

• Oscilador harmônico.

Refs.: Cap. 12, Messiah

Secs. 10.6, 10.7, 14.6, Menzhausen

Caps. 9 - 12, Desai

1ª aplicação do formalismo abstrato da mec. quântica;

ideia: determinação solução algébrica oscilador harmônico.

considerar: partícula massa m , movimento em 1-D,

hamiltoniano do sistema dado por:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (106.1)$$

onde $\omega = c/\lambda$ e operadores posição q e momento p satisfazem a relação canônica de comutação:

$$[q, p] = i\hbar \quad (106.2)$$

Eq. (106.1) pode ser escrita como:

$$H = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(q + \frac{i}{m\omega} p \right) \left(q - \frac{i}{m\omega} p \right) - \frac{1}{2} \hbar \omega$$

definindo operadores:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q + \frac{i}{m\omega} p \right) \quad \text{e} \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q - \frac{i}{m\omega} p \right) \quad (106.3)$$

$$\hookrightarrow H = \hbar \omega \left(a a^\dagger - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{como: } [a, a^\dagger] = \frac{m\omega}{2\hbar} \left[q + \frac{i}{m\omega} p ; q - \frac{i}{m\omega} p \right] = 1 \quad (106.4)$$

$\uparrow$ Eq. (106.2)

$$\hookrightarrow H = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2)$$

definiendo: $N = a^\dagger a$: operador número (107.1)

$\hookrightarrow H = \hbar\omega (N + 1/2)$: hamiltoniano
oscilador harmónico 1-D (107.2)

como $[H, N] = 0 \rightarrow H$ e N podem ser diagonalizados simultaneamente!

• problema autovalores op. número N :

se $N|u\rangle = \nu|u\rangle$; $\langle u|u\rangle = 1$, temos que

$$(i) \langle u|N|u\rangle = \langle u|a^\dagger a|u\rangle = \nu \langle u|u\rangle = \nu$$

$$\hookrightarrow \|a|u\rangle\|^2 = \nu ; \text{ como } \|a|u\rangle\|^2 \geq 0 \rightarrow \nu \geq 0$$

$$(ii) \text{ como } Na^\dagger = a^\dagger aa^\dagger = a^\dagger(a^\dagger a + 1) = a^\dagger(N + 1)$$

$$\hookrightarrow N(a^\dagger|u\rangle) = a^\dagger(N + 1)|u\rangle = (\nu + 1)(a^\dagger|u\rangle), \text{ i.e.,}$$

$a^\dagger|u\rangle$ é autovalor op. N c/ autovalor $(\nu + 1)$

$$\hookrightarrow a^\dagger|u\rangle \propto |u+1\rangle$$

$$\text{se } a^\dagger|u\rangle = c|u+1\rangle \rightarrow \langle u|aa^\dagger|u\rangle = \langle u|a^\dagger a + 1|u\rangle = |c|^2 \langle u+1|u+1\rangle$$

$$\hookrightarrow (\nu + 1) \underbrace{\langle u|u\rangle}_1 = |c|^2 \underbrace{\langle u+1|u+1\rangle}_1 \rightarrow c = \sqrt{\nu + 1}$$

$$\hookrightarrow a^\dagger|u\rangle = \sqrt{\nu + 1} |u+1\rangle \quad (107.3)$$

de modo análogo,

(iii) como $N a = a^\dagger a a = (a a^\dagger - 1) a = a a^\dagger a - a = a(N-1)$

$$\hookrightarrow N(a|v\rangle) = a(N-1)|v\rangle = (v-1)(a|v\rangle), \text{ i.e.,} \quad (108.1)$$

$a|v\rangle$ é autovetor op. N c/ autovalor $(v-1)$

$$\hookrightarrow a|v\rangle \propto |v-1\rangle$$

$$\text{se } a|v\rangle = c|v-1\rangle \rightarrow \langle v|a^\dagger a|v\rangle = v \underbrace{\langle v|v\rangle}_1 = |c|^2 \underbrace{\langle v-1|v-1\rangle}_1$$

$$\hookrightarrow c = \sqrt{v} \quad \text{e} \quad a|v\rangle = \sqrt{v} |v-1\rangle \quad (108.2)$$

notar: se $v=0 \rightarrow \langle 0|a^\dagger a|0\rangle = 0 \rightarrow \|a|0\rangle\| = 0$

$$\hookrightarrow a|0\rangle = 0 \quad (108.3)$$

• seguindo o procedimento (iii), verifica-se que

$a^2|v\rangle$: autovetor op. N c/ autovalor $v-2$,

$\vdots$

(108.4)

$a^n|v\rangle$: " " " " " $v-n$;

eventualmente, teremos $v-n < 0$ (i) $\rightarrow v \in \mathbb{N}$:

: espectro op. número N : discreto e não-degenerado !

• seguindo o procedimento (iii), temos que

$(a^\dagger)^2|v\rangle$: autovetor op. N c/ autovalor $v+2$,

$\vdots$

(108.5)

$(a^\dagger)^n|v\rangle$: " " " " " $v+n$.

Eqs. (108.4) e (108.5) : autovetores op. N podem ser obtidos pela ação operadores a e $a^\dagger$.

Em resumo,

como $\nu \in \mathbb{N} \rightarrow \nu = n \in \mathbb{N}$ e, assim,

$$N|n\rangle = n|n\rangle; \quad n \in \mathbb{N}$$

(109.1)

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad : \quad a^\dagger \text{ op. de criação}$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad : \quad a \text{ op. de destruição}$$

} operações
escada

• como $a|0\rangle = 0$

↳ é possível determinar o estado $|n\rangle$ a partir de $|0\rangle$;
verifica-se que

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle : \text{autovalores op. } N$$

(109.2)

$$\text{Eq. (109.1): } |n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}} |n-1\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}} \cdot \frac{a^\dagger}{\sqrt{n-1}} |n-2\rangle = \dots =$$

$$= \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}} |0\rangle : \text{Eq. (109.2)}$$

• como op. N : conjunto completo de observáveis que
comutam $\rightarrow$ vetores $|n\rangle$: base p/ espaço de Hilbert;

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m} : \text{condição de ortogonalização}$$

(109.3)

$$\sum_{n \geq 0} |n\rangle \langle n| = 1 : \text{relação de completude} :$$

: eqs. fundamentais da representação definida
pela base $|n\rangle$.

