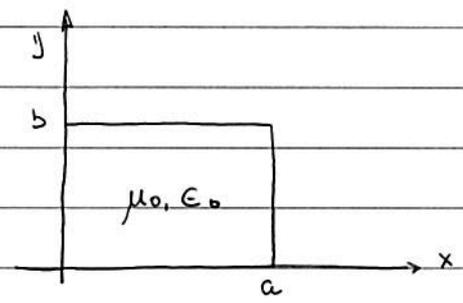
$\hookrightarrow \omega_{\lambda,p} = c \left( \gamma_{\lambda}^2 + \left( \frac{p\pi}{d} \right)^2 \right)^{1/2}$  : frequências de (132.1)

notas  $\nearrow$  autovalores  $\searrow$  ressonância : conjunto discreto

números ! Eq. (106.4),  $\lambda = 1, 2, \dots$  (comparar Fig. pg. 110)  
 $p = 0, 1, 2, \dots$

Eqs. (132.1)  $\oplus$  (130.1) ou (131.1) : modos ressonantes da cavidade !

Ex. 1 : cavidade ressonante, área seção transversal retangular, veja pg. 112



$0 < z < d$   
hipótese :  $a > b$  !

vimos que, Eq. (113.1) :  $\gamma_{m,n}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$

$\oplus$  Eq. (132.1) :  $\omega_{m,n,p} = c\pi \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2} \right)^{1/2}$  : (132.2),

: frequências de ressonância, sendo que os valores de  $m, n, p$  dependem do tipo de modo :

- (i) modo TM,  
 $m, n = 1, 2, \dots$   
 $p = 0, 1, 2, \dots$

$\hookrightarrow \omega_{1,1,0} = c\pi \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{1/2}$  : modo TM menor frequência

(ii) modo TE,

$$m, n = 0, 1, 2, \dots ; \text{ c/ } m+n > 0$$

$$p = 1, 2, \dots$$

modo TE

$$\text{como } a > b \rightarrow \omega_{1,0,1} = c\pi \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2} \right)^{1/2} : \text{ menor frequência.}$$

notas: p/ m.n.p  $\geq 1$ ,  $\omega_{m,n,p}$  é duplamente degenerada:

p/ cada conjunto m,n,p  $\sim$  1 modo TM e 1 modo TE

• sobre campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ ,

p/ modo TM menor frequência, temos que

$$\text{Eq. (130.1)} : \vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{z} E_z(x, y) e^{-i\omega t}$$

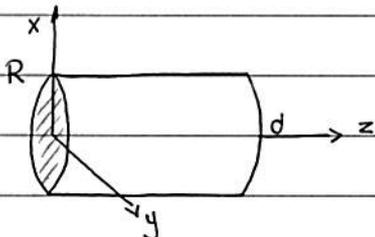
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{i\mu_0 \epsilon_0 \omega_{1,1,0}}_{\frac{r_{1,1}^2}{1/\omega_{1,1,0}}} (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z(x, y)) e^{-i\omega t}$$

$$\text{Eq. (133.1)} : E_z(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Exercício: determinar campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  p/ modo TE

menor frequência.

Ex. 2 : cavidade ressonante, área secção transversal circular, raio  $R$  ;



inicial : sol. eq. de Helmholtz 2-D (106.4) em coordenadas polares (p/ detalhes, veja Sec. 3.7, Jackson)

$$\text{como } \nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} ; \psi = \psi(\rho, \varphi)$$

$$\text{Eq. (106.4)} : \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + r^2 \psi = 0 \quad (134.1)$$

onde  $\psi = E_z$  (modo TM) ou  $B_z$  (modo TE).

sol. (134.1) : via método de separação de variáveis,

hipótese :  $\psi(\rho, \varphi) = u(\rho) \Phi(\varphi)$  em (134.1) :

$$\frac{\Phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{du}{d\rho} \right) + \frac{u}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + r^2 u \Phi = 0 \quad + \frac{1}{u} \Phi$$

$$\hookrightarrow \frac{\rho}{u} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{du}{d\rho} \right) + r^2 \rho^2 = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2 \quad \leftarrow \text{notar sinal !} \quad \text{cte de separação}$$

$$\hookrightarrow \Phi'' + m^2 \Phi = 0 \quad (134.2)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{du}{d\rho} \right) + (r^2 \rho^2 - m^2) u = 0 \quad (134.3)$$

sol. (134.2) :  $\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi}$

(135.1)

como  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \rightarrow m = 0, 1, 2, \dots$

problema radial,

se  $x = rp \rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{dp}{dx} \frac{d}{dp} = \frac{1}{r} \frac{d}{dp} \rightarrow \frac{d}{dp} = r \frac{d}{dx}$

