

Momento angular.

Refs.: Cap. 13, Messiah

Caps. 11, 16 + 17, Herzberger

Caps. 26 - 29, Desai

Obs.: notação Messiah, $\hbar = 1$!

consideram: partícula massa m sob potencial central $V = V(r)$, hamiltoniano do sistema:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) \quad (138.1)$$

Lembrem mec. clássica: momento angular orbital partícula w.r.t. origem:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (138.2)$$

é conservado; princípio de correspondência → comportamento similar mec. quântica.

Mec. quântica: Eq. (138.2): operador momento angular (orbital), onde \vec{r} op. posição e \vec{p} " momento

como: $[n_i, n_j] = [p_i, p_j] = 0 \in [n_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$: Eq. (60.1)

verifica-se que: $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$; $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$; $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$

ou $[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$ (138.3)

\wedge tensor completamente

$i, j, k = 1, 2, 3$

antisimétrico

além disso, temos que:

$$[L_i, n_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} n_k \quad \Leftarrow \quad [L_i, p_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} p_k \quad (139.1)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3$$

vamos verificar Eqs. (138.3) e (139.1):

$$\cdot [L_i, n_j] = \epsilon_{ikm} [n_k p_m, n_j] = \epsilon_{ikm} n_k \underbrace{[p_m, n_j]}_{= -i\hbar \delta_{mj}} = \epsilon_{ijk} n_k$$

\uparrow
Eq. (16.1)

similar: $[L_i, p_j]$!

$$\cdot [L_x, L_y] = [L_x, z p_x - x p_z] =$$

$$= \underbrace{[L_x, z]}_{= -i\hbar y} p_x + z \underbrace{[L_x, p_x]}_0 - \underbrace{[L_x, x]}_0 p_z - x \underbrace{[L_x, p_z]}_{= -i\hbar p_y}$$

$$= i\hbar (x p_y - y p_x) = i\hbar L_z$$

similar: $[L_y, L_z]$ e $[L_z, L_x]$.

$$\text{Definição: } L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad (139.2)$$

$$\text{Eq. (138.3)} \rightarrow [L_i, L^2] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{ou} \quad [\vec{L}, L^2] = 0 \quad (139.3)$$

Definição: se operador \vec{B} é definido por suas componentes

ao longo de três eixos ortogonais, e.g., B_x, B_y, B_z ,

onde B_i são operadores

\hookrightarrow op. \vec{B} é um operador vetorial (139.4)

notas: ops. $\vec{n}, \vec{p} \circ \vec{L}$: ops. vetoriais

Definição: operador vetorial \vec{J} é um op. momento angular (caso geral) se suas componentes são observáveis que satisfazem a álgebra:

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k \quad (140.1)$$

$$\text{ou } [J_x, J_y] = i\hbar J_z; \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x; \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

• Problema de autovalores J^2 e J_z ,

ideia: determinação algébrica do espectro do op. momento angular, similar procedimento utilizado para diagonalizar hamiltoniano oscilador harmônico.

Eq. (140.1): não é possível diagonalizar simultaneamente ops. J_x, J_y e J_z :

entretanto, similar Eq. (139.3), temos que

$$[J^2, J_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

(140.2)

$$\text{onde } J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

i.e., J^2 e J_i são observáveis compatíveis

escolha usual: diagonalizar simultaneamente J^2 e J_z !

• é interessante introduzir os operadores:

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad \in \quad J_- = J_x - iJ_y \quad (140.3)$$

$$\text{notar: } J_+^+ = J_-; \quad J_-^+ = J_+$$

ops. J_+, J_- e J_z definem operador \vec{J} .

• propriedades (verificam):

$$\cdot [J_z, J_+] = +\hbar J_+ \quad ; \quad [J_z, J_-] = -\hbar J_-$$

$$\cdot [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \quad ; \quad [J^2, J_+] = [J^2, J_-] = 0$$

(141.1)

$$\cdot J^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

$$\cdot J_+ J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z \quad ; \quad J_- J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z$$

• como $[J^2, J_z] = 0$, podemos escrever:

$$J_z |\lambda m\rangle = m\hbar |\lambda m\rangle$$

$$J^2 |\lambda m\rangle = \lambda \hbar^2 |\lambda m\rangle$$

(141.2)

notam: $\forall u \in E$, temos que $\langle u | J_x^2 | u \rangle = \|J_x|u\rangle\|^2 \geq 0$

$\hookrightarrow J_x^2, J_y^2, J_z^2 \in J^2$ são ops. positivos definidos

\hookrightarrow autovalores $\lambda \geq 0$.

• hipótese: $\langle \lambda m | \lambda m \rangle = 1$

(141.3)

• determinação possíveis valores λ e m , 4 etapas:

$$(1) \text{ notam: } \langle \lambda m | J^2 - J_z^2 | \lambda m \rangle = (\lambda - m^2) \hbar^2 \underbrace{\langle \lambda m | \lambda m \rangle}_1$$

$$\text{Eq. (141.1)} = \frac{1}{2} \langle \lambda m | J_+ J_- + J_- J_+ | \lambda m \rangle$$

$$\text{Eq. (140.3)} = \frac{1}{2} \langle \lambda m | J_+ J_- + J_- J_+ | \lambda m \rangle$$

$$\cdot \frac{1}{2} \|J_+ | \lambda m \rangle\|^2 + \frac{1}{2} \|J_- | \lambda m \rangle\|^2 \geq 0$$

$$\hookrightarrow \lambda - m^2 \geq 0 \text{ ou } m^2 \leq \lambda$$

(141.4)

(2) similear o. h., vamos determinar $J \pm 1 \lambda m >$,

$$\text{Eq. (J41.1)} : [J_z, J_+] = \hbar J_+$$

$$\hookrightarrow (J_z J_+ - J_+ J_z) | \lambda m > = \hbar J_+ | \lambda m >$$

$$\hookrightarrow J_z (J_+ | \lambda m >) = (m+1) \hbar (J_+ | \lambda m >), \text{ i.e.}$$

$J_+ | \lambda m >$ é autovetor op. J_z c/ autovalor $(m+1) \hbar$

$$\hookrightarrow J_+ | \lambda m > = C_+ (\lambda, m) | \lambda m + 1 > \quad (\text{J42.1})$$

$$\text{como: } \langle \lambda m | J_- J_+ | \lambda m > = |C_+(\lambda, m)|^2$$

$$\text{Eq. (J41.1)} \Rightarrow \langle \lambda m | J_-^2 - J_z^2 - \hbar J_z | \lambda m > = (\lambda - m^2 - m) \underbrace{\hbar^2}_{1} \langle \lambda m | \lambda m >$$

$$\hookrightarrow C_+(\lambda, m) = \sqrt{\lambda - m(m+1)} e^{i\delta} \hbar$$

escolha: $\delta = 0$!

