

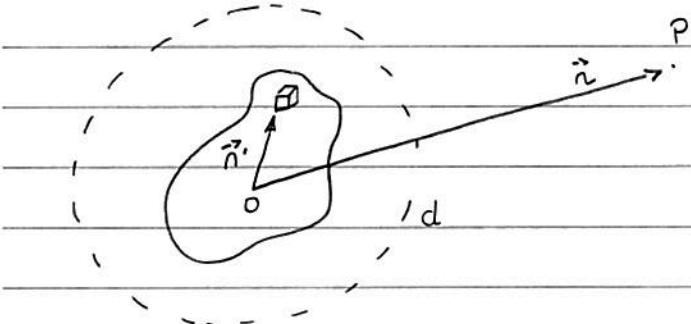
Radiação EM,

Refs.: Secs. 9.3 - 9.4, Jackson; Secs. 20.5 - 20.7, Zangwill

até o momento: descrição propriedades ondas EM no vácuo;
propagação em regiões ilimitadas e limitadas (guias de onda);

próxima etapa: discussão inicial processo emissão de radiação.

consideram uma distribuição localizada de cargas e correntes,
i.e., $p = p(\vec{r}, t) = 0$ e $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$, p/ $r > d$.



hipótese: dependência - t harmônica, i.e.,

$$p(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

(J45.1)

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Obs.: generalização (J45.1) via análise de Fournier!

ideia: determinar campos $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ associados
a (J45.1) p/ $r > d$!

Lembrem: eq. de movimento $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ e $\vec{\phi} = \vec{\phi}(\vec{r}, t)$,
gauge de Lorentz,

$$\text{Eq. (52.2)} : \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

(146.1)

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

Vimos que, solução particular (retardada) da eq. de onda não-homogênea (146.1) é dada por:

$$\text{Eq. (58.2)} : \vec{A}(\vec{n}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 n' \frac{1}{|\vec{n} - \vec{n}'|} \vec{J}(\vec{n}', t - |\vec{n} - \vec{n}'|/c)$$

ou

$$\text{Eq. (56.4)} : \vec{A}(\vec{n}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 n' dt' \frac{\vec{J}(\vec{n}', t')}{|\vec{n} - \vec{n}'|} S(t' - (t - |\vec{n} - \vec{n}'|/c))$$

(146.2)

Lembrem: nesse caso, hipótese: $\nu \rightarrow \infty$, i.e., sistema não é delimitado por fronteiras (superfícies).

Eqs. (145.1) e (146.2) :

$$\vec{A}(\vec{n}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int d^3 n' \frac{\vec{J}(\vec{n}')}{|\vec{n} - \vec{n}'|} e^{i\omega |\vec{n} - \vec{n}'|/c} = \vec{A}(\vec{n}) e^{-i\omega t}$$

(146.3)

$$\text{e } \vec{A}(\vec{n}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 n' \frac{\vec{J}(\vec{n}')}{|\vec{n} - \vec{n}'|} e^{i\kappa |\vec{n} - \vec{n}'|}$$

onde $\kappa = \omega/c$: número de onda.

$$\text{como } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\text{e } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = -i\omega \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} = -\frac{i\omega}{c^2} \vec{E} = -\frac{i\kappa}{c} \vec{E}$$

$$\hookrightarrow \vec{E} = \frac{ic}{\kappa} \vec{\nabla} \times \vec{B}, \text{ p/ } n > d$$

(146.4)

notas: em princípio, Eqs. (146.3) e (146.4)

$$\hookrightarrow \text{determinação de campos } \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (147.1)$$

notas: escalas de comprimento característicos do sistema:

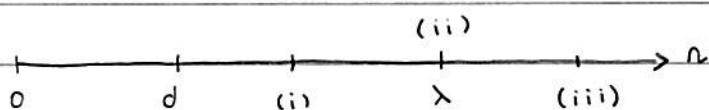
- d : dimensão linear fontes;

- $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$: comprimento de onda da radiação emitida.

hipóteses: $d \ll \lambda$ e $d \ll r$;

(147.2)

vamos considerar 3 possibilidades p/ pto de observação?



(i) $d \ll r \ll \lambda$: região próxima ou estática

(ii) $d \ll r \sim \lambda$: " intermediária ou de indução

(iii) $d \ll \lambda \ll r$: " distante ou de radiação

ideia: considerar hipótese (147.2) e determinar expressões aproximadas p/ Eq. (146.3), em particular, p/ a região de radiação.

notas similaridade discussão expansão multipolar

$\Phi = \Phi(\vec{r})$ e $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$, caso estático;

neste caso, temos apenas $\frac{1}{r}$ comprimento característico: d

inicial: considerações sobre a região próxima,

(i) região próxima (estática),

nesse caso, $n \ll \lambda \rightarrow kn \ll k\lambda = 2\pi \rightarrow kn \ll 1$

$$\hookrightarrow e^{ik|\vec{n} - \vec{n}'|} \approx 1$$

(148.1)

$$\text{Eq. (146.3)} : \vec{A}(\vec{n}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3n' \vec{j}(\vec{n}') \quad : \text{similar caso estático,}$$

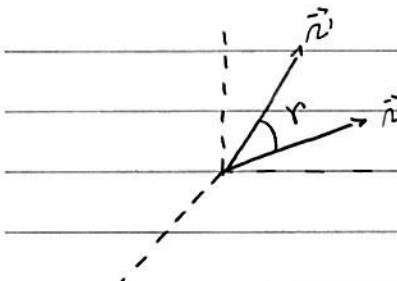
Eq. (38.1)

(148.2)

Lembra Eq. (23.3) :

$$\frac{1}{|\vec{n} - \vec{n}'|} = \sum_{l>0} \frac{n'^l}{n^{l+1}} P_l(\cos r) \quad ; n' < n$$

$$= 4\pi \sum_{l>0} \sum_{m=-l}^{l^2} \frac{1}{2l+1} \frac{n'^l}{n^{l+1}} Y_m^*(\theta', \varphi') Y_m(\theta, \varphi)$$



em (148.2) :

$$\vec{A}(\vec{n}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} Y_m(\theta, \varphi) \int d^3n' n'^l \vec{j}(\vec{n}') Y_m^*(\theta', \varphi') : \quad (148.3)$$

: potencial vetor região próxima,
similar caso estático

(ii) região distante (radiação).

Nesse caso, $R \gg \lambda \rightarrow kR \gg 1$

$$\hookrightarrow |\vec{n} - \vec{n}'| = (n^2 + n'^2 - 2\vec{n} \cdot \vec{n}')^{1/2} \approx n \left(1 - 2\vec{n} \cdot \vec{n}' / n^2 \right)^{1/2} \approx n - \hat{n} \cdot \vec{n}'$$

$$\hookrightarrow e^{ik|\vec{n} - \vec{n}'|} \approx e^{ikn} e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{n}'} ; \quad \hat{n} = \hat{n}' \quad (149.1.0)$$

$$\hookrightarrow |\vec{n} - \vec{n}'|^{-3} \approx 1/n$$

$$\text{Eq. (146.3)} : \vec{A}(\vec{n}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \underbrace{\int d^3 n' \vec{j}(\vec{n}') e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{n}'}}_{\equiv \vec{F}_k(\theta, \varphi) = \vec{F}_k(\hat{n})} : \quad (149.1)$$

Onda esférica!