(135.2)

$\hookrightarrow$  Eq. (134.3) :  $\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) u = 0$  : Eq. de Bessel

sol. :  $u(x) = u(rp) = J_m(rp)$  : Função de Bessel de  
1º tipo ordem  $m$

$\hookrightarrow \psi(r, \varphi) = A J_m(rp) e^{\pm im\varphi}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  (135.3)

(i) modo TM,

Eq. (135.3) :  $E_z(r, \varphi) = E_0 J_m(rp) e^{\pm im\varphi}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

c.c. (107.1) :  $E_z(r=R, \varphi) = 0$

$\hookrightarrow J_m(rR) = 0 \rightarrow r_{m,n} R = x_{m,n}$  :  $n$ -ésimo zero  $J_m(x)$

$\hookrightarrow E_z(r, \varphi) = E_0 J_m(r_{m,n} r) e^{\pm im\varphi}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  (135.4)  
 $n = 1, 2, \dots$

Eq. (132.1) :  $\omega_{m,n,p} = c \left( \frac{x_{m,n}^2}{R^2} + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \right)^{1/2}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$   
 $n = 1, 2, \dots$

: freqs. de ressonância  $p = 0, 1, 2, \dots$

notas: modo TM menor frequência:  $m=0, n=1, p=0$   
 pois  $x_{0,1,0} = 2.405 < x_{m,n}$  (veja Sec. 3.7, Jackson)

↳  $\omega_{0,1,0} = 2.405c/R$  : independente parâmetro  $d$ !

campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  p/ modo TM menor frequência,

Eq. (130.1) :  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{z} E_z(\rho) e^{-i\omega t}$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = i \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega}{r_{01}^2} (\hat{z} \times \vec{\nabla}_t E_z(\rho)) e^{-i\omega t}$$

$$\begin{aligned} \hat{z} \times \hat{\rho} \partial_\rho (E_z) &= \hat{\phi} r_{01} \epsilon_0 J_1(r_{01} \rho) \\ &= -\frac{i}{c} \hat{\phi} E_0 J_1(r_{01} \rho) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

(136.1)

Eq. (135.4) :  $E_z(\rho) = E_0 J_0(r_{01} \rho)$

Obs.: lembre as propriedades  $J_m(x)$  :

- $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$
- $2J'_m(x) = J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)$

(ii) modo TE,

Eq. (153.3) :  $B_z(\rho, \phi) = B_0 J_m(\rho, \phi) e^{+im\phi}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

c.c. (107.1) :  $\frac{\partial B_z}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = 0 \rightarrow J'_m(rR) = 0 \rightarrow r_{mn} R = x'_{mn}$

$n$ -ésimo zero  $J'_m(x)$

↳  $B_z(\rho, \phi) = B_0 J_m(r_{mn} \rho) e^{+im\phi}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  (136.2)  
 $n = 1, 2, \dots$

$$\text{Eq. (132.1)} : \omega_{m,n,p} = c \left( \frac{x'_{mn}}{R^2} + \left( \frac{p\pi}{d} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$p = 1, 2, \dots$$

: freqs. de ressonância

modo TE menor frequência:  $m=n=p=1$ , pois

$$x'_{11} = 1.841 < x'_{mn} \text{ (veja Sec. 8.7, Jackson)}$$

$$\hookrightarrow \omega_{1,1,1} = \frac{1.841 c}{R} \left( 1 + 2.932 \frac{R^2}{d^2} \right)^{1/2} : \text{notar dependência}$$

nação  $R/d$ !

campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  p/ modo TE menor frequência,

$$\text{Eq. (133.1)}, \text{ onde } k = \pi/d$$

(137.1)

$$\underline{\underline{B_z(p,\varphi) = B_0 J_1(x'_{11}, p) \cos \varphi}}$$

Obs.: aplicações cavidade ressonante cúbica,  
veja Sec. 19.6.4, Zangwill.

sobre a energia cavidade ressonante,

ideia: vamos verificar que pr cavidade ressonante,

paredes metálicas = condutor perfeito:  $\langle U_E \rangle = \langle U_B \rangle$ !

$$\text{Eq. (119.2)} : \langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2 \\ = \frac{1}{4} \epsilon_0 (|\vec{E}_t|^2 + |\vec{E}_z|^2 + c^2 |\vec{B}_t|^2 + c^2 |\vec{B}_z|^2) \quad (138.1)$$

$\langle u \rangle$  pode ser determinada de modo análogo ao guia de ondas,

veja pgs. 119 - 121.