• Dessa forma, p/ o oscilador harmônico temos que,

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle ; E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

$$|0\rangle : \text{estado fundamental} , E_0 = \hbar\omega/2 \quad (110.1)$$

$$|n\rangle : \text{estados excitados} , n \geq 1$$

• elementos de matriz operadores na representação $|n\rangle$,

$$\text{Eq. (109.1)} : \langle m|a|n\rangle = \sqrt{n} \delta_{m,n-1}$$

(110.2)

$$\langle m|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}$$

$$\text{como Eq. (106.3)} : q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) \text{ e } p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a)$$

(110.3)

$$\xrightarrow{\text{Eq. (110.2)}} \langle m|q|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \delta_{m,n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1})$$

$$\langle m|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} - \sqrt{n} \delta_{m,n-1})$$

• valores esperados:

$$\text{Eq. (110.3)} : \langle q \rangle = \langle n|q|n\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle p \rangle = \langle n|p|n\rangle = 0$$

$$\text{como } q^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + a a^\dagger + a a)$$

$$\hookrightarrow \langle n|q^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (\langle n|a^\dagger a|n\rangle + \underbrace{\langle n|a a^\dagger|n\rangle}_{1+a^\dagger a})$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega} (n + 1/2)$$

(110.4)

de modo análogo, verifica-se que (exercício):

$$\langle n | p^2 | n \rangle = m\hbar\omega(n + 1/2) \quad (111.1)$$

como: $\Delta q = (\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2)^{1/2} = \langle q^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (n + 1/2)^{1/2}$

$$\Delta p = (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)^{1/2} = \langle p^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{m\hbar\omega} (n + 1/2)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow \Delta q \cdot \Delta p = \hbar(n + 1/2) : \text{OK c/ } \Delta q \Delta p \geq \hbar/2 : \text{Eq. (63.2)}$$

em particular, p/ estado fundamental $n=0$:

$$\Delta q \cdot \Delta p = \hbar/2 : \text{valor mínimo} \quad (111.2)$$

relação de incerteza

representação de coordenadas, autovalores $|n\rangle$.

$\langle q | n \rangle \equiv u_n(q)$: função de onda oscilador harmônico
nível de energia n .

p/ estado fundamental.

$$a | 0 \rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right) | 0 \rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \langle q | \hat{q} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} | 0 \rangle = \left(q + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dq} \right) u_0(q) = 0$$

↑
Eq. (87.6)

$$\text{sol. eq. diferencial: } u_0(q) = A_0 \exp(-m\omega q^2 / 2\hbar) \quad (111.3)$$

como $\int dq |u_0(q)|^2 = 1$: condição normalização exercício $\rightarrow A_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}$

• p/ estados excitados, $n \gg 1$,

$$\text{Eq. (109.2): } \psi_n(q) = \langle q | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{n/2} \langle q | \hat{q} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{n/2} \left(q - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dq} \right)^n \psi_0(q)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^{n/2} \left(q - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dq} \right)^n e^{-m\omega q^2/2\hbar}$$

$$\text{se } z = \alpha q \text{ e } \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\text{Exercício } \rightarrow \psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(z - \frac{d}{dz} \right)^n e^{-z^2/2} \quad (112.1)$$

como $(z - d/dz)^n \psi(z) = (-1)^n e^{z^2/2} d^n (e^{-z^2/2} \psi(z))$: identidade

p/ $\psi(z) = e^{-z^2/2}$, temos que

$$\psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-z^2/2} \underbrace{(-1)^n e^{z^2/2} d^n e^{-z^2/2}}_{d^n z^n} \quad (112.2)$$

$H_n(z)$: polinômio de Hermite

Obs.: veja Sec. VIII.6, Messiah p/ interpretação operadores escada a e $a^\dagger$.

• oscilador harmônico 1-D, versão de Heisenberg,

definindo: $a(t) \equiv a_H(t)$ e $a^\dagger(t) \equiv a_H^\dagger(t)$

Eqs. (80.1), (106.4) e (107.2):

$$i\hbar \frac{da}{dt} = [a(t), H] = \hbar\omega a \quad \text{e} \quad i\hbar \frac{da^\dagger}{dt} = [a^\dagger(t), H] = -\hbar\omega a^\dagger$$

(113.1)

$$\hookrightarrow a(t) = a(0)e^{-i\omega t} \quad \text{e} \quad a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{+i\omega t}$$

Eqs. (110.3) e (113.1):

$$q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger(0)e^{i\omega t} + a(0)e^{-i\omega t})$$

(113.2)

$$p(t) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger(0)e^{i\omega t} - a(0)e^{-i\omega t})$$

$$\text{como } a(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (q(0) + \frac{i}{m\omega} p(0)) \quad \text{e} \quad a^\dagger(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} (q(0) - \frac{i}{m\omega} p(0))$$

$$\hookrightarrow q(t) = q(0)\cos\omega t + \frac{1}{m\omega} p(0)\sin\omega t$$

(113.3)

$$p(t) = p(0)\cos\omega t - m\omega q(0)\sin\omega t$$

Obs.: nota-se similaridade entre $\langle q(t) \rangle$ e $\langle p(t) \rangle$ e as correspondentes quantidades clássicas $q_{cl}(t)$ e $p_{cl}(t)$;

pr detalhes comparação entre oscilações quântica e clássica, veja Secs. VIII.10 e VIII.11, Messiah.

• movimento pacote de incerteza mínima,

Eq. (63.1): relação de incerteza $\Delta A \Delta B$ assume valor mínimo se

$$(A - \langle A \rangle)|\psi\rangle = i\hbar (B - \langle B \rangle)|\psi\rangle$$

onde $i\hbar = -\frac{\langle [A, B] \rangle}{2(\Delta B)^2}$: veja pg. 113.1

• sobre a cte r , Eq. (63.1),

$$\text{Eq. (62.2)} : \hat{A}|\psi\rangle = \lambda \hat{B}|\psi\rangle$$

$$\hookrightarrow \langle \psi | \hat{B} \hat{A} | \psi \rangle = \lambda \langle \psi | \hat{B}^2 | \psi \rangle \stackrel{\text{Eq. (62.1)}}{=} \lambda (\Delta B)^2 \quad (I)$$

$$\langle \psi | \hat{A} \hat{B} | \psi \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle = \frac{1}{\lambda} (\Delta A)^2 \quad (II)$$

$$\hookrightarrow (II) + (I) = 2\langle F \rangle = 0 = \lambda (\Delta B)^2 + \frac{1}{\lambda} (\Delta A)^2$$

$$(II) - (I) = \langle \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \rangle = \langle [A, B] \rangle = \frac{1}{\lambda} (\Delta A)^2 - \lambda (\Delta B)^2$$

$$\hookrightarrow (\Delta A)^2 = -\lambda^2 (\Delta B)^2 \rightarrow \lambda = \pm i = - \frac{\langle [A, B] \rangle}{2(\Delta B)^2}$$

p/ $A = \hat{p}$ e $B = \hat{q}$, temos que

$$\langle q | \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle | \psi \rangle = \frac{i\hbar}{2(\Delta q)^2} \langle q | \hat{q} - \langle \hat{q} \rangle | \psi \rangle$$

$$\left(-i\hbar \frac{d}{dq} - \langle \hat{p} \rangle \right) \psi(q) = \frac{i\hbar}{2(\Delta q)^2} (q - \langle \hat{q} \rangle) \psi(q) \quad (114.1)$$

verifica-se que (exercício):

$$\psi(q) = \frac{1}{(2\pi\Delta q^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{4\Delta q^2} (q - \langle \hat{q} \rangle)^2 + \frac{i}{\hbar} \langle \hat{p} \rangle q\right) :$$

: pacote de incerteza mínima.

em particular, se $\Delta q = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ Eq. (111.2) $\rightarrow \Delta p = \sqrt{\hbar m\omega/2}$

$$\hookrightarrow \psi(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} (q - \langle \hat{q} \rangle)^2 + \frac{i}{\hbar} \langle \hat{p} \rangle q\right) \quad (114.2)$$

hipótese: partícula descrita pelo hamiltoniano (106.1);

nesse caso, verifica-se que (veja P 12.6, Messiah)

se $\psi(q, 0) = \psi(q)$: (114.2)