$\hookrightarrow k$ associados direção $\hat{n} = \hat{n}'$

: potencial vetor para região de radiação

Verifica-se que (veja abaixo), Eqs. (146.4) :

$$\vec{B}(\vec{n}) = ik\hat{n} \times \vec{A}(\vec{n}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \hat{n} \times \vec{F}_k(\hat{n}) : \quad (149.2)$$

$$\vec{E}(\vec{n}) = -c\hat{n} \times \vec{B}(\vec{n}) = -\frac{ikc\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{F}_k(\hat{n}))$$

: campos \vec{E} e \vec{B} para região de radiação

notam: \vec{E} e \vec{B} fora direção $\hat{n} = \hat{n}'$;

$$\therefore E \sim B \sim 1/n .$$



\hat{n} : componen

Fig. pg. 84

Lembra: dependência - t é harmônica, Eq. (147.1) !

sobre o vetor de Poynting Eq. (85.2),

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0} c \operatorname{Re}(\vec{B}^* \times (\hat{n} \times \vec{B}))$$

$$\stackrel{\text{Eq. (149.2) } \leftarrow}{=} \underbrace{|\vec{B}|^2 \hat{n}}_{=0} - (\hat{n} \cdot \vec{B}^*) \vec{B}$$

$$= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{n} = \frac{c \kappa^2}{2\mu_0} |\hat{n} \times \vec{A}|^2 \hat{n}$$

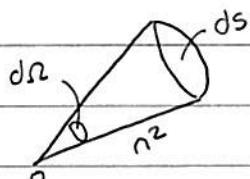
Eq. (149.3)

$$= \frac{\mu_0 c \kappa^2}{32\pi^2 n^2} |\hat{n} \times \vec{F}_K(\hat{n})|^2 \hat{n} \quad (150.1)$$

notar: sentido $\langle \vec{S} \rangle : + \hat{n}$ e $\langle S \rangle \sim 1/n^2$

como $[\vec{S}]$: energia/área·tempo

e $dS = n^2 d\Omega$; $d\Omega = \sin\theta d\phi d\varphi$: ângulo sólido



média temporal

$\hookrightarrow \frac{d\langle P \rangle}{dS} = \hat{n} \cdot \langle \vec{S} \rangle \rightarrow \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = n^2 \hat{n} \cdot \langle \vec{S} \rangle$: potência irradiada/ângulo sólido

(150.2)

Eqs. (150.1) e (150.2):

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c \kappa^2}{32\pi} |\hat{n} \times \vec{F}_K(\hat{n})|^2 = \frac{\mu_0 w^2}{32\pi^2 c} |\hat{n} \times \vec{F}_K(\hat{n})|^2: \quad (150.3)$$

: distribuição angular radiação!

próxima etapa: considerações sobre $\vec{F}_K(\hat{n})$

notar: $k\hat{n} \cdot \vec{n}' \sim \frac{\vec{n}'}{\lambda} \sim \frac{d}{\lambda} \ll 1$

$$\hookrightarrow e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{n}'} = \sum_{n>0} \frac{1}{n!} (-ik\hat{n} \cdot \vec{n}')^n$$

em (149.1):

$$\vec{A}(\vec{n}) \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \underbrace{\sum_{n>0} \frac{(-ik)^n}{n!} \int d^3 n' \vec{j}(\vec{n}') (\hat{n} \cdot \vec{n}')^n}_{= \vec{F}_k(\hat{n})} \quad (151.1)$$

vamos verificá-las Eqs. (149.2).

$$\begin{aligned} \text{Eq. (149.1)}: \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{e^{ikn}}{n} \right) \times \vec{F}_k(\hat{n}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \vec{\nabla} \times \vec{F}_k(\hat{n}) \\ &= \hat{n} e^{ikn} \left(ik - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(\vec{n}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \left((\hat{n} \times \vec{F}_k(\hat{n})) \left(ik - \frac{1}{n} \right) + \vec{\nabla} \times \vec{F}_k(\hat{n}) \right)$$

$$\approx \frac{ik\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \hat{n} \times \vec{F}_k(\hat{n}) + O(1/n^2),$$

pois $\vec{\nabla} \times \vec{F}_k(\theta, \varphi) \sim 1/n$ (veja expressão $\vec{\nabla} \times$ em coord. esféricas)

$$\begin{aligned} \text{Eq. (146.4)}: \quad \vec{E} &= \frac{ic}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\mu_0 c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{e^{ikn}}{n} (\hat{n} \times \vec{F}_k(\hat{n})) \right) \\ &\quad \text{(I)} \end{aligned}$$

notar:

$$\begin{aligned} \text{(I)} &= \vec{\nabla} \times \left(\frac{e^{ikn}}{n^2} (\vec{n} \times \vec{F}) \right) = \underbrace{\vec{\nabla} \left(\frac{e^{ikn}}{n^2} \right)}_{\text{(II)}} \times (\vec{n} \times \vec{F}) + \underbrace{\frac{e^{ikn}}{n^2} \vec{\nabla} \times (\vec{n} \times \vec{F})}_{\text{(III)}} \end{aligned}$$

como (verificar)

$$(II) = \frac{e^{ikn}}{n^2} \left(ik - \frac{2}{n} \right) \hat{n} \in$$

$$(III) = \underbrace{\hat{n}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})}_{\sim 1/n} - \underbrace{\vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \hat{n})}_3 + \underbrace{(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \hat{n}}_{\vec{F}} - \underbrace{(\hat{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}}_{\sim 1/n} \approx -2 \vec{F}$$

$$\hookrightarrow \vec{E}(\hat{n}) \approx -\frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n^2} \left(-2 \vec{F}_n + \left(ik - \frac{2}{n} \right) \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{F}_n) \right) + O(1/n^2)$$

$$\approx -\frac{ikc\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{F}_n(\hat{n})) + O(1/n^2)$$

(iii) região intermediária (indução)

nesse caso, as aproximações (148.1) e (149.1.0) não podem ser aplicadas \rightarrow não é possível determinar expressões simples p/ campos \vec{E} e \vec{B} como nos casos (i) e (ii)
(veja Eqs. (9.11) e (9.12), Jackson)

· próxima etapa: considerar apenas região de radiação e discutir termos $n=0$ e $n=1$, expansão (153.1)

- considerações sobre a função $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$,
 (veja Sec. 9.6, Jackson) $| \vec{r} - \vec{r}' |$

Assim como $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$: função de Green, eq.