(i) modo TM,

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 (|\vec{E}_t|^2 + |\vec{E}_z|^2 + c^2 |\vec{B}_t|^2), \text{ pois } B_z = 0$$

$$\text{Eq. (130.1)} : |\vec{E}_t|^2 = \frac{\kappa^2}{r^4} |\vec{V}_t E_z|^2 \sin^2 \kappa z$$

$$|\vec{E}_z|^2 = |E_z|^2 \cos^2 \kappa z$$

$$E_z = E_z(x, y)$$

$$c^2 |\vec{B}_t|^2 = \frac{c^2 \omega^2}{c^4 r^4} |\vec{V}_t E_z|^2 \cos^2 \kappa z ; \quad \kappa = \frac{p\pi}{d}, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

temos que,

$$\langle U_E \rangle = \int_{A_\perp} d^2 n \int_0^d dz \frac{1}{4} \epsilon_0 (|\vec{E}_t|^2 + |E_z|^2)$$

$$\text{como } \int_0^d dz \cos^2 \kappa z = \frac{1}{2} d (1 + \delta_{p,0})$$

$$\hookrightarrow \langle U_E \rangle = \frac{1}{8} \epsilon_0 d (1 + \delta_{p,0}) \int_{A_\perp} d^2 n \left( |E_z|^2 + \frac{\kappa^2}{r^4} |\vec{V}_t E_z|^2 \right)$$

$$\text{Eq. (118.1)} = r^2 |E_z|^2$$

$$\langle U_E \rangle = \frac{1}{8} \epsilon_0 d (1 + \delta p_0) \left( 1 + \left( \frac{p\pi}{d r_s} \right)^2 \right) \int_{A_s} d^2 n |E_z|^2 \quad (139.1)$$

$$\langle U_B \rangle = \int_{A_s} d^2 n \int_0^d dz \frac{1}{4} \epsilon_0 c^2 |\vec{B}_t|^2$$

$$= \frac{1}{8} \epsilon_0 d (1 + \delta p_0) \frac{c^2 \omega^2}{c^4 r^4} \int_{A_s} d^2 n \underbrace{|\vec{v}_t E_z|^2}_{= r^2 |E_z|^2}$$

Como  $\omega^2 = c^2 r^2 + c^2 k^2$  : Eq. (132.1)

$$\hookrightarrow \frac{\omega^2}{c^2 r^2} = 1 + \frac{k^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad \langle U_E \rangle = \langle U_B \rangle !$$

$$\hookrightarrow \langle U \rangle = \langle U_E \rangle + \langle U_B \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_0 d (1 + \delta p_0) \left( 1 + \left( \frac{p\pi}{d r_s} \right)^2 \right) \int_{A_s} d^2 n |E_z|^2 \quad (139.2)$$

Obs.: Eq. (139.2) ou o resultado geral, veja Sec. 19.6.5, Zangwill.

(ii) modo TE.

de modo análogo ao guia de onda, podemos considerar Eq. (139.2) ⊕ transformação de dualidade  $\vec{E} \rightarrow c \vec{B}$ :

$$\langle U \rangle = \frac{1}{4} \underbrace{\epsilon_0 c^2}_{1/\mu_0} \left( 1 + \left( \frac{p\pi}{d r_s} \right)^2 \right) \int_{A_s} d^2 n |B_z|^2, \quad (139.3)$$

pois  $p = 1, 2, \dots$

• Atenuação em cavidades ressonantes,

vimos que, p/ guia de ondas, paredes condutoras imperfeitas:

∃ efeitos dissipativos (dissipação ôhmica)

↳ atenuação (espacial) fluxo de energia ao longo  
guia de onda, Eq. (126.1).

de modo análogo p/ cavidade ressonante:

• se paredes metálicas = condutoras perfeitas

↳ modo frequência  $\omega_{x,p}$  é estacionário;

• se paredes metálicas = condutoras imperfeitas:

∃ efeitos dissipativos → decaimento (temporal) modo  $\omega_{x,p}$ :  
notar analogia níveis atômicos!