$\hookrightarrow \Delta q \Delta p = \hbar/2$ é cte no tempo!

de fato, temos que:

$$|\psi(q, t)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} (q - \langle \hat{q}(t) \rangle)^2\right)$$

notar: movimento centro
pacote = " clássico!

se $|\psi\rangle = |\psi(t=0)\rangle = \int dq \psi(q) |q\rangle$, verifica-se que o vetor $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \exp(i\langle\hat{p}\rangle\hat{q}/\hbar) \exp(-i\langle\hat{q}\rangle\hat{p}/\hbar) |0\rangle \quad (115.1)$$

como $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi\rangle$, verifica-se que

$$|\langle n|\psi(t)\rangle|^2 = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \quad : \text{cte no tempo}$$

$$\text{onde } \alpha = \frac{E_c}{\hbar\omega} = \frac{1}{2m\hbar\omega} (\langle\hat{p}\rangle^2 + m\omega^2\langle\hat{q}\rangle^2)$$

notas:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_{nm} \langle\psi|n\rangle \langle n|H|m\rangle \langle m|\psi\rangle$$

$$= \sum_n \hbar\omega(n+1/2) |\langle n|\psi\rangle|^2 = \hbar\omega e^{-\alpha} \sum_{n \geq 0} (n+1/2) \frac{\alpha^n}{n!}$$

$$= \hbar\omega e^{-\alpha} (\alpha+1/2) e^{\alpha} = E_c + 1/2 \hbar\omega$$

$$\stackrel{e}{=} \langle\psi|H^2|\psi\rangle = \sum_n (\hbar\omega)^2 (n+1/2)^2 |\langle n|\psi\rangle|^2$$

$$= (\hbar\omega)^2 (\alpha+1/2)^2 + \alpha$$

$$\hookrightarrow \Delta E = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \sqrt{E_c \hbar\omega}$$

consideram: τ_q : escala de tempo característica de $|\psi(q,t)|^2$
 $\sim \Delta t$ p/ centro do pacote deslocar Δq ;

como $v = \langle p(t) \rangle / m$: velocidade centro pacote

$$\hookrightarrow \tau_q = \frac{\Delta q}{\langle p(t) \rangle / m} = \frac{1}{\langle p(t) \rangle} \sqrt{\frac{\hbar m}{2\omega}}$$

$$\text{como } \tau_{q,\text{Min}} \rightarrow \langle p(t) \rangle_{\text{Max}} = (2mE_c)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow \tau_{q,\text{Min}} = \frac{\hbar/2}{(E_c \hbar\omega)^{1/2}} = \frac{\hbar/2}{\Delta E} \quad : \text{OK c/ Eq. (77.3) !}$$

Estados coerentes.

ideia: estudar autoestados do op. (não-hermitiano) a ;

útil p/ ótica;

veja antigo Glauber: Phys. Rev. 131, 2766 (1963).

considerar: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

(116.1)

↑ estado coerente

como $a^\dagger \neq a \rightarrow$ em princípio, autovalores $\alpha \in \mathbb{C}$ e

autovetores $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ se $\alpha \neq \beta$;

na base $|n\rangle$: autoestados oscilador harmônico:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n \geq 0} C_n |n\rangle$$

(116.2)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow a|\alpha\rangle &= \sum_{n \geq 0} C_n a|n\rangle = \sum_{n \geq 1} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \sum_{n \geq 0} C_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle \\ &\quad \uparrow \text{Eq. (109.1)} \quad \uparrow n=n'+1; n' \rightarrow n \end{aligned}$$

Eq. (116.1)

$$= \alpha|\alpha\rangle = \sum_{n \geq 0} \alpha C_n |n\rangle$$

$\hookrightarrow C_{n+1} \sqrt{n+1} = \alpha C_n$ ou $C_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} C_n$: relação de recorrência p/ C_n !

temos que:

$$C_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} C_0$$

$$C_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} C_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{2}} C_0$$

$$C_3 = \frac{\alpha}{\sqrt{4}} C_2 = \frac{\alpha^3}{\sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2}} C_0 \dots C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0$$

$$\text{Eq. (116.2): } |\alpha\rangle = C_0 \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Como $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$,

$$\hookrightarrow |C_0|^2 \sum_{nm} \frac{\alpha^{*n} \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m \rangle = |C_0|^2 \sum_{n \geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2 \cdot e^{|\alpha|^2} = 1$$

$$\hookrightarrow |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle : \quad \text{expansão estado coerente } |\alpha\rangle \text{ na base } |n\rangle \quad (117.1)$$

Eqs. (109.2) $\oplus$ (117.1):

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n \geq 0} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \equiv \mathcal{D}(\alpha) |0\rangle : \text{estado } |\alpha\rangle \text{ pode ser obtido via ação op. } \mathcal{D}(\alpha) \text{ sob } |0\rangle : \text{est. fundamental o.H.}$$

entretanto, $\mathcal{D}(\alpha)$ não é operador unitário:

$$\mathcal{D}(\alpha) \mathcal{D}^\dagger(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha^* a} = e^{-|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{\alpha^* a}$$

$$\text{notar: se } \mathcal{D}(\alpha) \rightarrow e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{\beta a}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle,$$

$$\text{pois } e^{\beta a} |0\rangle = \left(1 + \beta a + \frac{1}{2!} (\beta a)^2 + \dots \right) |0\rangle = |0\rangle.$$

$$\oplus \text{ condição } \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{D}^\dagger(\alpha) = \mathcal{D}^\dagger(\alpha) \mathcal{D}(\alpha) = 1 \text{ VERIFICAR! } \rightarrow \beta = -\alpha^*$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \stackrel{\uparrow \text{Eq. (16.5)}}{=} e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a + 1/2 [\alpha a^\dagger, -\alpha^* a]}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} : \text{op. unitário}$$

notas: estado fundamental $|0\rangle$ op. unitário, estado coerente $|\alpha\rangle$
O.H. $\mathcal{D}(\alpha)$

· propriedades op. unitário $\mathcal{D}(\alpha)$:

$$(i) \mathcal{D}^\dagger(\alpha) = e^{-\alpha a^\dagger + \alpha^* a} = e^{(-\alpha) a^\dagger - (-\alpha^*) a} = \mathcal{D}(-\alpha)$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}^\dagger(\alpha) = \mathcal{D}^{-1}(\alpha) = \mathcal{D}(-\alpha) \quad (118.1)$$

$$(ii) \mathcal{D}^\dagger(\alpha) a \mathcal{D}(\alpha) = e^{-(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} a e^{+(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$$

$$= a + \underbrace{[-\alpha a^\dagger + \alpha^* a, a]}_{(I)} + \frac{1}{2!} [-\alpha a^\dagger + \alpha^* a, (I)] + \dots$$

$$\text{como } (I) = \alpha \rightarrow \mathcal{D}^\dagger(\alpha) a \mathcal{D}(\alpha) = a + \alpha$$

de modo análogo, temos que (verificar): (118.2)

$$\mathcal{D}^\dagger(\alpha) a^\dagger \mathcal{D}(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$$