de Poisson (veja Eq. (12.3)) admite uma expansão em harmônicos esféricos (Eq. (23.3)), verifica-se que

$$G(\vec{n}, \vec{n}') = \frac{e^{i\vec{k} \cdot |\vec{n} - \vec{n}'|}}{|\vec{n} - \vec{n}'|} : \quad (152.1)$$

função de Green eq. de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + \kappa^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (152.2)$$

pode ser escrita como:

$$\frac{e^{i\mathbf{k}(\vec{n}-\vec{n}')}}{|\vec{n}-\vec{n}'|} = 4\pi i \mathbf{k} \sum_{l>0} \sum_{m=-a}^l j_{\mathbf{c}}(k n_c) h_e^{(1)}(kn_s) Y_m^*(\theta; \varphi') Y_m(\theta, \varphi)$$

onde : $\pi_< = \min(\pi, \pi')$ e $\pi_> = \max(\pi, \pi')$;

$$J_{\nu}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} J_{\nu+1/2}(x) : \text{ função de Bessel esférica,}$$

onde em ν

$$N_{\ell}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} N_{\ell+1/2}(x) : \quad " \quad " \quad " \quad Neumann \quad " .$$

$$h_e^{(1)}(x) = f_e(x) + i \pi e(x) : " " " \text{Hankel} " ,$$

notar: Eq. (146.3) e Eq. (152.3) : expansão potencial velha
 $\tilde{A}(\vec{r})$ válida p/ regiões (i) - (iii)

vamos considerar comportamento assintótico de $j_e(x)$ e
 $h_e^{(1)}(x)$ e derivar Eqs. (148.2) e (149.1)

considerar: $\bar{n} < n'$ e $\bar{n} > n$: ok negócios (i) e (iii)

(ii) negação próxima (estática),

$$kn \ll 1 \quad \text{e} \quad kn' \sim \frac{d}{\lambda} \ll 1$$

$$\text{como } j_e(x) \approx \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} \quad \text{e} \quad h_e^{(1)}(x) \approx -i \frac{(2\ell+1)!!}{x^{\ell+1}}, \quad x \ll 1$$

↳ Eq. (152.3) :

$$\frac{e^{ik|\vec{n}-\vec{n}'|}}{|\vec{n}-\vec{n}'|} \approx \sum_{\ell,m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \cdot \frac{n'^\ell}{n^{\ell+1}} Y_m^*(\theta',\varphi') Y_m(\theta,\varphi) \quad (152.4)$$

notar: Eqs. (146.3) ⊕ (152.4) = Eq. (148.3) !

(iii) negação distante (radiação),

$$kn \gg 1$$

como $h_e^{(1)}(x) \rightarrow (-i)^{\ell+1} e^{ix}/x$ cm (152.3) :

$$\frac{e^{ik|\vec{n}-\vec{n}'|}}{|\vec{n}-\vec{n}'|} \approx \frac{e^{ikn}}{n} \underbrace{\sum_{\ell,m} 4\pi (-i)^\ell j_e(kn') Y_m^*(\theta',\varphi') Y_m(\theta,\varphi)}_{= e^{ik\hat{n} \cdot \vec{n}'}} \quad (152.5)$$

$$= e^{ik\hat{n} \cdot \vec{n}'} \quad (\text{veja P-12.4.7, Anfken})$$

notar: Eqs. (146.3) ⊕ (152.5) = Eq. (149.1) !

• Radiação de dipolo elétrico,

vamos considerar o termo $n=0$ da expansão (151.1),

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' \vec{J}(r') \cdot \frac{\hat{F}_k(r)}{r} e^{ikr}$$

Onde

(153.1)

$$\hat{F}_k(r) = \int d^3 r' \vec{J}(r')$$

como (identidade): $\vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{J}) = n_i (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) + \vec{J} \cdot (\underbrace{\vec{\nabla} n_i}_{=\hat{e}_i})$

e eq. de continuidade (29.3):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} - i\omega \rho = 0$$

$$\hookrightarrow \int d^3 r J_i = - \int d^3 r i \omega n_i \rho + \int d^3 r \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{J})$$

$$= \oint_S n_i \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0, \text{ pois } \lim_{r \rightarrow +\infty} \vec{J} = 0$$

$$\hookrightarrow \int d^3 r \vec{J} = -i\omega \underbrace{\int d^3 r n_i \rho}_{=\vec{p}} = -i\omega \vec{p}$$

$= \vec{p}$: momento de dipolo elétrico
da distribuição de cargas!

Eq. (153.1): $\hat{F}_k(r) = -i\omega \vec{p}$

(153.2)

e $\vec{A}(\vec{r}) = -i\mu_0 \omega \frac{\vec{p} e^{ikr}}{r}$: radiação de dipolo elétrico

(153.3)

Obs.: Lembrar Eq. (145.3):

$$p(\vec{r}, t) = p(\vec{r}) e^{-i\omega t} \rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p} e^{-i\omega t} !$$

Eq. (153.3) : primeiro termo expansão $\vec{A}(\vec{n})$ pr negação de radiação e momento do dipolo \vec{p} da distribuição de cargas.

notar: Eqs. (149.2) \oplus (153.2) :

$$\vec{B}(\vec{n}) = \frac{\kappa \omega \mu_0}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{p}) \frac{e^{ikn}}{n} = \frac{c \kappa^2 \mu_0}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{p}) \frac{e^{ikn}}{n}$$

(154.1)

$$\vec{E}(\vec{n}) = \frac{\kappa \omega \mu_0}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} \frac{e^{ikn}}{n} = \frac{c^2 \kappa^2 \mu_0}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} \frac{e^{ikn}}{n}$$

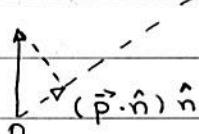
Eqs. (154.1) : campos \vec{E} e \vec{B} , radiação de dipolo elétrico, pr negação de radiação;

E e B $\propto 1/n$; $\propto \kappa^2$ ou ω^2

- polarização é onda \sim campo elétrico \vec{E} :

$$\hat{E} \sim (\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} = \vec{p} - (\vec{p} \cdot \hat{n}) \hat{n} \quad \text{em plano definido}$$

pon \vec{p} e \hat{n} .



$$\text{Ex. : } \vec{p}(t) = \vec{p} e^{-i\omega t} = p \hat{z} e^{-i\omega t}$$

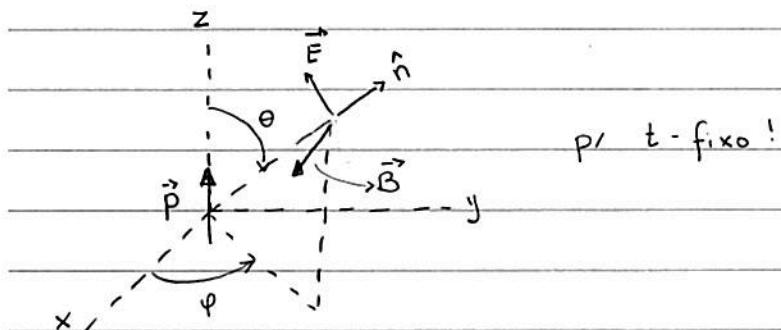
$$\text{como } \hat{n} \times \hat{z} = \hat{n} \times \hat{z} = -\hat{\phi} \sin \theta \quad \text{e} \quad (\hat{n} \times \hat{z}) \times \hat{n} = -\sin \theta \hat{\phi} \times \hat{n}$$