$$\hookrightarrow J_+ | \lambda m > = \sqrt{\lambda - m(m+1)} \hbar | \lambda m + 1 > \quad (\text{J42.2})$$

de modo análogo, verifica-se que (exercício):

$$J_- | \lambda m > = C_- (\lambda, m) | \lambda m - 1 >; \quad C_- (\lambda, m) = \sqrt{\lambda - m(m-1)} \hbar$$

$$\hookrightarrow J_- | \lambda m > = \sqrt{\lambda - m(m-1)} \hbar | \lambda m - 1 > \quad (\text{J42.3})$$

Eqs. (J42.2) e (J42.3): ops. $J \pm$ modificam valor m de uma unidade (λ fixo)!

(3) como $m^2 \leq \lambda \rightarrow \exists \text{ máx} (m) = j$, p/ λ fixo

$$\text{se } m = j \quad \text{Eq. (142.2)} \rightarrow J_+ | \lambda j \rangle = 0$$

$$\text{Eq. (141.1)} : J_- (J_+ | \lambda j \rangle) = (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z) | \lambda j \rangle = (\lambda - j^2 - j) \hbar^2 | \lambda j \rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda = j(j+1)$$

similar: $\exists \text{ min} (m) = j'$, p/ λ fixo

$$\text{se } m = j' \quad \text{Eq. (142.3)} \rightarrow J_- | \lambda j' \rangle = 0$$

$$\text{Eq. (141.1)} : J_+ (J_- | \lambda j' \rangle) = (J^2 - J_z^2 + \hbar J_z) | \lambda j' \rangle = (\lambda - j'^2 + j') \hbar^2 | \lambda j' \rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda = j'(j'-1)$$

Dessa forma: $j(j+1) = j'(j'-1) \rightarrow j' = -j : \text{OK}$

e

$j' = j+1 : \text{NOT OK pois } j' \text{ é minimo!}$

$$\hookrightarrow \lambda = j(j+1)$$

notação: $| \lambda m \rangle \rightarrow | jm \rangle ; -j \leq m \leq j$. (143.1)

(4) considerar j e m fixos,

vimos que

$$J_z (J_+ | jm \rangle) = (m+1) \hbar (J_+ | jm \rangle) \rightarrow J_+ | jm \rangle \propto | jm+1 \rangle$$

de modo análogo, verifica-se que:

(143.2)

$$J_z (J_+^2 | jm \rangle) = (m+2) \hbar (J_+^2 | jm \rangle) \rightarrow J_+^2 | jm \rangle \propto | jm+2 \rangle$$

$$\text{notar: } ([J_z, J_+] = +\hbar J_+) |jm\rangle$$

$$\hookrightarrow J_z J_+^2 |jm\rangle - \underbrace{J_+ J_z}_{(m+j)} |jm\rangle = \hbar J_+^2 |jm\rangle$$

$$\hookrightarrow J_z (J_+^2 |jm\rangle) = (m+2)\hbar (J_+^2 |jm\rangle)$$

$$\dots J_z (J_+^p |jm\rangle) = (m+p)\hbar (J_+^p |jm\rangle) \rightarrow J_+^p |jm\rangle \propto |m+p\rangle$$

como $m \leq j \rightarrow$ a sequência acima deve apresentar um limite superior, i.e., $J_+^{p+1} |jm\rangle = 0$ ou

$$m+p = j \rightarrow j-m = p \in \mathbb{N} \quad (144.1)$$

de modo análogo, verifica-se que:

$$J_z (J_- |jm\rangle) = (m-j)\hbar (J_- |jm\rangle) \rightarrow J_- |jm\rangle \propto |m-j\rangle$$

$$J_z (J_-^2 |jm\rangle) = (m-2)\hbar (J_-^2 |jm\rangle) \rightarrow J_-^2 |jm\rangle \propto |m-2\rangle$$

:

$$J_z (J_-^q |jm\rangle) = (m-q)\hbar (J_-^q |jm\rangle) \rightarrow J_-^q |jm\rangle \propto |m-q\rangle$$

como $-j \leq m \rightarrow$ a sequência acima deve apresentar um limite inferior:

$$m-q = -j \rightarrow m+j = q \in \mathbb{N} \quad (144.2)$$

$$\hookrightarrow (144.2) \oplus (144.1) : 2j = p+q$$

$$\therefore 2m = q-p$$

como $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\hookrightarrow 2j = p + q \rightarrow j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

(145.1)

$$2m = q - p \rightarrow m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \dots$$

como p/ j fixo $-j \leq m \leq j$ Eq. (145.1) $\rightarrow m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$

$(2j+1)$ valores!

Resumo problema autovalores J^2 e J_z :

$$J^2 |jm\rangle = j(j+1) \hbar^2 |jm\rangle ; \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$J_z |jm\rangle = m \hbar |jm\rangle ; \quad -j \leq m \leq +j$$

$$J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \hbar |jm \pm 1\rangle$$

(145.2)

$$\langle j'm' | jm \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

notar:

(1) cada j define um subespaço $E(j)$ c/ $\dim E(j) = 2j+1$

(2) base $E(j)$: $(2j+1)$ vetores $|jm\rangle$, j fixo \in

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

(3) como $J_{\pm} |jm\rangle$ e $J_z |jm\rangle \in E(j)$

\hookrightarrow se $|+\rangle \in E(j) \rightarrow J_{\pm} |+\rangle \in J_z |+\rangle \in E(j)$:

: subespaço $E(j)$ é invariante sob ação J_{\pm} e J_z !