Eq. (118.2): $\mathcal{D}(\alpha)$: operador "deslocamento"

$$(iii) \mathcal{D}^\dagger(\alpha) a^\dagger a \mathcal{D}(\alpha) = \mathcal{D}^\dagger(\alpha) a^\dagger \mathcal{D}(\alpha) \mathcal{D}^\dagger(\alpha) a \mathcal{D}(\alpha)$$

$$= (a^\dagger + \alpha^*)(a + \alpha) = a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2 \quad (118.3)$$

· produto escalar,

$$\text{considerar: } |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad \text{e} \quad |\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\hookrightarrow \langle \beta | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2} \sum_{n,m \geq 0} \frac{(\beta^*)^m \alpha^n}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m \rangle$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!}$$

(119.1)

$= e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \beta^* \alpha}$: estados coerentes não são ortogonais

$$\hookrightarrow |\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = \exp(-|\alpha|^2 - |\beta|^2 + \alpha^* \beta + \beta^* \alpha) = \exp(-|\alpha - \beta|^2)$$

apesar Eq. (119.1), é possível definir uma relação de completude p/ estados coerentes; verifica-se que:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2 \alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \frac{1}{\pi} \int d\text{Re} \alpha d\text{Im} \alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1 \quad (119.2)$$

$\hookrightarrow$ estados $|\alpha\rangle$: conjunto supercompleto.

considerar vetor arbitrário $|\psi\rangle$; temos que

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle = F(a^\dagger) |0\rangle$$

Eq. (109.2) $\nearrow$ $\equiv F(a^\dagger)$

$$\text{Como } a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \rightarrow \langle \alpha| a^\dagger = \alpha^* \langle \alpha|$$

$$\hookrightarrow \langle \alpha | \psi \rangle = \langle \alpha | F(a^\dagger) | 0 \rangle = F(\alpha^*) \langle \alpha | 0 \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} F(\alpha^*) \quad (119.3)$$

Definição: ordem normal : (op. criação) * (op. destruição)

Ex.: considerar o operador $A = a^2 a^\dagger$

$$\hookrightarrow A = a a a^\dagger = a(1 + a^\dagger a) = a + a a^\dagger a = a + (1 + a^\dagger a)a$$

$$= 2a + a^\dagger a^2 : \text{op. } A \text{ em ordem normal !}$$

notas: $\langle \alpha | (a^\dagger)^m a^n | \alpha \rangle = (\alpha^*)^m \alpha^n = \langle \alpha | a^\dagger | \alpha \rangle^m \langle \alpha | a | \alpha \rangle^n$,

i.e., o valor esperado de um op. em ordem normal em um estado coerente pode ser fatorado ~ comportamento clássico

↳ estados coerentes = estados semiclássicos (120.1)

caso geral: se op. $A = A(a^\dagger, a)$: op. em ordem normal

↳ $\langle \alpha | A(a^\dagger, a) | \alpha \rangle = A(\alpha^*, \alpha) = A(\langle a^\dagger \rangle, \langle a \rangle)$ (120.2)

Considerar operadores posição q e momento p :

Eq. (110.3): $\langle \alpha | q | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle \alpha | a^\dagger | \alpha \rangle + \langle \alpha | a | \alpha \rangle) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha^* + \alpha)$
 $\alpha^* + \alpha = 2\text{Re}\alpha$

$\langle \alpha | p | \alpha \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\langle \alpha | a^\dagger | \alpha \rangle - \langle \alpha | a | \alpha \rangle) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha)$
 $\alpha^* - \alpha = 2i\text{Im}\alpha$ (120.3)

Eq. (110.4): $\langle \alpha | q^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + a a + 1 | \alpha \rangle$

notas: ordem normal! $\xrightarrow{\quad} (a^\dagger)^2 + 2a^\dagger a + a^2 + 1 = (a + a^\dagger)^2 + 1$

$= \langle \alpha | q | \alpha \rangle^2 + \frac{\hbar}{2m\omega}$

similar (verificar): $\langle \alpha | p^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | p | \alpha \rangle^2 + \frac{1}{2} m\hbar\omega$

temos que:

$$(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = \hbar/2 m \omega$$

$$\rightarrow \Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{1}{2} m \hbar \omega$$

i.e., $|\alpha\rangle$: pacote de incerteza mínima (114.2);

de fato, lembren Eq. (117.1):

$$P_n(\alpha) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!} : \text{probabilidade encontrar valor } n \text{ na medida do op. número}$$

Distribuição de Poisson $N = \alpha^2$ no estado $|\alpha\rangle$;

(121.1)

Obs.: comparem Eqs. (115.1) e (121.1).

↳ novamente: relação entre estados coerentes $|\alpha\rangle$ e
" semiclássicos!

Exercício: determinem Eq. (115.1) a partir de $|\alpha\rangle = \mathcal{D}(\alpha)|0\rangle$.

• Oscilador harmônico forçado.

ideia: estudar oscilador harmônico sob uma
perturbação dependente tempo.

considerar sistema descrito pelo hamiltoniano:

$$H(t) = \underbrace{\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2}_{\text{osc. harm.}} - \underbrace{q F(t) - p G(t)}_{\text{perturbação}} \quad (121.2)$$

onde $F(t)$ e $G(t) \in \mathbb{R}$ e $\neq 0$ apenas p/ $t_1 < t < t_2$

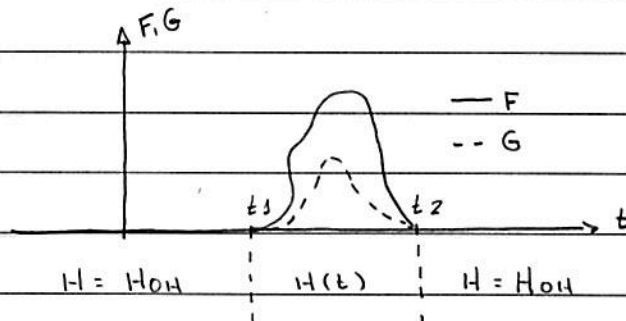
Eq. (110.3):

$$qF + pG = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a^\dagger + a) F + i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a) G$$

$$= \underbrace{\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} F - i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} G \right) a}_{\equiv -f(t)} + \underbrace{\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} F + i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} G \right) a^\dagger}_{\equiv -f^*(t)}$$

$$\hookrightarrow H(t) = \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2) + f(t)a + f^*(t)a^\dagger \quad (122.1)$$

esquematicamente:



é interessante introduzir a notação:

$$H = \hbar\omega_0(a_{in}^\dagger a_{in} + 1/2) ; H|n\rangle_{in} = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle_{in}, \quad t < t_1 \quad (122.2)$$

$$H = \hbar\omega_0(a_{out}^\dagger a_{out} + 1/2) ; H|n\rangle_{out} = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle_{out}, \quad t > t_2$$

Q.: se $| \psi(t < t_1) \rangle = | 0 \rangle = | 0 \rangle_{in}$, qual probabilidade

$$| \psi(t > t_2) \rangle = | n \rangle = | n \rangle_{out}, \text{ i.e., } P_n = | \langle n | 0 \rangle_{in} |^2 ?$$

(122.3)

análise: versão de Heisenberg.