↑ Eq. (26.1)

$$= -\hat{\theta} \sin \theta$$

(154.2)

$$\hookrightarrow \text{Eq. (154.1)} : \vec{B}(\vec{n}) = -\frac{c \kappa^2 \mu_0 p \sin \theta \hat{\phi}}{4\pi} \quad \text{e} \quad \vec{E}(\vec{n}) = -\frac{c^2 \kappa^2 \mu_0 p \sin \theta \hat{\theta}}{4\pi}$$



p/ t - fixo!

notar: Eq. (150.3) e (153.2):

se todas as componentes de p-vec têm a mesma fase, temos que

$$|\hat{n} \times \vec{p}|^2 = (\hat{n} \times \vec{p}^*) \cdot (\hat{n} \times \vec{p}) = \hat{n} \cdot (\underbrace{\vec{p} \times (\hat{n} \times \vec{p}^*)}_{\vec{p}^* \perp \hat{n}}) = |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta$$

$\vec{p} \perp \hat{n}$!

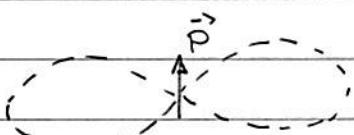
$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta : \text{média temporal}$$

potência irradiada / dΩ ~

~ distribuição angular radiação!

notar: $d\langle P \rangle / d\Omega \text{ MAX} : \theta = \pi/2 \text{ ou } \hat{n} \perp \vec{p}$

" MIN = 0: $\theta = 0$ ou $\hat{n} \parallel \vec{p}$



: característica radiação
de dipolo elétrico

Eq. (155.1) permite determinar a radiação total emitida,

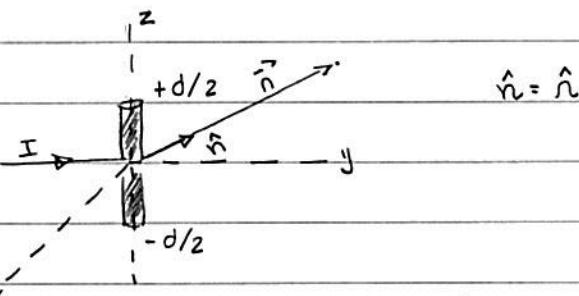
$$\langle P \rangle = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{p}|^2}{12\pi c} \quad (155.2)$$

notar: $\langle P_{\text{dip}} \rangle \sim \omega^4$!

Ex. 1: considerar antena, comprimento d de conexão

$$I(z, t) = I(z) e^{-i\omega t} ; \quad I(z) = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d} \right) ;$$

determinar a radiação de dipolo elétrico do sistema.



ideia: determinar momento de dipolo \vec{p} do sistema!

no sistema 1-D, eq. de continuidade (29.3) assume a forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \partial_t p = 0 \rightarrow \frac{dI}{dz} + \partial_t \lambda = \frac{dI}{dz} - i\omega \lambda = 0$$

onde $\lambda(z, t) = \lambda(z) e^{-i\omega t}$: densidade linear de carga!

$$\hookrightarrow \lambda(z) = -i \frac{dI}{\omega dz} = \frac{2iI_0}{\omega d} \frac{z}{|z|}$$

$$\hookrightarrow \vec{p} = \int_{-d/2}^{+d/2} d^3 n \vec{n} p(\vec{n}) \rightarrow \int_{-d/2}^{+d/2} dz z \hat{z} \lambda(z) = \frac{i I_0 d}{2\omega} \hat{z} \quad \text{verificam!}$$

temos que

$$\text{Eq. (155.1)} : \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c}{128\pi^2} \frac{I_0^2 (\kappa d)^2 \sin^2 \theta}{\kappa}$$

- "parâmetro pequeno!" (156.1)

$$\text{Eq. (155.2)} : \langle P \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2 (\kappa d)^2}{48\pi}$$

notar: Eq. (156.1) pode ser escrita como

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 c (\kappa d)^2}{24\pi} \right) I_0^2$$

$\equiv R_{RAD}$: resistência de radiação

Exercício: verificam que $[R_{RAD}]$: ohm;

$$\text{`` `` `` } R_{RAD} \approx 5(\kappa d)^2 \Omega !$$

Radiação de dipolo magnético e quadrupolo elétrico,

vamos considerar o termo $n=1$ da expansão (151.1).

$$\vec{A}(\hat{n}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\hat{n}}}{r} (-i\vec{k}) \underbrace{\int d^3 n' (\hat{n} \cdot \vec{n}') \vec{J}(\vec{n}')}_{= \vec{F}_k(\hat{n})} \quad (157.1)$$

verifica-se que $\vec{F}_k(\hat{n})$ pode ser separado em dois termos distintos; podemos escrever a componente i de $\vec{F}_k(\hat{n})$ como

$$\vec{F}_{k,i}(\hat{n}) = -ik \underbrace{\int d^3 n' (\hat{n} \cdot \vec{n}') J_i(\vec{n}')}_{\sum_j n_j n'_j} = -ik \sum_j \underbrace{\int d^3 n' J_i(\vec{n}') n'_j}_{\equiv R_{ij}} n_j \quad (157.2)$$

notar: R_{ij} : tensão ondêm?

$$\text{como } J_{inj} = \frac{1}{2} (J_{inj} + J_{inj}) + \frac{1}{2} J_{jni} - \frac{1}{2} J_{jni}$$

$$= \frac{1}{2} (J_{inj} + J_{jni}) + \frac{1}{2} (J_{inj} - J_{jni})$$

$$\hookrightarrow R_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3n' (\bar{J}_i n'_j + \bar{J}_j n'_i) + \frac{1}{2} \int d^3n' (\bar{J}_i n'_j - \bar{J}_j n'_i); J_i = J_i(\vec{n})$$

$$\stackrel{(S)}{=} R_{ij} : \text{tensor simétrico} \quad \stackrel{(A)}{=} R_{ij} : \text{tensor anti-simétrico}$$

verificase ~ momento de
que quadrupolo elétrico ~ momento de
dipolo magnético

(ii) termo anti-simétrico $R_{ij}^{(A)}$,

$$\text{notar: } E_{kij} E_{kem} J_{erm} = (S_{ik} S_{jm} - S_{im} S_{jk}) J_{erm} \\ = J_i n_j - J_j n_i$$

$$\hookrightarrow R_{ij}^{(A)} = E_{kij} \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3n' E_{kem} J_e(\vec{n}) n_m}_{-(\vec{n} \times \vec{J})_e} = -E_{ijk} \cancel{m_e} \xrightarrow{\substack{\text{componente } \cancel{m_e} \\ \text{momento de dipolo magnético, Eq. (39.2)}}}$$

$$\text{Eq. (157.2): } \vec{F}_{k,\cancel{m}}(\hat{n}) = -i \cancel{k} R_{ij} n_j = i \cancel{k} E_{ijk} n_j m_k = i \cancel{k} (\hat{n} \times \vec{m})_i$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_{k,\cancel{m}}^{(A)}(\hat{n}) = i \cancel{k} (\hat{n} \times \vec{m}) \quad (158.1)$$

$$\text{Eq. (157.1): } \vec{A}(\vec{n}) = \frac{i \cancel{k} \mu_0}{4 \pi} (\hat{n} \times \vec{m}) \frac{e^{i \cancel{k} n}}{n} : \text{nadiacão de dipolo magnético}$$