Caso geral: se operador $F = F(\vec{J})$ e $|+\rangle \in E(j)$

$\hookrightarrow F(\vec{J})|\psi\rangle \in E(j)$: subespaço $E(j)$ é invariante sob ação $F(\vec{J})$

(4) representação operadores J^2, J_z, J_\pm na base $|jm\rangle$ (j fixo): matrizes $(2j+1) \times (2j+1)$;

elementos de matriz:

$$\xrightarrow{\text{Eq. (145.2)}} \langle j'm' | J^2 | jm \rangle = j(j+1) \hbar^2 \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\langle j'm' | J_z | jm \rangle = m \hbar \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

(146.1)

$$\langle jm | J_\pm | j'm' \rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} \hbar \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{m,m\pm 1}$$

notar: nessa representação, as matrizes associadas aos ops. J^2 e J_z são diagonais;

espaço de Hilbert $\mathcal{E} = E(0) \oplus E(1/2) \oplus E(1) \oplus \dots$

• Momento angular orbital,

caso particular, $\vec{J} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$: Eq. (138.2)

ideia: consideram o problema de autovalores de L^2 e L_z ;

nesse caso, é interessante expressar as componentes

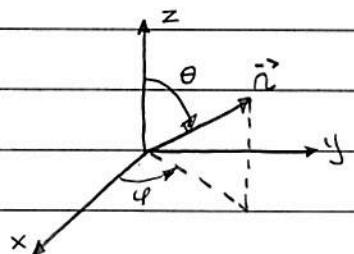
op. \vec{L} na representação de coordenadas, em particular,

em termos de coordenadas esféricas r, θ, ϕ ;

Lembra: $x = r \sin \theta \cos \phi$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



$$\vec{v} = \hat{n} \frac{\partial}{\partial n} + \hat{\theta} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{n \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\hat{n} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \quad (147.1)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

como na representação de coordenadas, $\vec{L} = \vec{n} \times \frac{i}{\hbar} \vec{v}$

$$\hookrightarrow \vec{L} = -i\hbar \vec{n} \times \left(\hat{n} \frac{\partial}{\partial n} + \hat{\theta} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{n \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

$$= -i\hbar (\hat{n} \times \hat{\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta} + i\hbar (\hat{n} \times \hat{\phi}) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\text{Eq (147.1)} : \hat{n} \times \hat{\theta} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

$$\hat{n} \times \hat{\phi} = -\cos \theta \cos \varphi \hat{x} - \sin \varphi \cos \theta \hat{y} + \sin \theta \hat{z}$$

$$\hookrightarrow \vec{L} = L_x \hat{x} + L_y \hat{y} + L_z \hat{z},$$

$$\text{onde } L_x = i\hbar (\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi})$$

$$L_y = i\hbar (-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi})$$

(147.2)

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

verifica-se que (exercício) :

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = \pm \hbar e^{\pm i\varphi} (\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi})$$

(147.3)

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

notam: $L_i, L_z \in L^2$: funções apenas coordenadas θ e φ ou \hat{n}

\hookrightarrow autofunções $L^2 \in L_z \Leftrightarrow Y = Y(\theta, \varphi)$

• problema de autovalores $L^2 \in L_z$,
podemos escrever:

$\langle \hat{n} | L^2 | \ell m \rangle = Y_e^m(\theta, \varphi) = Y_e^m(\hat{n})$: harmônico esférico

Eq. (147.2):

$$\langle \hat{n} | L^2 | \ell m \rangle = \ell(\ell+1) \hbar^2 \langle \hat{n} | \ell m \rangle \rightarrow L^2 Y_e^m(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) \hbar^2 Y_e^m(\theta, \varphi)$$

$$\langle \hat{n} | L_z | \ell m \rangle = m \hbar \langle \hat{n} | \ell m \rangle \rightarrow L_z Y_e^m(\theta, \varphi) = m \hbar Y_e^m(\theta, \varphi)$$

(148.1)

• Eqs. (147.2) e (148.1):

$$-i\hbar \partial_\varphi Y = m \hbar Y$$

$$\text{se } Y(\theta, \varphi) = F(\theta) \Phi(\varphi) \rightarrow -i\hbar \partial_\varphi \Phi = m \hbar \Phi$$

$$\text{solução: } \Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$$

(148.2)

④ condição: $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$: Φ é uma função single-valued

$$\hookrightarrow m \in \mathbb{Z} \quad \text{Eq. (145.3)} \rightarrow \ell = 0, 1, 2, \dots$$

• por operador L^2 , novamente Eqs. (147.2) e (148.1):

$$-\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right) Y = \ell(\ell+1) \hbar^2 Y$$

como $Y(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} F(\theta)$, temos que

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) F(\theta) = 0$$

$$\text{se } u = \cos \theta \rightarrow \frac{d}{d\theta} = \frac{du}{d\theta} \frac{d}{du} = -\sin \theta \frac{d}{du} \quad \underline{\underline{e}} \quad F(\theta) = \bar{F}(u)$$

(149.1.0)

$$\hookrightarrow \left(\frac{d}{du} \left((1-u^2) \frac{d}{du} \right) + l(l+1) - \frac{m^2}{1-u^2} \right) \bar{F}(u) = 0 \quad : \text{veja Eq. (B.74), Messiah}$$

solução: $F(u) = P_e^m(u) = P_e^m(\cos \theta)$: polinômio associado de Legendre

$$\hookrightarrow Y_e^m(\theta, \varphi) = C(e, m) e^{im\varphi} P_e^m(\cos \theta)$$

(149.1)

\hat{L} cte de normalização

Alternativa: procedimento similar oscilação harmônico, onde as (Messiah) autofunções são determinadas a partir da função de onda do estado fundamental;

pr momento angular, Eqs. análogas à Eq. (111.3):

$$|+1ee\rangle = 0 \quad \underline{\underline{e}} \quad |L-1e, -e\rangle = 0$$

(149.2)

em particular, ⊕ Eq. (147.3):

$$\langle \hat{n}_1 | L_+ | 1ee \rangle = 0$$

$$+ h e^{i\varphi} (\omega \theta + i \cot \theta \omega \varphi) Y_e^2(\theta, \varphi) = 0$$

$$\text{como } Y_e^2(\theta, \varphi) = e^{i\varphi} F(\theta) \rightarrow h e^{i(l+1)\varphi} (\omega \theta - \ell \cot \theta) F(\theta) = 0$$

$$\text{solução: } F(\theta) = C(\ell) (\sin \theta)^\ell = C(\ell) \sin^\ell \theta$$

$$\hookrightarrow \langle \hat{n} | l e e \rangle = Y_l^e(\theta, \varphi) = c(e) e^{ie\varphi} \sin e \theta \quad (150.1)$$

condição de normalização

$$\text{Eq. (145.2)} : \langle e' m' | l e m \rangle = \delta_{e'e} \delta_{m'm}$$

$$\hookrightarrow \int d\Omega \langle e' m' | \hat{n} \rangle \langle \hat{n} | l e m \rangle = \delta_{e'e} \delta_{m'm}$$

$$\text{como } |\hat{n}\rangle = |n\rangle |\theta, \varphi\rangle = |n\rangle |\hat{n}\rangle \text{ e } d\Omega = n^2 dn \underbrace{\sin \theta d\theta d\varphi}_{d\Omega}$$

$$\hookrightarrow \int d\Omega \langle e' m' | \hat{n} \rangle \langle \hat{n} | l e m \rangle = \delta_{e'e} \delta_{m'm}$$

$$\text{ou } \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_e^{m'}(\theta, \varphi) Y_e^m(\theta, \varphi)^* = \delta_{e'e} \delta_{m'm} : \text{ condição de orthonormalização de harmônicos esféricos} \quad (150.2)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \int d\Omega |Y_e^e(\theta, \varphi)|^2 &= 1 \rightarrow |c(e)|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{2e+3} = \\ &= |c(e)|^2 \cdot 4\pi \cdot \frac{(2e+1)!}{(2e+3)!} = 1 \end{aligned} \quad (150.3)$$