novamente, notação: $a(t) \equiv a_H(t)$; $a \equiv a_S$

eq. de Heisenberg (80.1) p/ $a(t)$:

$$i\hbar \frac{da(t)}{dt} = [a(t), H_H]$$

$$\text{como } [a(t), H_H] = U^\dagger [a, H] U \quad \underline{=}$$

$$[a, H] = \hbar \omega_0 a + f^*(z)$$

$$\hookrightarrow i \hbar \frac{da(t)}{dt} = \hbar \omega_0 a(t) + f^*(t) \quad \text{ou} \quad \frac{da(t)}{dt} + i \omega_0 a(t) = -\frac{i}{\hbar} f^*(t) \quad (123.1)$$

solução:

$$e^{i\omega_0 t} * (123.1): \quad e^{i\omega_0 t} \frac{da(t)}{dt} + i \omega_0 e^{i\omega_0 t} a(t) =$$

$$= \frac{d}{dt} (e^{i\omega_0 t} a(t)) = -\frac{i}{\hbar} e^{i\omega_0 t} f^*(t)$$

$$\hookrightarrow \int_{t_0}^t d(e^{i\omega_0 t'} a(t')) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_0 t'} f^*(t')$$

$$\hookrightarrow a(t) e^{i\omega_0 t} - a(t_0) e^{i\omega_0 t_0} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_0 t'} f^*(t')$$

$$\text{se } t_0 = 0 \rightarrow a(t_0 = 0) = a(0) = a_s = a$$

$$\hookrightarrow a(t) = a e^{-i\omega_0 t} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{-i\omega_0(t-t')} f^*(t') \quad (123.2)$$

em princípio, Eq. (123.2) permite determinar (122.3),

pr detalhes, veja Sec. 10.3, Desai;

• alternativa: solução via método da função de Green
(+ sofisticado)

solução (123.1): sol. homogênea + sol. particular

$$\hookrightarrow \text{Eq. (113.1): } a_0(t) = a_0(0) e^{-i\omega_0 t} \\ = a e^{-i\omega_0 t}$$

sol. particular: $a(t) = -\frac{i}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f^*(t')$ (124.1)

onde a função de Green $G(t-t')$ é dada pela eq. auxiliar:

$$\frac{d}{dt} G(t-t') + i\omega_0 G(t-t') = \delta(t-t') \quad (124.2)$$

verifica-se que (veja pg. 124.1) Eq. (124.2) admite 2 soluções:

$$G_R(t-t') = \theta(t-t') e^{-i\omega_0(t-t')} : \text{retardada} \quad (\neq 0, t > t')$$

$$G_A(t-t') = -\theta(t'-t) e^{-i\omega_0(t-t')} : \text{avangada} \quad (\neq 0, t < t')$$

(124.3)

onde $\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

↳ podemos escrever a sol. Eq. (123.1) de duas formas distintas:

$$(i) \quad a(t) = a_0(t) - \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G_R(t-t') f^*(t')$$

$$= a_0(t) - \frac{i}{h} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_0(t-t')} f^*(t')$$

SOL.
HOMOG.

SOL. PARTICULAR

↳ 0 p/ $t < t_1$ pois $f^*(t') = 0$

p/ $t' < t < t_1$

como $a(t) = a_0(t)$ p/ $t < t_1$

↳ nesse caso, $a_0(t) = a_{in}(t) = a_{in} e^{-i\omega_0 t}$

$$\hookrightarrow a(t) = a_{in} e^{-i\omega_0 t} - \frac{i}{h} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_0(t-t')} f^*(t') \quad (124.4)$$

notar: evento em t depende comportamento do sistema em instantes anteriores $t' < t$: retardada!

sobre Eq. (124.3),

$$\text{definindo: } \tau = t - t' \rightarrow \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}$$

$$\text{Eq. (124.2): } \frac{dG(\tau)}{d\tau} + i\omega_0 G(\tau) = \delta(\tau) \quad (124.5)$$

considerar a transf. de Fourier de $G(\tau)$:

$$G(\tau) = \int d\omega e^{-i\omega\tau} G(\omega) \rightarrow \frac{dG(\tau)}{d\tau} = \int d\omega (-i\omega) e^{-i\omega\tau} G(\omega)$$

$$\text{como } \delta(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau}$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (124.5): } \int d\omega \left((-i\omega + i\omega_0) G(\omega) - \frac{1}{2\pi} \right) e^{-i\omega\tau} = 0$$

$$\hookrightarrow G(\omega) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\omega - \omega_0}$$

$$\text{e } G(\tau) = \frac{i}{2\pi} \int d\omega \frac{1}{\omega - \omega_0} e^{-i\omega\tau}$$

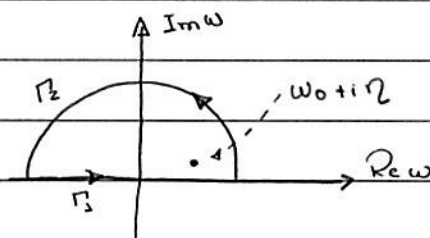
$G(\tau)$ pode ser calculada por resíduos;

devido ao modo de tratamento das singularidades,

é necessário considerarmos 2 casos:

$$(i) \omega_0 \rightarrow \omega_0 + i\eta; \quad \eta \rightarrow 0^+$$

pois integrando: $\omega = \omega_0 + i\eta$



$$\hookrightarrow G(\tau) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} d\omega \frac{1}{\omega - (\omega_0 + i\eta)} e^{-i\omega\tau}$$

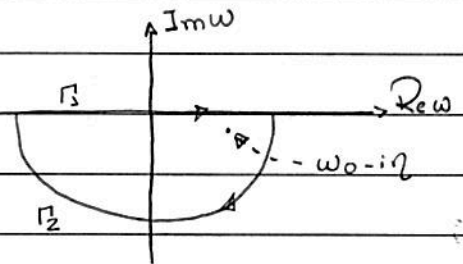
$$= \frac{i}{2\pi} \cdot 2\pi i (+1) e^{-i\omega_0\tau} ; \tau < 0 \text{ pois } \int_{\Gamma_2} \rightarrow 0!$$

↑ COUNTERCLOCK

$$\hookrightarrow G_A(t-t') = -\Theta(t'-t) e^{-i\omega_0(t-t')}$$

$$(ii) \omega_0 \rightarrow \omega_0 - i\eta; \eta \rightarrow 0^+$$

polo integrando: $\omega = \omega_0 - i\eta$



$$\hookrightarrow G(\tau) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} d\omega \frac{1}{\omega - (\omega_0 - i\eta)} e^{-i\omega\tau}$$

$$= \frac{i}{2\pi} \cdot 2\pi i (-1) e^{-i\omega_0\tau} \quad ; \tau > 0 \text{ pois } \int_{\Gamma_2} \rightarrow 0$$