(158.2)

Oss.: lembrem Eq. (145.1):

$$\vec{J}(\vec{n}, t) = \vec{J}(\vec{n}) e^{-i \omega t} \rightarrow \vec{m}(t) = \vec{m} e^{-i \omega t} !$$

Eqs. (149.2) e (158.1): campos \vec{E} e \vec{B} p/ negação de nadiacão
~ nadiacão de dipolo magnético.

$$\vec{B}^{(A)}(\vec{n}) = \frac{\mu_0 \kappa^2}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{m}) \times \hat{n} e^{i\kappa n}$$

(159.1)

$$\vec{E}^{(A)}(\vec{n}) = -\frac{c\mu_0 \kappa^2}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{m}) \frac{e^{i\kappa n}}{n}$$

notar: E e B $\propto 1/n$; $\propto \kappa^2$ ou ω^2

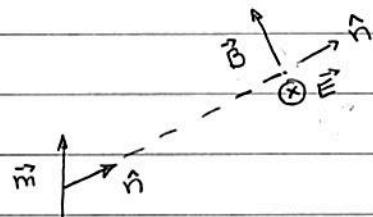
comparar Eqs. (154.1) e (159.1): temos que

$$\vec{B}_{\text{DIP. MAG}} = \gamma c \vec{E}_{\text{DIP. EL}} \oplus \vec{p} \rightarrow \vec{m}/c$$

$$\vec{E}_{\text{DIP. MAG}} = -c \vec{B}_{\text{DIP. EL}} \oplus \vec{p} \rightarrow \vec{m}/c \quad (159.2)$$

- polarização é da onda ~ campo elétrico \vec{E} :

$\vec{E} \sim (\hat{n} \times \vec{m}) \rightarrow \vec{E}$ h pleno definido por \hat{n} e \vec{m} .



: comparar Fig. pg. 154

$$\text{Ex.: } \vec{m}(t) = \vec{m} e^{-i\omega t} = m \hat{z} e^{-i\omega t}$$

$$\text{Eqs. (154.2) e (159.2): } \vec{B}^{(A)}(\vec{n}) = -\frac{\mu_0 \kappa^2}{4\pi} m \sin\theta \hat{\theta} \quad (159.3)$$

$$\vec{E}^{(A)}(\vec{n}) = \frac{c\mu_0 \kappa^2}{4\pi} m \sin\theta \hat{\phi}$$

Eqs. (155.1) e (159.2):

$$\frac{d\langle P^{(A)} \rangle}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2 \sin^2\theta}{32\pi^2 C^3} : \begin{array}{l} \text{característica} \\ \text{nadiacão similar} \\ \text{dipolo elétrônico} \end{array} \quad (159.4)$$

Eq. (155.2) e (159.2) : radiação total emitida,

$$\langle P^{(A)} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 |\vec{m}|^2}{12 \pi c^3} \quad (160.1)$$

notar: $\frac{\langle P_{\text{Dip. MAG}} \rangle}{\langle P_{\text{Dip. EL}} \rangle} = \frac{1}{c^2} \frac{|\vec{m}|^2}{|\vec{p}|^2} \sim \left(\frac{\vec{J}}{c p}\right)^2 \sim \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \ll 1$ p/ radiação
"long wavelength"

eq. de continuidade (29.3) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \partial_t p \rightarrow J/L \sim \omega p$$

L , comprimento

característico sistema

(ii) tensor simétrico $R_{ij}^{(s)}$,

$$\text{como } \vec{\nabla} \cdot (\eta_i \eta_j \vec{J}) = \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{J})(\eta_i \eta_j)}_{= i \omega p} + \underbrace{\vec{J} \cdot \vec{\nabla}(\eta_i \eta_j)}_{= \eta_i \hat{e}_j + \eta_j \hat{e}_i}$$

$$= i \omega p(\vec{n}) \eta_i \eta_j + J_i(\vec{n}) \eta_j + J_j(\vec{n}) \eta_i$$

$$\hookrightarrow R_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2} \int d^3 n' (-i) \omega p(\vec{n}') \eta'_i \eta'_j + \underbrace{\int d^3 n' \vec{\nabla}' (\eta'_i \eta'_j \vec{J})}_{\int_S \eta'_i \eta'_j \vec{J}(\vec{n}') \cdot d\vec{s}' - p / \vec{J}}$$

$$\int_S \eta'_i \eta'_j \vec{J}(\vec{n}') \cdot d\vec{s}' - p / \vec{J} \rightarrow 0 \quad \text{localizada!}$$

$$\hookrightarrow R_{ij}^{(s)} = - \frac{i \omega}{2} \int d^3 n' p \eta'_i \eta'_j$$

Lembra: tensor momento de quadrupolo elétrico, Eq. (24.3) :

$$Q_{ij} = \int d^3 n (3\eta_i \eta_j - n^2 \delta_{ij}) p(\vec{n})$$

$$\hookrightarrow R_{ij}^{(s)} = -\frac{i\omega}{6} \left(\int d^3 n' (3n_i n'_j - n'^2 \delta_{ij}) p(\vec{n}') + n'^2 \delta_{ij} p(\vec{n}') \right)$$

$$= -\frac{i\omega}{6} \left(Q_{ij} + \delta_{ij} \underbrace{\int d^3 n' n'^2 p(\vec{n}')}_{\Sigma} \right)$$

$$\text{Eq. (157.2)} : F_{ik}^{(s)}(\hat{n}) = -ik R_{ij}^{(s)} n_j = -\frac{k\omega}{6} (Q_{ij} + \delta_{ij} \Sigma) n_j$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_k(\hat{n}) = -\frac{k\omega}{6} (\hat{n} \cdot \vec{Q} + \Sigma \hat{n}) \quad (161.1)$$

$$\text{Eq. (157.1)} : \vec{A}(\vec{n}) = -\frac{k\omega \mu_0}{24\pi} (\hat{n} \cdot \vec{Q} + \Sigma \hat{n}) \frac{e^{ikn}}{n} :$$

: nadição de quadrupolo elétrico

Eqs. (149.2) e (161.1) :

$$\vec{B}^{(s)}(\vec{n}) = -\frac{ic^2 k^3 \mu_0}{24\pi} \hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{Q}) \frac{e^{ikn}}{n} : \propto \kappa^3 \text{ ou } \omega^3$$

(161.3)

$$\vec{E}^{(s)}(\vec{n}) = \frac{ic^2 k^3 \mu_0}{24\pi} \hat{n} \times (\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{Q})) \frac{e^{ikn}}{n}$$

Obs.: polarização onda $\hat{E} \sim \hat{n} \times (\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{Q}))$!