- fase $c(e)$: veja abaixo !

$$\text{Eq. (145.2)} : L_s^s |l e e \rangle \propto |l, e-s \rangle$$

$$\text{se } s = e-m \rightarrow |l e m \rangle \propto L_{-}^{e-m} |l e e \rangle ;$$

de fato, verifica-se que (exercício) :

$$\begin{aligned} |l e m \rangle &= h^{m-e} \underbrace{\frac{(e+m)!}{(2e)! (e-m)!}}_{= a(e,m)} L_{-}^{e-m} |l e e \rangle \quad (150.4) \\ &= a(e,m) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \langle \hat{n} | l e m \rangle = Y_e^m(\theta, \varphi) = a(e,m) \langle \hat{n} | L_{-}^{e-m} | l e e \rangle$$

$$Y_e^m(\theta, \varphi) = a(l, m) L_-^{l-m} Y_e^l(\theta, \varphi) \quad (151.1)$$

notan:

$$\begin{aligned}
 (1) L_-(e^{im\varphi} F(\theta)) &= -\hbar e^{-i\varphi} (\partial_\theta - i \cot \theta \partial_\varphi) e^{im\varphi} F(\theta) = \\
 &= -\hbar e^{i(m-1)\varphi} \left(\frac{d}{d\theta} + \frac{m \cos \theta}{\sin \theta} \right) F(\theta) \\
 &= -\hbar e^{i(m-1)\varphi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^m \theta F(\theta)) = \\
 &\stackrel{\text{Eq. (149.1.0)}}{=} \hbar e^{i(m-1)\varphi} \frac{1}{\sin^{m-1} \theta} \frac{d}{d\cos \theta} (\sin^m \theta F(\theta)) \quad (151.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) L_-^2 (e^{im\varphi} F(\theta)) &= -\hbar L_- (e^{i(m-1)\varphi} F'(\theta)) \\
 &= (-\hbar)(-\hbar) e^{i(m-2)\varphi} \frac{1}{\sin^m \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^m \theta F'(\theta)) \\
 &\qquad \qquad \qquad \frac{d}{d\theta} (\sin^m \theta F(\theta)) \\
 &= (+\hbar)^2 e^{i(m-2)\varphi} \frac{1}{\sin^{m-2} \theta} \frac{d^2}{d\cos^2 \theta} (\sin^m \theta F(\theta)) \quad (151.3)
 \end{aligned}$$

Eqs. (151.2) e (151.3)

$$L_s L_-^s (e^{im\varphi} F(\theta)) = (+\hbar)^s e^{i(m-s)\varphi} \frac{\sin^{s-m} \theta}{\sin^s \theta} \frac{d^s}{d\cos^s \theta} (\sin^m \theta F(\theta)) \quad (151.4)$$

Eqs. (150.3), (151.1) e (151.4):

$$Y_e^m(\theta, \varphi) = a(l, m) c(l) L_-^{l-m} (e^{il\varphi} \sin^l \theta)$$

$$\text{se } m = l \text{ e } F(\theta) = \sin^l \theta \text{ em (151.4)}$$

$$\hookrightarrow Y_e^m(\theta, \varphi) = a(l, m) c(e) (+h)^s e^{i(l-s)\varphi} \frac{\sin^{s-e}\theta}{d \cos^s\theta} (\sin^{2l}\theta)$$

se $s = l - m$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow Y_e^m(\theta, \varphi) &= a(l, m) c(e) (+h)^{l-m} e^{im\varphi} \frac{\sin^m\theta}{d \cos^{l-m}} d^{l-m} \sin^{2l}\theta \quad (152.1) \\ &= (-1)^e (-1)^m 2^e e! (l-m)! P_e^m(\cos\theta) \\ &\qquad \qquad \qquad (l+m)! \end{aligned}$$

fase $c(e)$ (veja Eq. (11.76), Menzbachen)

$$\hookrightarrow Y_e^m(\theta, \varphi) = (-1)^e e^{i\delta_e} \sqrt{\frac{(2e+s)}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (-1)^m e^{im\varphi} P_e^m(\cos\theta) \quad (152.2)$$

④ condição: $Y_e^0(0, 0) \in \mathbb{R}^+$ ---

$$\text{como: } Y_e^0(0, 0) = (-1)^e e^{i\delta_e} \sqrt{\frac{(2e+1)/4\pi}{1}} P_e(1) \xrightarrow{\downarrow} (-1)^e e^{i\delta_e} = 1 !$$

• Eq. (152.1) pode ser escrita como:

$$Y_e^m(\theta, \varphi) = c(e) \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2e)!(l-m)!}} e^{im\varphi} \frac{\sin^m\theta}{d \cos^{l-m}} d^{l-m} \sin^{2l}\theta \quad (152.3)$$

considerando inicialmente $l-1e, -e> = 0$ e seguindo procedimento similar, verifica-se que a seguinte expressão alternativa para harmônico esférico:

$$Y_e^m(\theta, \varphi) = (-1)^m c(e) \sqrt{\frac{(l-m)!}{(2e)!(l+m)!}} e^{-im\varphi} \frac{\sin^m\theta}{d \cos^{l+m}} d^{l+m} \sin^{2l}\theta \quad (152.4)$$

Eqs. (152.3) e (152.4) → verificação propriedades:

$$(i) Y_{\ell}^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell}^{m*}(\theta, \varphi)$$

(153.1)

$$(ii) Y_{\ell}^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

Lembra inverção espacial $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$: $r \rightarrow r$

(~ transformação de $\theta \rightarrow \pi - \theta$)

paridade) $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$

• Exemplos harmônicos esféricos:

$$Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta = \sqrt{3/4\pi} z/n$$

(153.2)

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{3/8\pi} e^{\pm i\varphi} \sin \theta = \mp \sqrt{3/8\pi} (x \pm iy)/n$$