• p/ paredes = condutoras imperfeitas:

$\omega_0 \rightarrow \omega_0 + \Delta\omega + i\Gamma/2$   
 ↳ freq. modo p/  $\sigma \rightarrow +\infty$   
 ↳ atenuações devido  $\sigma < +\infty$

Como  $E(t), B(t) \sim e^{-i\omega_0 t} \rightarrow e^{-i(\omega_0 + \Delta\omega)t} e^{-\Gamma t/2}$

↳ energia total  $\langle U \rangle \sim |E|^2, |B|^2 \sim e^{-\Gamma t}$

de modo análogo Eq. (126.3) p/ guia de ondas, podemos escrever

$U(t) = U_0 e^{-\Gamma t}$  : energia armazenada na cavidade  
 ↳ energia inicial " " "

(140.1)

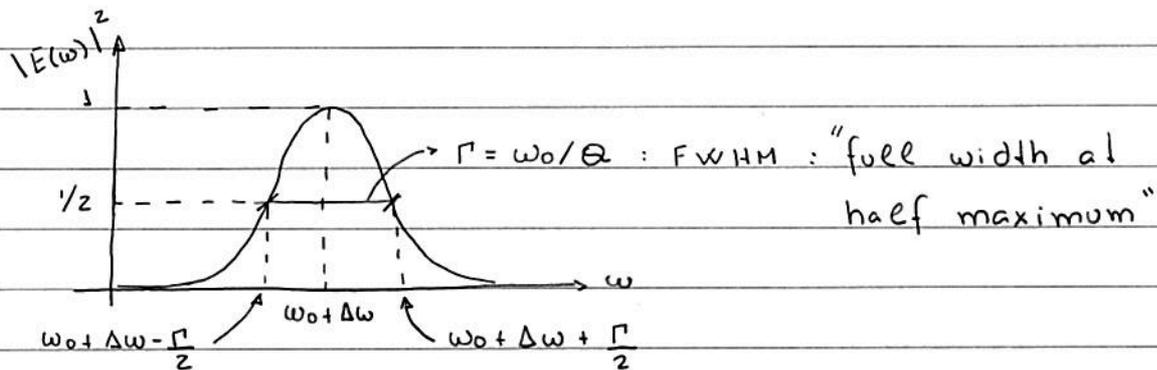
↳  $\frac{dU}{dt} = -\Gamma U$  : potência dissipada

notas: como  $E(t) = E_0 e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)t - \Gamma t/2}$

$$\hookrightarrow E(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} E(t) e^{i\omega t} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} E_0 e^{i(\omega - \omega_0 - \Delta\omega - i\Gamma/2)t}$$

$$\propto \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega) - i\Gamma/2}$$

$\hookrightarrow |E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\Gamma/2)^2}$  : linha de ressonância (Lorentziana)



notas: p/  $\sigma \rightarrow +\infty \rightarrow \Gamma \rightarrow 0$  : linha de ressonância  $\rightarrow$  delta de Dirac!

notas:  $\Gamma$  : medida efeitos dissipativos,  
similar  $\beta_x$  p/ guia de ondas

definição:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} : \text{fator de qualidade cavidade} \quad (141.1)$$

⊕ Eq. (140.1) :  $Q = \frac{\omega_0 \text{ energia armazenada}}{\text{potência dissipada}}$

próxima etapa: determinar  $\Gamma$  ou  $Q$  de modo análogo  
à  $\beta_x$

$$\text{Eq. (140.1)} : \Gamma = -\frac{1}{U} \frac{dU}{dt} \quad (142.1)$$

• p/ paredes = condutor perfeito,  $U$ : Eq. (139.2), modo TM;  
Eq. (139.3), " TE.

•  $-dU/dt \sim \text{Eq. (125.2)}$ :

$$\frac{d\langle P_{\text{disp.}} \rangle}{dA} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} |\hat{n} \times \vec{B}|^2$$

$$\hookrightarrow -\frac{dU}{dt} = \langle P_{\text{disp.}} \rangle = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \int_{\text{SUP. CAVIDADE}} d\hat{n} |\hat{n} \times \vec{B}|^2 \quad \text{def. em Fig. pg. 107}$$

$$\begin{aligned} \text{p/ cavidade} \nearrow &= \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \left( 2 \int_{A_1} d\hat{n} |\hat{z} \times \vec{B}|^2 \Big|_{z=0} + \oint_{\Gamma} d\ell \int_0^d dz |\hat{n} \times \vec{B}|^2 \right) \\ \text{pg. 129} & \qquad \qquad \qquad \text{fronteira } A_1 \longleftarrow \qquad \qquad \qquad (142.2) \end{aligned}$$