Sobre a potência média emitida,

Eqs. (150.3) e (161.3) :

$$\frac{d\langle P^{(s)} \rangle}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^6}{32\pi \cdot 36 \cdot c^3} |\hat{n} \times (\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{Q}))|^2 \quad (161.4)$$

verifica-se que (veja abaixo):

$$\langle P^{(s)} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^6}{1440 \pi C^3} \sum_{ij} |Q_{ij}|^2 : \text{radiação total emitida} \quad (162.1)$$

notar: $\langle P_{\text{QUAD.}} \rangle \sim \omega^6$;

$\hat{=}$

$$\langle P_{\text{QUAD.}} \rangle \sim \omega^2 \sum_{ij} |Q_{ij}|^2 \sim \left(\frac{\omega L^2 p}{c^2 |\vec{p}|} \right)^2 \sim \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 :$$

: similar Eq. (160.2)!

pois $|\vec{p}| \sim L_p$ e $|Q_{ij}| \sim L_p^2$.

Ex.: considerar sistema cujo tensor momento de quadrupolo elétrico é dado por

$$Q_{ij}(t) = Q_{ij} e^{i\omega t} ; \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_0 \in \mathbb{R}, \\ Q_{33} = Q_0 ; \quad Q_{ij} = 0, i \neq j.$$

(p/ caso estático, veja exemplo 2.4, Manion (dois dipolos alinhados e aplicação 4.2, Zangwill)).

nesse caso, temos que (veja Eq. (163.1))

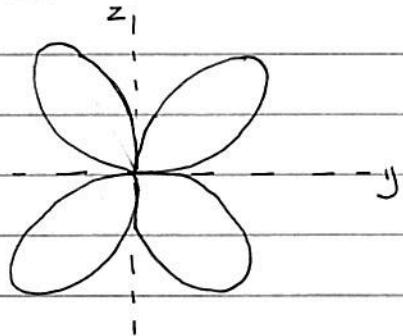
$$1 \hat{n} \times (\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{Q}))|^2 = \sum_i |Q_{ii}|^2 n_i^2 - \sum_{ij} Q_{ii}^* Q_{jj} n_i^2 n_j^2$$

$$= \frac{1}{4} Q_0^2 (n_1^2 + n_2^2 + 4n_3^2) - \frac{1}{2} Q_0 (-n_1^2 - n_2^2 + 2n_3^2) \cdot \frac{1}{2} Q_0 (-n_1^2 - n_2^2 + 2n_3^2)$$

$$= \frac{1}{4} Q_0^2 \left(\underbrace{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}_{3} + 3n_3^2 \right) - \frac{Q_0^2}{4} (-1 + 3n_3^2)(-1 + 3n_3^2)$$

$$= \frac{9}{4} Q_0^2 n_3^2 (1 - n_3^2) = \frac{9}{4} Q_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\text{Eq. (161.4)} : d\langle P_{\text{QUAD.}} \rangle = \frac{\mu_0 w^6}{d\Omega} Q_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{2^9 \pi c^3}{}$$



: característica
nadiacão

$$\text{como } \sum_{ij} |Q_{ij}|^2 = 3Q_0^2/2$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (162.1)} : \langle P_{\text{QUAD.}} \rangle = \frac{\mu_0 w^6 Q_0^2}{960 \pi c^3} : \text{nadiacão total emitida}$$

Obs. (1) : Na discussão acima, foi considerada uma dependência temporal harmônica p/ campos \vec{E} e \vec{B} . Entretanto, é possível obter expressões p/ campos \vec{E} e \vec{B} considerando uma dependência temporal arbitrária, veja P.9.6. Jackson.

Obs. (2) : Veja Secs. 9.6 e 9.7. Jackson p/ tratamento sistemático expansão multipoles campos $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$: verifica-se que os campos \vec{E} e \vec{B} podem ser expandidos em termos de harmônicos esféricos vetoriais

$$\tilde{X}_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \sum Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

momento angular

sendo que os coeficientes da expansão (veja Eq. (9.122), J.) = = momentos (esféricos) de multipolos elétricos e magnéticos (generalização Eq. (23.2)).

vamos a verificar Eq. (162.1),

$$\text{notan: } [\hat{n} \times (\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{Q}))]_i = \epsilon_{ijk} n_j (\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{Q}))_k$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{kpq} n_j n_p (\hat{n} \cdot \vec{Q})_q = \epsilon_{ijk} \epsilon_{kpq} Q_{qm} n_j n_p n_m$$

$$= (S_{ip} S_{jq} - S_{iq} S_{jp}) Q_{qm} n_j n_p n_m$$

$$= Q_{jm} n_i n_j n_m - Q_{im} n_m (\sum_j n_j^2)$$

$$\hookrightarrow |\hat{n} \times (\hat{n} \times (\hat{n} \cdot \vec{Q}))|^2 =$$

$$= (Q_{jm} n_i n_j n_m - Q_{im} n_m) \cdot (Q_{ip}^* n_i n_p - Q_{im}^* n_m)$$

$$= Q_{jm} Q_{ip}^* (\sum_i n_i^2) n_j n_m n_p + Q_{im} Q_{ip}^* n_m n_p$$

$$- Q_{jm} Q_{ip}^* n_i n_j n_m n_p - Q_{im} Q_{ip}^* n_i n_m n_p$$

$$= Q_{ik}^* Q_{ij} n_k n_j - Q_{ij} Q_{km}^* n_i n_j n_k n_m$$

(163.1)

Eqs. (161.4) e (163.1) :

$$\langle P^{(s)} \rangle = \frac{\mu_0 w^6}{32\pi \cdot 36C^3} \left(Q_{ik}^* Q_{ij} \underbrace{\int d\Omega n_k n_j}_{4\pi/3 \delta_{kj}} - \right.$$

$$\left. - Q_{ij} Q_{km}^* \underbrace{\int d\Omega n_i n_j n_k n_m}_{4\pi/3} \right)$$

$$4\pi/3 (S_{ij} \delta_{km} + S_{ik} \delta_{jm} + S_{im} \delta_{jk})$$

$$= \frac{\mu_0 w^6 \cdot 4\pi}{32\pi \cdot 36C^3 \cdot 3} \left(\sum_{ij} |Q_{ij}|^2 - \frac{1}{5} \left(2 \sum_i Q_{ii} \underbrace{\sum_k Q_{kk}}_0 + 2 \sum_{ij} |Q_{ij}|^2 \right) \right) : \text{Eq. (162.3)}$$

Ex. 2: similar ao Ex. 1, pg. 156: considerar antena linear, comprimento de 0 e connente (veja Fig. pg. 156)

$$I(z,t) = I(z) e^{-i\omega t} ; \quad I(z) = I_0 \sin\left(\frac{\kappa d}{2} - \kappa |z|\right) ; \quad |z| \leq d/2,$$

$\omega = ck$;

determinar a radiação emitida.