• Propriedades harmônicas esféricos

(1) $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$: conjunto funções ontonomais,
veja Eq. (150.2)

(2) verifica-se que $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$: conjunto completo de
funções ontonomais

$\hookrightarrow \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_{\ell m}|^2 = 1$: relação de
completudeza

(153.3)

temos que:

$$\langle \hat{r}_1 | \hat{r}'_1 \rangle = \sum_{\ell, m} \langle \hat{r}_1 | Y_{\ell m} \rangle \langle Y_{\ell m} | \hat{r}'_1 \rangle$$

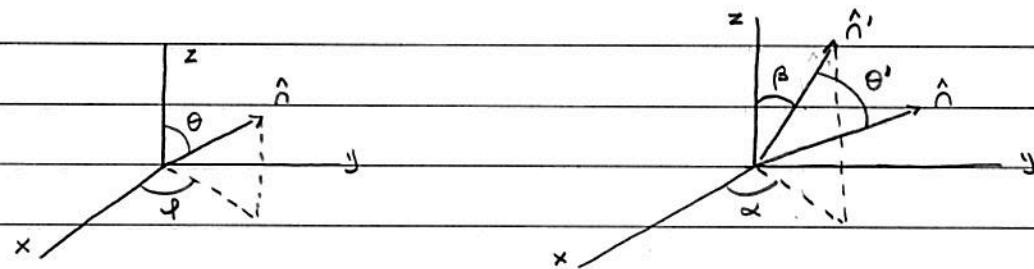
se direção \hat{n} : coordenadas (θ, φ) e
 " \hat{n}' : " (β, α)

$$\hookrightarrow \sum_{l,m} Y_l^m{}^*(\beta, \alpha) Y_l^m(\theta, \varphi) = \langle \hat{n}, \hat{n}' \rangle$$

definindo $\langle \hat{n}, \hat{n}' \rangle = \delta(\hat{n}, \hat{n}')$: função de eta tal que

$$\int d\Omega' F(\hat{n}') \delta(\hat{n}, \hat{n}') = F(\hat{n})$$

$$\hookrightarrow \sum_{l,m} Y_l^m{}^*(\beta, \alpha) Y_l^m(\theta, \varphi) = \delta(\hat{n}, \hat{n}') \quad (154.1)$$



- considerar direções \hat{n} e \hat{n}' como na Fig. acima, sendo θ' : ângulo entre \hat{n} e \hat{n}' ; verifica-se que

$$P_e(\cos \theta') = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} Y_l^m{}^*(\beta, \alpha) Y_l^m(\theta, \varphi) : \quad (154.2)$$

: teorema de adição p/ harmônicos esféricos

- Eqs. (154.1) e (154.2),

como $\cos \theta' = \hat{n} \cdot \hat{n}'$, temos que

$$\sum_{l>0} (2l+1) P_e(\hat{n} \cdot \hat{n}') = 4\pi \delta(\hat{n}, \hat{n}') \quad (154.3)$$

como, em 3-D, $\delta(\vec{n})$ pode ser escrita em coordenadas esféricas como

$$\delta(\vec{n} - \vec{n}') = \frac{1}{\pi^2} \delta(n - n') \delta(\hat{n}, \hat{n}') \quad (155.1)$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (154.3)}} \delta(\vec{n} - \vec{n}') = \frac{1}{\pi^2} \delta(n - n') \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^{l+1} P_l(\hat{n}, \hat{n}') \quad (155.2)$$

: útil p/ problemas de
espalhamento!

• Rotações.

ideia: determinar a relação entre os operadores momento angular \vec{j} e (unitário) de notação $U(R)$;

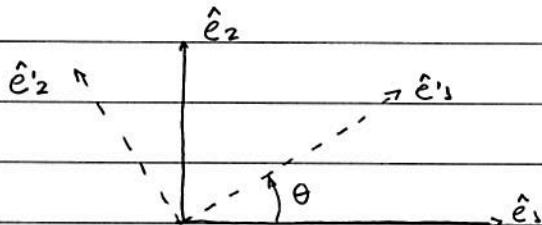
• inicial: considerações sobre notação de vetores, espaço real

• Definição: notação w.r.t. ponto 0: deslocamento de todos os pts de espaço sendo que o ponto 0 permanece fixo;

nesse caso, cada pt P \rightarrow ponto P' : correspondência one-to-one

Ex.: considerar referencial (REF) 0, versões (base) $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ e
 " " " " " " " " " " $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$

hipótese: REF $0' = \text{REF } 0 + \text{notação ângulo } \theta \text{ w.r.t. eixo } \hat{e}_3$



$$\begin{aligned} \text{temos que: } \hat{e}'_1 &= \cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_2 &= -\sin\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_3 &= \hat{e}_3 \end{aligned}$$

ou $\hat{e}'_j = \sum_i \hat{e}_i R_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$: versões \hat{e}'_i : combinacão linear
versões \hat{e}_i

$$\hookrightarrow R = R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{matriz de notação} \quad (156.1)$$

Caso geral:

$$\hat{e}'_j = \sum_i \hat{e}_i R_{ij} \quad (156.2)$$

$$\text{como } \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \text{ e } \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}$$

$$\hookrightarrow \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \sum_{k,m} R_{ki} R_{mj} \underbrace{\hat{e}_k \cdot \hat{e}_m}_{\delta_{km}} = \sum_k R_{ki} R_{kj} =$$

$$= \sum_k R_{ik}^T R_{kj} = \delta_{ij} \quad (156.3)$$

$$\hookrightarrow R^T R = R R^T = I_{3 \times 3} \Rightarrow R^T = R^{-1} : \text{matriz de notação } R = \text{ " ortonormal } \quad (\text{veja pg. 39})$$

$$\text{notam: } R^T R = I \Rightarrow \det(R^T R) = \det R^T \cdot \det R = (\det R)^2 = 1$$

$\hookrightarrow \det R = \pm 1$: \exists duas classes notações ou transformações ortogonais

se $\det R = +1$: notação

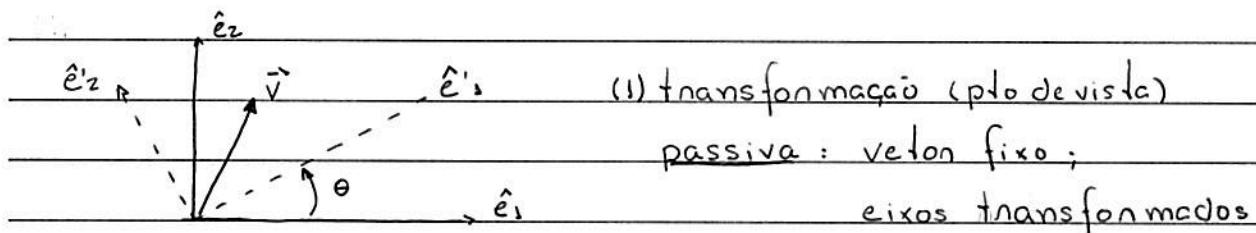
se $\det R = -1$: reflexão, inversão espacial