↑ CLOCKWISE

$$\hookrightarrow G_R(t-t') = \Theta(t-t') e^{-i\omega_0(t-t')}$$

$$(ii) \quad a(t) = a_0(t) - \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G_A(t-t') f^*(t')$$

$$= a_0(t) + \frac{i}{h} \int_t^{+\infty} dt' e^{-i\omega_0(t-t')} f^*(t')$$

$\hookrightarrow$ o p/ $t > t_z$ pois $f^*(t') = 0$ p/ $t_z < t < t'$

Como $a(t) = a_0(t)$ p/ $t > t_z \rightarrow$ nesse caso $a_0(t) = a_{out}(t)$
 $= a_{out} e^{-i\omega_0 t}$

$$\hookrightarrow a(t) = a_{out} e^{-i\omega_0 t} + \frac{i}{h} \int_t^{+\infty} dt' e^{-i\omega_0(t-t')} f^*(t') \quad (125.1)$$

notas: evento em t depende comportamento do sistema em instantes posteriores $t' > t$: avançada!

como soluções (124.4) e (125.1) são equivalentes

$$\hookrightarrow \text{Eq. (124.4)} = \text{Eq. (125.1)} : a_{out}(t) = a_{in}(t) - \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i\omega_0(t-t')} f^*(t')$$

como $a_{in/out}(t) = a_{in/out} e^{-i\omega_0 t}$

$$\hookrightarrow a_{out} = a_{in} - \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{+i\omega_0 t'} f^*(t') : \text{relação entre ops. in e out} \quad (125.2)$$

$$\equiv g^*(\omega_0) \cdot (2\pi)$$

transf. de Fourier $f^*(t)$

Como: $a_{out} = a_{in} + \alpha$; $\alpha = -\frac{2\pi i}{h} g^*(\omega_0)$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (118.2)}} a_{out} = \mathcal{D}^\dagger(\alpha) a_{in} \mathcal{D}(\alpha) ; \mathcal{D}(\alpha) = \exp(\alpha a_{in}^\dagger - \alpha^* a_{out}) \quad (125.3)$$

a equivalência entre Eqs. (122.2)

$$\hookrightarrow H_{in} |n\rangle_{in} = E_n |n\rangle_{in} \rightarrow \underbrace{D^\dagger(\alpha)}_{H_{out}} \underbrace{H_{in} D(\alpha)}_{|n\rangle_{out}} (D^\dagger(\alpha) |n\rangle_{in}) = E_n (D^\dagger(\alpha) |n\rangle_{in})$$

$$\hookrightarrow |n\rangle_{out} = D^\dagger(\alpha) |n\rangle_{in} \quad (126.1)$$

notas: questão inicial (122.3):

$$P_n(\omega_0) = |{}_{out}\langle n | 0 \rangle_{in}|^2 = |{}_{in}\langle 0 | \underbrace{D(\alpha)}_{| \alpha \rangle_{in}} | 0 \rangle_{in}|^2 \stackrel{\text{Eq. (117.1)}}{=} \frac{e^{-|\alpha|^2}}{n!} |\alpha|^{2n},$$

onde $\alpha = -\frac{2\pi i}{h} g^*(\omega_0)$

• Oscilador harmônico isotrópico em D dimensões,

ideia: ilustrar sistema c/ espectro discreto e degenerado;

considerar sistema descrito por:

$$H = \sum_{i=1}^D H_i = \sum_{i=1}^D \frac{1}{2m} (p_i^2 + m^2 \omega^2 q_i^2) \quad (126.2)$$

$$\text{onde: } [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \text{ e } [q_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij},$$

i.e., conjunto D osciladores harmônicos independentes.

temos que Eqs. (106.3), (109.1) e (109.2):

$$a_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q_j + \frac{i}{m\omega} p_j \right) \quad a_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(q_j - \frac{i}{m\omega} p_j \right)$$

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \text{ e } [a_i, a_j^\dagger] = i\hbar \delta_{ij}$$

; $i, j = 1, 2, \dots, D$

$$N_i = a_i^\dagger a_i \quad N_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle; \quad n_i = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_i^\dagger |n_i\rangle = \sqrt{n_i+1} |n_i+1\rangle \quad a_i |n_i\rangle = \sqrt{n_i} |n_i-1\rangle \quad (126.3)$$

$$e_i |n_i\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} |0\rangle, \quad i=1, 2, \dots, D \quad (127.1)$$

dessa forma,

$$H_i |n_i\rangle = \hbar\omega(n_i + 1/2) |n_i\rangle, \quad i=1, 2, \dots, D$$

$$n_i = 0, 1, 2, \dots$$

↳ vetores $|n_i\rangle$: base p/ subespaço E_i

$$e_i \text{ vetores } |n_1 n_2 \dots n_D\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_D\rangle: \quad (127.2)$$

: base espaço vetorial $E = E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_n$

$$\text{podemos definir o op. número: } N = \sum_{i=1}^D n_i \quad (127.3)$$

$$[Eq. (126.2)] \rightarrow H = \sum_{i=1}^D \hbar\omega(n_i + 1/2) = \hbar\omega(N + 1/2 D)$$

e, assim:

$$H |n_1 n_2 \dots n_D\rangle = \sum_{i=1}^D H_i |n_1 n_2 \dots n_D\rangle = \sum_{i=1}^D \hbar\omega(n_i + 1/2) |n_1 n_2 \dots n_D\rangle$$

$$= \hbar\omega(\underbrace{n_1 + n_2 + \dots + n_D}_{= N} + 1/2 D) |n_1 n_2 \dots n_D\rangle$$

autovalores H : degenerados!

• sobre os autovetores,

$$\text{definindo: } |0\rangle = \underbrace{|00\dots 0\rangle}_{D \text{ termos}}$$

$$e_i |0\rangle = 0, \quad i=1, 2, \dots, D$$

$$e_i |n_1 n_2 \dots n_D\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} \dots (a_D^\dagger)^{n_D}}{\sqrt{n_1! n_2! \dots n_D!}} |0\rangle \quad (127.4)$$

Eq. (127.1)

Ex.: oscilador harmônico isotrópico em 2-D,

nesse caso, o hamiltoniano do sistema é dado por:

$$H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + m^2 \omega^2 q_1^2) + \frac{1}{2m} (p_2^2 + m^2 \omega^2 q_2^2)$$

$$= \hbar \omega (a_1^\dagger a_1 + 1/2) + \hbar \omega (a_2^\dagger a_2 + 1/2)$$

$$= \hbar \omega (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) = \hbar \omega (N + 1) \quad (128.1)$$

↑
Eq. (127.3)

$$\hookrightarrow H |n_1, n_2\rangle = \hbar \omega (n_1 + n_2 + 1) |n_1, n_2\rangle = \hbar \omega (n + 1) |n_1, n_2\rangle; \quad n = n_1 + n_2$$

temos que:

	autovalores	autovetores
$n=0$	$\hbar \omega$	$ 00\rangle$
$n=1$	$2\hbar \omega$	$ 10\rangle, 01\rangle$
$n=2$	$3\hbar \omega$	$ 20\rangle, 11\rangle, 02\rangle$
$\vdots$		
n	$(n+1)\hbar \omega$	$ n0\rangle, n-1, 1\rangle, \dots, 0n\rangle$

notar: $n+1$ = degenerescência nível de energia n .

nesse caso, consideramos que $[H, N_1] = [H, N_2] = [N_1, N_2] = 0$, i.e., H, N_1 e N_2 podem ser diagonalizados simultaneamente.