Obs.: caso particular, é possível determinar $\vec{A}(\vec{n})$ "excluindo" pr a negação da radiação a partir da Eq. (149.1)

Eq. (149.1) $\oplus \vec{J}(\vec{n}) d^3 n' \rightarrow I(z') dz' \hat{z}$:

$$\vec{A}(\vec{n}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \int_{-d/2}^{d/2} dz' I(z') e^{-ik\hat{n} \cdot z' \hat{z}}$$

notar: $\vec{n}' = z' \hat{z}$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{e^{ikn}}{n} \int_{-d/2}^{d/2} dz' \sin\left(\frac{\kappa d}{2} - \kappa |z'|\right) e^{-ikz' \cos\theta} \hat{z}$$

verificam

$$= \hat{z} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 I_0 e^{ikn}}{n} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\cos\left(\frac{\kappa d}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\kappa d}{2}\right) \right)$$

$$= A(n, \theta) \hat{z}$$

Eq. (149.2): campos \vec{E} e \vec{B} pr negação da radiação:

$$\vec{B}(\vec{n}) = i\kappa \hat{n} \times \vec{A} = i\kappa A(n, \theta) (\hat{n} \times \hat{z}) = -i\kappa A(n, \theta) \sin\theta \hat{\phi}$$

$$\vec{E}(\vec{n}) = -c \hat{n} \times \vec{B} = ick A(n, \theta) \sin\theta (\hat{n} \times \hat{\phi}) = -ick A(n, \theta) \sin\theta \hat{\theta}$$

notar: polarização onda $\hat{E} \sim \hat{\theta}$ c plano definido pela direção antena \hat{z} e \hat{n} !

sobre a potência emitida,

Eqs. (150.1) e (150.2) :

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = n^2 \hat{n} \cdot \langle \vec{s} \rangle = n^2 \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$$

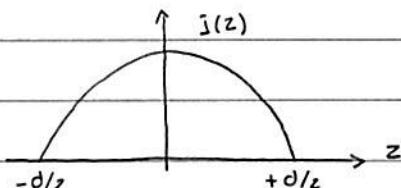
$$= \frac{c \mu_0 I_0^2}{8\pi^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\cos\left(\frac{\kappa d}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{\kappa d}{2}\right) \right)^2 : \quad (165.1)$$

: distribuição angular potência média emitida

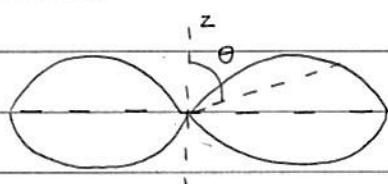
notam: $d\langle P \rangle / d\Omega \propto \kappa d$!

casos particulares (veja Sec. 20.6, Zangwill)

(i) $\kappa d = \pi$ ou $d = \lambda/2$: "antena de meio-onde"

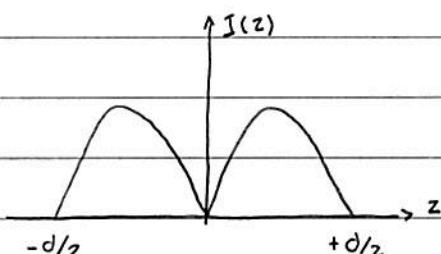


$$\text{Eq. (165.1)} : \frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{c \mu_0 I_0^2}{8\pi^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)$$



: distribuição angular radiação

(ii) $\kappa d = 2\pi$ ou $d = \lambda$: "antena de onda completa"

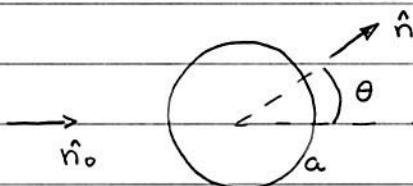


Eq. (165.1) :

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = \frac{c \mu_0 I_0^2}{2\pi^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \cos^4\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)$$

Ex. 3: espalhamento radiação EM por esfera dieletrica
(para detalhes, veja Sec. 10.3, Jackson)

consideran: esfera dieletrica radio a , permissividade ϵ ,
centro = origem & vácuo \oplus
radiação EM incidente, direção de propagação \hat{n}



hipótese: $\lambda_{inc} \gg a$: "long wavelength scattering" (166.3)

ideia espalhamento: radiação incidente

↳ indução momentos de oscilação momentos
multipolos elétricos ~ de multipolos
e magnéticos esfera

↳ emissão radiação:
radiação espalhada !

↳ Q.: Qual a secção de choque do processo de espalhamento ?

Vamos considerar 3 casos,

(i) radiação incidente polarizada,

consideran: radiação incidente = onda plana monochromática,
vetor de polarização \hat{E} .

Lembra Eqs. (84.2) e (87.1)

$$\vec{E}_{\text{inc}}(\vec{n}, t) = \vec{E}_{\text{inc}}(\vec{n}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}_{\text{inc}}(\vec{n}, t) = \vec{B}_{\text{inc}}(\vec{n}) e^{-i\omega t}$$

Onde $\vec{E}_{\text{inc}}(\vec{n}) = \hat{\epsilon}_0 E_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{n}}$; $\vec{k}_0 = \kappa \hat{n}_0$ e $\omega = c \kappa$

(167.1)

$$\vec{B}_{\text{inc}}(\vec{n}) = \frac{1}{c} \hat{n}_0 \times \vec{E}_{\text{inc}}(\vec{n})$$

hipótese (166.1) \rightarrow radiação espalhada \approx radiação de momentos de dipolos elétrico \vec{p} e magnético \vec{m} induzidos

\hookrightarrow Eqs. (149.2), (154.1) e (159.1):

$$\vec{E}_{\text{scat}}(\vec{n}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \kappa^2 \left((\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} - \frac{1}{c} \hat{n} \times \vec{m} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{n}}$$

(167.2)

$$\vec{B}_{\text{scat}}(\vec{n}) = -\frac{1}{c} \hat{n} \times \vec{E}_{\text{scat}}(\vec{n}) ; \hat{n} = \hat{n}$$

notas: $k_{\text{inc}} = k_{\text{scat}} = k$

sobre a energia da onda plana incidente,

Eq. (85.3):

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}_{\text{inc}}|^2 \hat{n}_0$$

$$\hookrightarrow \langle \vec{S}_{\text{inc}} \rangle \cdot \hat{n}_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}_0|^2 : \text{energia incidente / área . tempo}$$

sobre a energia da onda esférica espalhada,

Eqs. (150.1) e (150.2):

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = n^2 \hat{n} \cdot \langle \vec{S}_{\text{SCAT}} \rangle = n^2 \hat{n} \cdot \left(\frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}_{\text{SCAT}}|^2 \hat{n} \right)$$

$$= n^2 \cdot \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}_{\text{SCAT}}|^2 \quad (168.1)$$

considerando radiação espalhada c/ polarização particular é,
Eq. (168.1) pode ser escrita como:

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = n^2 \frac{1}{2\mu_0 c} |\hat{\epsilon}^* \cdot \vec{E}_{\text{SCAT}}|^2 \quad (168.2)$$