Obs.: $\det R = 1$: matriz R é unimodular

• para cada notação $R \rightarrow$ matriz $R_{3 \times 3}$: Eq. (156.2)

• uma notação R pode ser definida por uma direção \hat{n} ou \hat{u}
e um ângulo θ : $R_n(\theta)$: matriz de notação

• consideram vetor \vec{v} sob notação R ;
duas possibilidades:



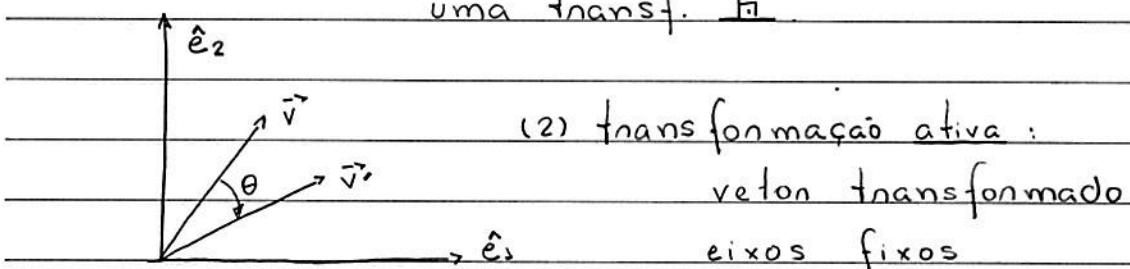
temos que: $\vec{v} = \sum_i v_i \hat{e}_i = \sum_j v'_j \hat{e}'_j$

/ > componentes \vec{v} w.r.t. REF 0' " " " REF 0

Eq. (156.2) $\rightarrow \sum_i v_i \hat{e}_i = \sum_j \sum_i v'_j \hat{e}'_i R_{ij}$

$\hookrightarrow v_i = \sum_j R_{ij} v'_j \quad$ Eq. (156.3) $\rightarrow v'_i = \sum_j R_{ij} v_j$ (157.1)
(VERIFICAR)

* Definição vetor: objeto formado por 3 componentes que se transformam como (157.1) sob uma transf. h



nesse caso, $\vec{v}' = R \vec{v}$ ou

(158.1)

$$v'_i = R_{ij} v_j$$

\rightarrow componentes \vec{v}' w.r.t. REF 0

" " \vec{v}' " " "

notar: matriz R pode ser vista como um operador que transforma \vec{v} em \vec{v}' !

considerar: notação infinitesimal $\theta = \epsilon$, $|\epsilon| \ll 1$ w.r.t. eixo \hat{z} .

$$\text{Eq. (156.1)} : R_z(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pois } \cos \epsilon \approx 1 \text{ e } \sin \epsilon \approx \epsilon$$

$$\hookrightarrow \vec{v}' = R_z(\epsilon) \vec{v} : (v'_1, v'_2, v'_3) = (v_1, v_2, v_3) + \epsilon (-v_2, v_1, 0)$$

$$\text{como } (-v_2, v_1, 0) = \hat{z} \times \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = R_z(\epsilon) \vec{v} = \vec{v} + \epsilon (\hat{z} \times \vec{v})$$

$$\hookrightarrow \text{caso geral: } \vec{v}' = \vec{v} + \epsilon (\hat{n} \times \vec{v})$$

(158.2)

$$R_{\hat{n}}(\epsilon)$$

se R_x e R_z : duas notações $\rightarrow R = R_z R_x$: notação

próxima etapa: vamos considerar apenas transf. ativas!

Rotação do estado do sistema ψ ,

considerar: partícula descrita pela função de onda $\psi(\vec{r})$;

se partícula submetida a uma notação R

$$\hookrightarrow \psi'(\vec{r}) = R[\psi(\vec{r})] : \text{função de onda } \underline{\text{após notação }} R$$

temos que:

$$\text{medidas realizadas} \xleftarrow{\text{RELACIONADAS VIA } R} \text{medidas realizadas}$$

antes notação R depois notação R

(159.1)

Ex.: relação entre

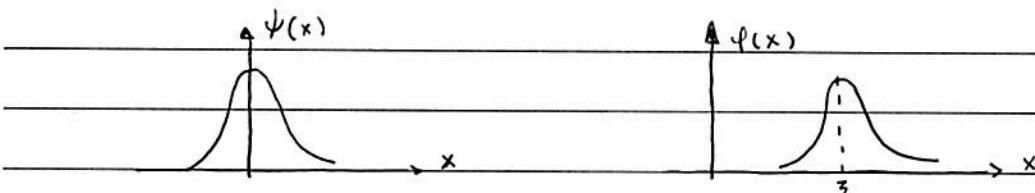
$|\psi(\vec{r})|^2$: densidade prob. posição partícula antes R e

$|\psi'(\vec{r})|^2$: " " " " " " depois R;

Lembrem: translacão espacial 1-D, pg. 70:

$$\text{se } |\psi\rangle = U(z) |\psi\rangle \rightarrow \langle x | \psi \rangle = \psi(x) = \psi(x-z) = \psi(U(-z)x)$$

$$\hookrightarrow |\psi(x)|^2 = |\psi(U^{-1}(z)x)|^2$$



↪ similar p/ notação:

$$|\psi'(\vec{r})|^2 = |\psi(R^{-1}\vec{r})|^2 \quad (159.2)$$

de modo análogo p/ função de onda na representação de momento:

$$\text{se } \phi'(\vec{p}) = R[\phi(\vec{p})] \rightarrow |\phi'(\vec{p})|^2 = |\phi(R^{-1}\vec{p})|^2 \quad (159.3)$$

notam: Eqs. (159.2) e (159.3) ou se (lembrem relação entre $\psi(\vec{r})$ e $\phi(\vec{p})$ via transf. de Fourier)

$$\psi'(\vec{r}) = R[\psi(\vec{r})] = \psi(R^{-1}\vec{r}) \quad (159.4)$$

Eq. (159.4): relação linear entre ψ e ψ'

↪ Ex. operador linear $U(R)$ tal que:

$|\psi\rangle$ notação R $\rightarrow |\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle$: transformação
estado do sistema
sob notação R

como Eq. (159.1) : norma $|\psi\rangle$ é preservada sob R

$\hookrightarrow U(R)$ é um operador unitário

· p/ op. densidade (94.1) :

$$\text{se } \hat{P} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

$$\hookrightarrow \text{NOTAR: } = p_i$$

$$\hookrightarrow \hat{P}' = \sum_i p'_i |\psi'_i\rangle \langle \psi'_i|$$

$$\text{Eq. (160.1)} \quad = \sum_i p_i U(R)|\psi_i\rangle \langle \psi_i|U^+(R) = U(R)\hat{P}U^+(R) \quad (160.2)$$

· Rotação de um observável,

considerar observável Q e

$Q' = R[Q]$: observável obtido a partir de Q
via notação R

devido (159.1) \rightarrow condição: $\langle \psi | Q | \psi \rangle = \langle \psi' | Q' | \psi' \rangle$,

onde $|\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle$

$\hookrightarrow \langle \psi | Q | \psi \rangle = \langle \psi | U^+(R)Q'U(R)|\psi\rangle$; como $|\psi\rangle$ é arbitrário

$\hookrightarrow Q = U^+(R)Q'U(R)$ ou $Q' = U(R)QU^+(R)$: (160.3)

: transf. observável Q sob notação R !

Eqs. (160.2) e (160.3) : sob notação R, estados e observáveis se transformam sob o mesmo operador unitário $U(R)$!

- se, p/ a notação R, observável S é tal que

$$S' = U(R) S U^*(R) = S \text{ ou } [U(R), S] = 0 \quad (161.1)$$

\hookrightarrow S é um op. escalar : invariante sob notação

- consideram op. vetorial $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$,

Definição : $v'_i = R[v_i]$: transformação componentes op. \vec{v} sob notação R

$$\text{como } v'_i = \vec{v} \cdot \hat{e}'_i \rightarrow v'_i = R[v_i] = \vec{v} \cdot \hat{e}'_i = \sum_j \vec{v} \cdot \hat{e}_j R_{ji}$$

$$= \sum_j R_{ij}^t v_j$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (160.3)}} v'_i = U(R) v_i U^*(R) = \sum_j R_{ij}^t v_j \quad (161.2)$$

Eq. (161.2) : (i) relação entre op. unitário $U(R)$ e a matriz de notação R ;

(ii) nota similitude transf. componentes vetor (usual) \vec{v} , Eq. (158.3), sob notação R,
poném $R \rightarrow R^t$!

- definição alternativa :

$$\text{se } |\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle$$

$$\hookrightarrow \langle \psi' | v_i | \psi' \rangle = \sum_j R_{ij} \langle \psi | v_j | \psi \rangle, \quad (161.3)$$

condição !

i.e., condição: sob notação, as componentes $\langle v_i |$ se transformam como as componentes de um vetor usual, Eq. (158.1) ~ princípio de correspondência

$$\text{notam: } \langle \psi' | v_i | \psi' \rangle = \langle \psi | U^+(R) v_i U(R) | \psi \rangle = \sum_j R_{ij} \langle \psi | v_j | \psi \rangle$$

como $|\psi\rangle$ é arbitrário

$$\hookrightarrow U^+(R) v_i U(R) = \sum_j R_{ij} v_j \rightarrow U^+(R^{-1}) v_i U(R^{-1}) = \sum_j R_{ij}^{-1} v_j$$

$$\text{como } U(R) U^+(R) = U(R) U^{-1}(R) = U(R) U(R^{-1}) = I$$

$$\hookrightarrow U(R) v_i U^+(R) = \sum_j R_{ij}^{-1} v_j = \sum_j R_{ij}^t v_j : \text{Eq. (161.3)}$$

• similar p/ op. escalares S :

$$\langle \psi' | S | \psi' \rangle = \langle \psi | U^+(R) S U(R) | \psi \rangle = \langle \psi | S | \psi \rangle \quad (162.1)$$

\uparrow condição

como $|\psi\rangle$ é arbitrário

$$\hookrightarrow U^+(R) S U(R) = S \rightarrow [U(R), S] = 0 : \text{Eq. (161.3)} !$$

Obs.: similar vetores (pg. 157), a Eq. (161.3) pode ser considerada como a definição op. vetorial.

• consideram notação $R_z(\theta)$,

$$\vec{n}' = R_z(\theta) \vec{n} \quad \text{Eq. (156.1)} \rightarrow x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

$$\text{Eq. (159.1):}$$

$$\psi'(\vec{n}') = R_z(\theta) [\psi(\vec{n})] = \psi(R^{-1} \vec{n}) =$$

$$\downarrow \theta \rightarrow -\theta$$

$$= \psi(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

pr notação infinitesimal $\theta = \epsilon$, $|\epsilon| \ll 1 \rightarrow \cos \theta \approx 1$ e $\sin \theta \approx \epsilon$

$$\hookrightarrow \psi'(\vec{r}) \approx \psi(x + \epsilon y, y - \epsilon x, z)$$

$$\approx \psi(x, y, z) + \frac{\epsilon y \partial_x \psi - \epsilon x \partial_y \psi}{\hbar} \approx \psi(\vec{r}) - i \frac{\epsilon \in L_z \psi(\vec{r})}{\hbar}$$

$$- i \frac{\epsilon \in \hbar (x \partial y - y \partial x)}{\hbar} \psi$$

L_z

$$\hookrightarrow \psi'(\vec{r}) \approx \left(1 - i \frac{\epsilon \in L_z}{\hbar} \right) \psi(\vec{r}) \quad (163.1)$$

$$\hookrightarrow U(R) = U_z(\theta) = U_z(\epsilon) \approx 1 - i \frac{\epsilon \in L_z}{\hbar}$$

similar, se notação infinitesimal w.n.t. eixo \hat{n} :

$$\hookrightarrow U_{\hat{n}}(\epsilon) \approx 1 - i \frac{\epsilon \in \hat{l} \cdot \hat{n} + O(\epsilon^2)}{\hbar}: \text{relação entre op. de notação e momento angular orbital} \quad (163.2)$$

\hookrightarrow Definição: se operador vetorial \vec{j} é o momento angular total do sistema \rightarrow pr notação infinitesimal w.n.t. eixo \hat{n} , temos que

$$U_{\hat{n}}(\epsilon) \approx 1 - i \frac{\epsilon \in \hat{n} \cdot \vec{j} + O(\epsilon^2)}{\hbar} \quad (163.3)$$

Obs.: se o sistema não possui análogo clássico

\hookrightarrow Eq. (163.3) pode ser considerada como a definição do momento angular total do sistema.