(i) modo TM,

Eq. (130.1):

$$\begin{aligned} \cdot \hat{z} \times \vec{B} &= \hat{z} \times \vec{B}_t = \frac{i\mu_0 \epsilon_0 \omega}{r^2} \underbrace{\hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{V}_t E_z)}_{= -\vec{V}_t E_z} (\cos k_z) e^{-i\omega t} \\ &= -\vec{V}_t E_z \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow |\hat{z} \times \vec{B}|^2 \Big|_{z=0} = \frac{\omega^2}{c^4 r^4} |\vec{V}_t E_z|^2$$

$$\begin{aligned} \cdot \hat{n} \times \vec{B} &= \hat{n} \times \vec{B}_t = \frac{i\mu_0 \epsilon_0 \omega}{r^2} \underbrace{\hat{n} \times (\hat{z} \times \vec{V}_t E_z)}_{= \hat{z} \partial E_z / \partial n} (\cos k_z) e^{-i\omega t} \\ &= \hat{z} \partial E_z / \partial n \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow |\hat{n} \times \vec{B}|^2 = \frac{\omega^2}{c^4 r^4} \left| \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|^2 \cos^2 k_z$$

Eq. (142.2) : 
$$-\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \cdot \frac{\omega^2}{c^4 r^4} \cdot$$

$$+ \left( 2 \int_{A_{\perp}} d\Omega \underbrace{|\vec{v}_t E_z|^2}_{r^2 |E_z|^2} + \int_{\Gamma} dl \underbrace{|\frac{\partial E_z}{\partial n}|^2}_{(1 + \delta p_{r,0}) d/lz} \int_0^d dz \cos^2 kz \right)$$

temos que (verifican!),

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \cdot \frac{1}{c^2 r_{\lambda}^2} \left( 1 + \left( \frac{p_{r,0}}{dr_{\lambda}} \right)^2 \right) \cdot$$

$$+ \left( 2 r_{\lambda}^2 \int_{A_{\perp}} d\Omega |E_z|^2 + \frac{1}{2} d (1 + \delta p_{r,0}) \int_{\Gamma} dl \left| \frac{\partial E_z}{\partial n} \right|^2 \right) \quad (143.1)$$

notas : em principio,  $\Gamma$  pode ser determinado a partir Eqs. (139.2), (142.1) e (143.1) !

verifica-se que  $Q$  pode ser escrito como (veja Eq. (8.95), Jackson)

$$Q \sim \frac{\mu_0}{\mu_c} \frac{d}{\delta} \frac{1}{2(1 + 3\lambda \frac{Cd}{4A_{\perp}})} = \frac{\mu_0 (Sd)}{\mu_c (SS)} + (\text{fator geométrico}),$$

perímetro  $\Gamma$

área total superfície cavidade

onde  $3\lambda \sim 1$  !

notas :  $Q \sim$  razão : volume =  $Sd$  ocupado campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  cavidade /  
 " =  $SS$  " " " e " condutor !

(iii) modo TE,

$$\text{Eq. (131.1)} : \hat{z} \times \vec{B} = \hat{z} \times \vec{B}_t = \frac{\kappa}{r^2} (\hat{z} \times \vec{V}_t B_z) \cos \kappa z$$

$$\hookrightarrow \left. |\hat{z} \times \vec{B}|^2 \right|_{z=0} = \frac{\kappa^2}{r^4} |\vec{V}_t B_z|^2$$

$$\hat{n} \times \vec{B} = \frac{\kappa}{r^2} (\hat{n} \times \vec{V}_t B_z) \cos \kappa z + \underbrace{(\hat{n} \times \hat{z})}_{-\hat{z}} B_z \sin \kappa z$$

$$\hookrightarrow |\hat{n} \times \vec{B}|^2 = \frac{\kappa^2}{r^4} |\hat{n} \times \vec{V}_t B_z|^2 \cos^2 \kappa z + |B_z|^2 \sin^2 \kappa z$$

$$\text{Eq. (142.2)} : -\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} + \left( 2 \int_{A_\perp} d\eta \frac{\kappa^2}{r^4} \underbrace{|\vec{V}_t B_z|^2}_{r^2 |B_z|^2} \right)$$

$$+ \int_{\Gamma} d\epsilon \left( \frac{\kappa^2}{r^4} |\hat{n} \times \vec{V}_t B_z|^2 + |B_z|^2 \right) \underbrace{\int_0^d dz \cos^2 \kappa z}_{= d/2}$$

temos que (verifican!),

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \left( 2 \left( \frac{p\pi}{d r_\perp^2} \right)^2 \int_{A_\perp} d\eta |B_z|^2 \right)$$

$$+ \frac{1}{2} d \int_{\Gamma} d\epsilon \left( \left( \frac{p\pi}{d r_\perp^2} \right)^2 |\hat{n} \times \vec{V}_t B_z|^2 + |B_z|^2 \right) \quad (144.1)$$

nesse caso,  $\Gamma$  pode ser, em principio, determinado a partir

Eqs. (139.3), (142.1) e (144.1)!