Obs.: p/ base \hat{n} normal ($\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$):

$$\vec{E} = \sum_i (\hat{e}_i \cdot \vec{E}) \hat{e}_i$$

$$\hookrightarrow |\vec{E}|^2 = \sum_i |\hat{e}_i \cdot \vec{E}|^2 !$$

notar Eq. (168.1): energia emitida / tempo $\cdot d\Omega$

definição: seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{n^2 \hat{n} \cdot \langle \vec{S}_{\text{SCAT}} \rangle}{\hat{n}_0 \cdot \langle \vec{S}_{\text{inc}} \rangle} = \frac{n^2 |\hat{\epsilon}^* \cdot \vec{E}_{\text{SCAT}}|^2}{|\vec{E}_0|^2} \quad (168.3)$$

Eqs. (167.2) e (168.3):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{|\vec{E}_0|^2} \left| (-i) \hat{\epsilon}^* \cdot \vec{p} + \frac{1}{c} (\hat{n} \times \hat{\epsilon}^*) \cdot \vec{m} \right|^2 \quad (168.4)$$

notar: - $d\sigma/d\Omega \propto k^4$ ou ω^4

- resultado geral p/ hipótese (166.1) !

em particular, p/ esfera dielectrônica c/vácuo, sob campo \vec{E}_{inc} , temos que (veja Eq. (4.56), Jackson)

$$\vec{p} = 4\pi E_0 \left(\frac{\epsilon_n - 1}{\epsilon_n + 2} \right) a^3 \vec{E}_{\text{inc}} : \text{momento de dipolo elétrico induzido}$$

$$\epsilon_n = \epsilon / \epsilon_0 : \text{cte dielectrônica}$$

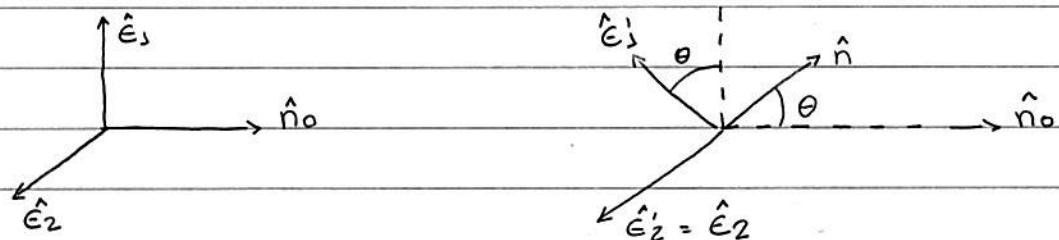
$$\text{como } \hat{\epsilon}^* \cdot \vec{E}_{\text{inc}} = \hat{\epsilon}^* \cdot \hat{\epsilon}^* \epsilon_0$$

$$\hookrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \kappa^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_n - 1}{\epsilon_n + 2} \right|^2 |\hat{\epsilon}^* \cdot \hat{\epsilon}_0|^2 : \text{p/ radiação incidente polarizada!} \quad (4.69.1)$$

(iii) radiação incidente não-polarizada,

ideia: considerar $\hat{\epsilon}$ fixo e determinar média sobre a direção polarização incidente $\hat{\epsilon}_0$!

considerar sistemas ondonormais $(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{n}_0)$ e $(\hat{\epsilon}'_1, \hat{\epsilon}'_2, \hat{n})$:



notar: $\hat{\epsilon}'_1 \equiv \hat{\epsilon}_{\perp}$ é plano espelhamento definido por \hat{n} e \hat{n}_0 ;

$$\hat{\epsilon}'_2 \equiv \hat{\epsilon}_1 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "$$

como $\hat{E}_0 \perp \hat{n}_0$, podemos escrever

$$\hat{E}_0 = \cos\varphi \hat{E}_z + \sin\varphi \hat{E}_x$$

$$\hat{E}_x = \hat{E}'_z = \cos\theta \hat{E}_z - \sin\theta \hat{n}_0$$

$$\hat{E}_z = \hat{E}'_z = \hat{E}_z$$

Eqs. (168.3) e (169.3) :

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{\pi^2 |\hat{E}_{\parallel}^* \cdot \vec{E}_{\text{SCAT}}|^2}{|\vec{E}_0|^2} = \kappa^4 a^6 \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n+2}} \right|^2 |\hat{E}_{\parallel}^* \cdot \hat{E}_0|^2 \\ = \cos^2\varphi \cos^2\theta$$

$$\xrightarrow[\text{direção } \hat{E}_0]{\text{média}} \frac{1}{2} \kappa^4 a^6 \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n+2}} \right|^2 \cos^2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{\pi^2 |\hat{E}_{\perp}^* \cdot \vec{E}_{\text{SCAT}}|^2}{|\vec{E}_0|^2} = \kappa^4 a^6 \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n+2}} \right|^2 |\hat{E}_{\perp}^* \cdot \hat{E}_0|^2 \\ = \sin^2\varphi$$

(170.1)

$$\xrightarrow{} \frac{1}{2} \kappa^4 a^6 \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n+2}} \right|^2$$

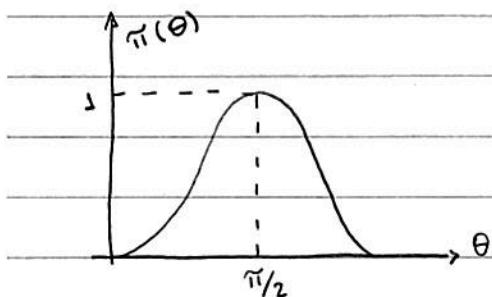
$$\text{Lembrem que: } \langle \cos^2\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi = 1/2 !$$

definição: polarização da radiação espalhada,

$$\pi(\theta) \equiv \frac{d\sigma_{\perp}/d\Omega}{d\sigma_{\parallel}/d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}/d\Omega}{d\sigma_{\perp}/d\Omega}$$

(170.2)

$$\text{Eqs. (170.1) e (170.2) : } \pi(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta}$$

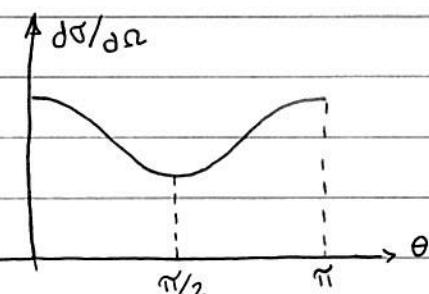


notar: radiação espalhada

100% polarizada p/ $\theta = \pi/2$!

- a seção de choque diferencial total é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_I}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{II}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \kappa^4 a^6 \left| \frac{E_n - 1}{E_n + 2} \right|^2 (1 + \cos^2 \theta)$$



notar: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ min. p/ $\theta = \pi/2$

- a seção de choque total assume a forma:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \kappa^4 a^6 \left| \frac{E_n - 1}{E_n + 2} \right|^2 \underbrace{\int d\theta d\varphi \sin \theta (1 + \cos^2 \theta)}_{16\pi/3}$$

$$= \frac{8\pi}{3} \kappa^4 a^6 \left| \frac{E_n - 1}{E_n + 2} \right|^2$$