alternativa: como $[H, N] = [H, L_z] = [N, L_z] = 0$, é possível determinar autovalores H em termos dos autovalores simultâneos de H e L_z ;

próxima etapa: verificar que $[H, L_z] = 0$.

componente z , op. momento angular:

$$L_z = x p_y - y p_x = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

como Eq. (120.3): $q_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_i^\dagger + a_i)$ e $p_i = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a_i^\dagger - a_i)$,
 $i=1,2$

verifica-se que (exercício):

$$L_z = i\hbar (a_1 a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2) \quad (129.1)$$

em princípio, Eqs. (128.1) e (129.1) $\rightarrow [H, L_z] = 0$;

alternativa: considerar operadores:

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 - i a_2) \quad a_+^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger + i a_2^\dagger) \quad (129.2)$$

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + i a_2) \quad a_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger - i a_2^\dagger)$$

verifica-se que (exercício):

$$[a_n, a_s] = [a_n^\dagger, a_s^\dagger] = 0 \text{ e } [a_n, a_s^\dagger] = \delta_{n,s} : \quad (129.3)$$

: ops. $a_+, a_+^\dagger$ e $a_-, a_-^\dagger$: 2 conjuntos ops. escadas independentes,

similares conjuntos $a_1, a_1^\dagger$ e $a_2, a_2^\dagger$!

notas Eq. (129.2): "notação" "espaço" a_1, a_2 .

de modo análogo à N_1 e N_2 , temos que

$$N_+ |n_+\rangle = n_+ |n_+\rangle, \quad n_+ = 0, 1, 2, \dots$$

(129.4)

$$N_- |n_-\rangle = n_- |n_-\rangle, \quad n_- = 0, 1, 2, \dots$$

$$\hookrightarrow N_+ |n_+ n_-\rangle = (n_+ + 1) |n_+ + 1, n_-\rangle \text{ e } N_- |n_+ n_-\rangle = (n_- - 1) |n_+, n_- - 1\rangle$$

$$\text{Eq. (129.4): } a_+^\dagger a_+ = \frac{1}{2} (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + i(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2))$$

$$a_-^\dagger a_- = \frac{1}{2} (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - i(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2))$$

$$\hookrightarrow N_+ + N_- = N_1 + N_2 = N$$

(130.1)

$$N_+ - N_- = i(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2) = L_z / \hbar$$

$\hookrightarrow [N, L_z] = [H, L_z] = 0 \rightarrow H, N, L_z$ podem ser simultaneamente diagonalizados:

$$H|n_+, n_-\rangle = \hbar\omega(N+1)|n_+, n_-\rangle = \hbar\omega(n_+ + n_- + 1)|n_+, n_-\rangle$$

(130.2)

$$L_z|n_+, n_-\rangle = \hbar(N_+ - N_-)|n_+, n_-\rangle = \hbar(n_+ - n_-)|n_+, n_-\rangle$$

como $n = n_+ + n_- = n_+ + n_-$, definindo $m = n_+ - n_-$, podemos escrever (130.2) como:

$$H|nm\rangle = \hbar\omega(n+1)|nm\rangle$$

(130.3)

$$L_z|nm\rangle = m\hbar|nm\rangle$$

notas:

	n_+	n_-	m
$n=0$	0	0	0
$n=1$	0	1	-1
	1	0	+1
$n=2$	0	2	-2
	1	1	0
	2	0	+2

$\hookrightarrow$ p/ n fixo, $m = -n, -n+2, \dots, n-2, n$: $n+1$ termos

$\hookrightarrow$ degenerescência nível de energia $n \sim [H, L_z] = 0$, i.e.

L_z é cte de movimento!

· Partícula carregada sob campo magnético,

ideia: determinar a solução algébrica no gauge simétrico

· inicial: mecânica clássica;

considerar: partícula massa m e carga q sob campos $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$;

Lagrangiana, limite não-relativístico (sistema gaussiano):

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - q\phi + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \quad (131.1)$$

$$\text{onde } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (131.2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$$

verifica-se que, eq. de Euler-Lagrange:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) ; \quad \vec{p} = m\vec{v} : \text{eq. de movimento} \quad (131.3)$$

como o momento canonicamente conjugado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + \frac{1}{c} q A_i ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$\hookrightarrow \vec{p} = m\vec{v} + \frac{1}{c} q \vec{A} , \quad (131.4)$$

verifica-se que a hamiltoniana do sistema:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{1}{c} q \vec{A} \right)^2 + q\phi \quad (131.5)$$

· mec. quântica:

hipótese $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} \neq 0$;

nesse caso, é interessante considerar o operador

$$\vec{v} = \frac{1}{m} (\vec{p} - \frac{1}{c} q \vec{A}) \quad : \text{op. velocidade} \quad (132.1)$$

verifica-se que:

$$[n_i, v_j] = \frac{i\hbar}{m} \delta_{ij} \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$[v_i, v_j] = \frac{i\hbar}{m^2 c} q \epsilon_{ijk} B_k \quad : \quad (132.2)$$

: comutador entre v_i e $v_j \sim$ componente $\vec{B}$ $\perp$ plano $i-j$!

notas:

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2} [p_i - \frac{1}{c} q A_i, p_j - \frac{1}{c} q A_j]$$

$$= -\frac{1}{m^2 c} q ([p_i, A_j] + [A_i, p_j])$$

como $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$ Eq. (77.2) $\rightarrow [p_i, A_j] = -i\hbar \partial_i A_j$

$$\hookrightarrow [v_i, v_j] = \frac{i\hbar}{m^2 c} q (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = \frac{i\hbar}{m^2 c} q \epsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k$$

hipótese: $\vec{B} = B \hat{z}$: campo magnético uniforme

$$\hookrightarrow \text{Eq. (132.2)} : [v_1, v_3] = [v_2, v_3] = 0$$

$$\text{e } [v_1, v_2] = \frac{i\hbar}{m} \cdot \frac{qB}{mc} = \frac{i\hbar \omega_c}{m} \quad ; \quad \omega_c : \text{frequência ciclotrônica} \quad (132.3)$$

nesse caso, hamiltoniano (131.5):

$$H = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \underbrace{\frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2)}_{= H_{\perp}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_3^2}_{= H_{\parallel}} = H_{\perp} + H_{\parallel} \quad (132.4)$$

$$\text{Eq. (123.4)} \rightarrow [H_1, H_2] = 0$$

notar H_2 : movimento partícula livre!

próxima etapa: considerar apenas movimento plano x-y,
i.e., H_1 .

identificando $v_1 \rightarrow q$ e $v_2 \rightarrow p \rightarrow$ Eqs. (132.3) e (132.4)

são análogas às correspondentes eqs. O.H.: Eqs. (106.2) e
(106.1)

↳ nesse caso, é interessante definir os op. escada:

$$b = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}} (v_1 + i v_2) \quad \text{e} \quad b^\dagger = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}} (v_1 - i v_2) \quad (133.1)$$

notar:

$$[b, b^\dagger] = \frac{m}{2\hbar\omega_c} [v_1 + i v_2, v_1 - i v_2] = 1$$

além disso,

$$b^\dagger b = \frac{m}{2\hbar\omega_c} (v_1 - i v_2)(v_1 + i v_2) = \frac{m}{2\hbar\omega_c} (v_1^2 + v_2^2 + i(v_1 v_2 - v_2 v_1))$$

$$= i\hbar\omega_c/m$$

$$= \frac{m}{2\hbar\omega_c} (v_1^2 + v_2^2) - 1/2$$

$$\text{Eq. (132.4)}: H_1 = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) = \hbar\omega_c (b^\dagger b + 1/2): \quad (133.2)$$

: similar H oscilador harmônico, Eq. (107.2)

↳ $E_n = \hbar\omega_c (n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$: autoenergias H_1 :

níveis de Landau.

entretanto, o hamiltoniano (107.2), $H_{\perp}$ descreve um sistema 2-D $\rightarrow$ níveis de energia E_n : altamente degenerados!

notas: espectro (133.2) independente gauge!

· p/ verificar que E_n é degenerado, vamos considerar o gauge simétrico

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} = \frac{1}{2} B (x \hat{y} - y \hat{x}) \quad (134.1)$$

nesse caso, as componentes op. velocidade (132.1):

$$v_1 = v_x = \frac{1}{m} (p_x - \frac{1}{c} q A_x) = \frac{1}{m} p_x + \frac{1}{2} \omega_c y \quad (134.2)$$

$$v_2 = v_y = \frac{1}{m} (p_y - \frac{1}{c} q A_y) = \frac{1}{m} p_y - \frac{1}{2} \omega_c x$$

Eqs. (132.4) e (134.2):

$$H_{\perp} = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{m} p_x + \frac{1}{2} \omega_c y \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{m} p_y - \frac{1}{2} \omega_c x \right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2)}_{H_{2D} \text{ cl freq. } \frac{1}{2} \omega_c} + \underbrace{\frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_c}{2} \right)^2 (x^2 + y^2) - \frac{1}{2} \omega_c (x p_y - y p_x)}_{L_z}$$

$$= H_{2D} - \frac{1}{2} \omega_c L_z$$

$$\stackrel{\text{Eq. (130.2)}}{=} \frac{\hbar \omega_c}{2} (N_+ + N_- + 1) - \frac{1}{2} \omega_c \hbar (N_+ - N_-) = \hbar \omega_c (N_- + \frac{1}{2})$$

$$\text{Eq. (129.4)}: H_+ |n_+, n_-\rangle = \hbar \omega_+ (n_+ + 1/2) |n_+, n_-\rangle$$

(135.1)

↳ níveis de Landau: degenerados!

Eqs. (133.1) e (134.2):

$$b = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}} \left(\frac{1}{m} p_x + \frac{1}{2} \omega_c y + \frac{i}{m} p_y - \frac{i}{2} \omega_c x \right)$$

$$= -i \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{\sqrt{\frac{m\omega_c/2}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega_c/2} p_x \right)}_{=a_1} + i \underbrace{\sqrt{\frac{m\omega_c/2}{2\hbar}} \left(y + \frac{i}{m\omega_c/2} p_y \right)}_{=a_2} \right)$$

 $= a_1$ $= a_2$

$$= -i \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + i a_2) = -i a_- \quad : \text{OK c/ Eq. (135.1)!}$$

↑ Eq. (129.2)

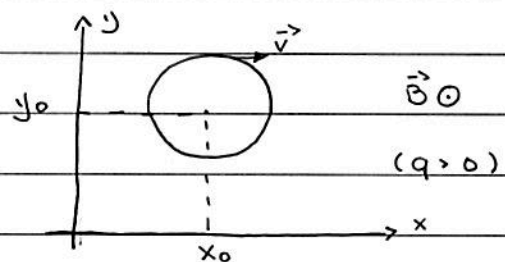
· sobre os op. escada a_+ e a_+ : verifica-se que eles estão relacionados ao op. centro de órbita!

Lembrar mec. clássica: trajetória partícula carregada sob campo $\vec{B} = B\hat{z}$, movimento 2-D: órbita circular;

eqs. da trajetória:

$$x(t) = x_0 + R \cos(\omega_c t + \alpha)$$

$$y(t) = y_0 - R \sin(\omega_c t + \alpha)$$



$$\hookrightarrow \dot{x}(t) = -R\omega_c \sin(\omega_c t + \alpha)$$

$$\dot{y}(t) = -R\omega_c \cos(\omega_c t + \alpha)$$

$$\hookrightarrow x_0 = x + \frac{1}{\omega_c} v_y \quad \text{e} \quad y_0 = y - \frac{1}{\omega_c} v_x : \text{coordenadas centro da órbita}$$

M.Q.: define-se op. centro de órbita:

$$X_0 = x + \frac{1}{\omega_c} v_y = n_1 + \frac{1}{\omega_c} v_2$$

(136.1)

$$Y_0 = y - \frac{1}{\omega_c} v_x = n_2 - \frac{1}{\omega_c} v_1$$

$$\hookrightarrow [X_0, Y_0] = [n_1 + v_2/\omega_c, n_2 - v_1/\omega_c]$$

$$= \frac{1}{\omega_c} ([v_2, n_2] - [n_1, v_1]) \stackrel{\text{Eq. (132.2)}}{=} = -\frac{2i\hbar}{m\omega_c}$$

de modo análogo a v_1 e v_2 , podemos definir op. escada:

$$g = \sqrt{\frac{m\omega_c}{4\hbar}} (X_0 - iY_0) \quad \text{e} \quad g^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_c}{4\hbar}} (X_0 + iY_0) \quad (136.2)$$

notas:

$$[g, g^\dagger] = \frac{m\omega_c}{4\hbar} (i[X_0, Y_0] - i[Y_0, X_0]) = 1$$

Eqs. (136.1) e (136.2):

$$g = \sqrt{\frac{m\omega_c}{4\hbar}} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{m\omega_c} p_y - \frac{i}{2}y + \frac{i}{m\omega_c} p_x \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sqrt{\frac{m\omega_c/2}{2\hbar}} \left(x + \frac{i}{m\omega_c/2} p_x \right)}_{= a_1} - i \underbrace{\sqrt{\frac{m\omega_c/2}{2\hbar}} \left(y + \frac{i}{m\omega_c/2} p_y \right)}_{= a_2} \right)$$

$= a_1$

$= a_2$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 - i a_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_+$$

notas:

$$g^\dagger g = \frac{m\omega_c}{4\hbar} (X_0 + iY_0)(X_0 - iY_0) = \frac{m\omega_c}{4\hbar} (X_0^2 + Y_0^2 - i(X_0 Y_0 - Y_0 X_0))$$

$$= -2i\hbar/m\omega_c$$

$$= \frac{m\omega_c}{4\hbar} (X_0^2 + Y_0^2) - 1/2$$

definição: $\ell_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m|\omega_c|}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{|q|B}}$: comprimento
magnético:
comprimento característico sistema

$$\hookrightarrow X_0^2 + Y_0^2 = \frac{4\hbar}{m\omega_c} (g^+g + 1/2) = 4\ell_B^2 (g^+g + 1/2)$$

$$= 2\ell_B^2 (a^+a + 1) :$$

: operador ~ "distância" centro de órbita - origem.

Obs.: resultados obtidos acima: inicial p/ descrição
efeito Hall quântico

(p/ detalhes, veja Cap. 12, Desai)