• notar: se S op. escalan \rightarrow Eq. (161.1) e (163.3):

$$[U\hat{n}(\epsilon), S] = [\hat{n} \cdot \vec{J}, S] = 0 : \text{op. } S \text{ comuta c/ as componentes}$$

op. vetorial \vec{J} (164.1)

• consideram op. vetorial $\vec{J} = (v_1, v_2, v_3)$,

$$\text{Eq. (160.3)} : v'_j = U(R) v_j U^*(R)$$

em particular, p/ notação infinitesimal w.r.t. eixo \hat{n} :

$$v'_j = U\hat{n}(\epsilon) v_j U^*\hat{n}(\epsilon) \approx \left(1 - i\epsilon \hat{n} \cdot \vec{J} \right) v_j \left(1 + i\epsilon \hat{n} \cdot \vec{J} \right)$$

$$\approx v_j - i\epsilon \underbrace{\left(\hat{n} \cdot \vec{J} v_j - v_j \hat{n} \cdot \vec{J} \right)}_{[\hat{n} \cdot \vec{J}, v_j]} + O(\epsilon^2)$$

$$\hookrightarrow v'_j = v_j - i\epsilon [\hat{n} \cdot \vec{J}, v_j]$$

$$\text{como } v'_j = \vec{v} \cdot \hat{e}'_j \quad \hat{e}'_j = \hat{e}_j + \epsilon (\hat{n} \times \hat{e}_j) : \text{Eq. (158.2)}$$

$$\hookrightarrow v'_j = v_j - i\epsilon [\hat{n} \cdot \vec{J}, v_j] = \vec{v} \cdot (\hat{e}_j + \epsilon (\hat{n} \times \hat{e}_j))$$

$$= v_j + \epsilon \vec{v} \cdot (\hat{n} \times \hat{e}_j)$$

$$\hookrightarrow [\hat{n} \cdot \vec{J}, v_j] = i\epsilon \vec{v} \cdot (\hat{n} \times \hat{e}_j) : O(\epsilon) \quad (164.2)$$

em particular, se $\hat{n} = \hat{e}_i$

$$\hookrightarrow [J_i, v_j] = i\epsilon \vec{v} \cdot \underbrace{(\hat{e}_i \times \hat{e}_j)}_{\hat{e}_k} = i\epsilon \epsilon_{ijk} v_k : \quad (164.3)$$

: comutacion componentes ops. \vec{J} e vetorial \vec{J}

em particular, se $\vec{v} = \vec{j} \rightarrow \text{Eq. (164.3)} \rightarrow \text{Eq. (140.3)}$

• Resumo: p/ ops. escalares e vetoriais \vec{v} :

$$[J_i, s] = 0$$

$$[J_i, v_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} v_k \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (165.1)$$

notam: se $\vec{v} = \vec{n}$ ou \vec{p}

$$\text{Eq. (164.3)} \rightarrow [J_i, n_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} n_k$$

$$[J_i, p_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} p_k \quad : \quad (165.2)$$

: similar comutadões $[\vec{l}, \vec{n}]$ e $[\vec{l}, \vec{p}]$: Eq. (139.3)

Obs.:

(1) Eq. (163.3) : op. vetorial \vec{j} : gerador de notações infinitesimais;

(2) possível interpretacão op. \vec{j} definido em (163.3) :

definição (163.3) \oplus transf. op. vetorial sob notacão, Eq. (161.2)

\hookrightarrow op. \vec{j} é um op. vetorial e

álgebra op. \vec{j} : álgebra op. momento angular (140.3);

(3) Eq. (164.3) : álgebra de um op. vetorial.

• como uma notação finita : sucessão de notações infinitesimais

$$\hookrightarrow U_n(\theta) = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \theta \hat{n} \cdot \vec{j} \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} U_n(\theta) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{j}/\hbar} \quad (165.3)$$

alternativa: como $U_n(\theta + d\theta) = U_n(d\theta) U_n(\theta)$

$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar} d\theta \hat{n} \cdot \vec{j} \right) U_n(\theta)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{i} \left(U\hat{n}(\theta + d\theta) - U\hat{n}(\theta) \right) = -\frac{i}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{j} \rightarrow \frac{dU\hat{n}(\theta)}{d\theta} = -i \frac{\hat{n} \cdot \vec{j}}{\hbar}$$

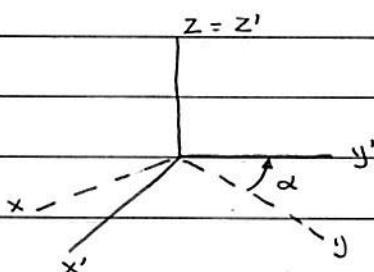
$$\hookrightarrow \text{solução: } U\hat{n}(\theta) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{j}/\hbar} : \text{Eq. (165.3)}$$

• Ângulos de Euler,

vimos que uma notação R pode ser definida por uma direção \hat{n} e um ângulo θ ;

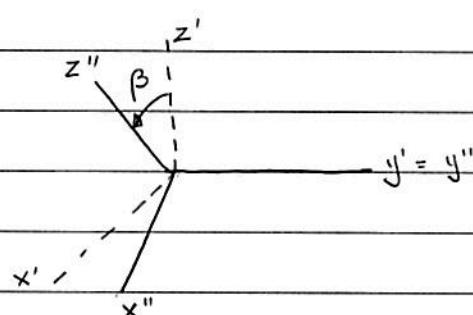
alternativa: via 3 ângulos de Euler esp!r!

definição ângulos de Euler: sequência de 3 notações fcl
que $xyz \rightarrow XYZ$



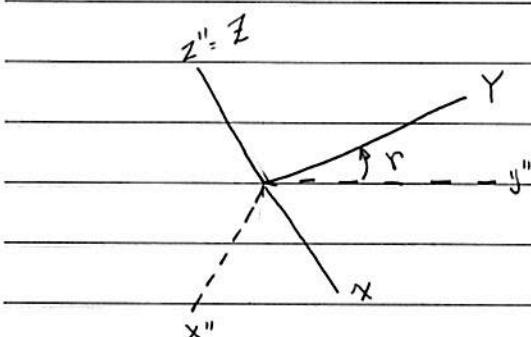
(1) notação ângulo α w.r.t. eixo \hat{z} :

$$xyz \rightarrow x'y'z'$$



(2) notação ângulo β w.r.t. eixo \hat{y}' :

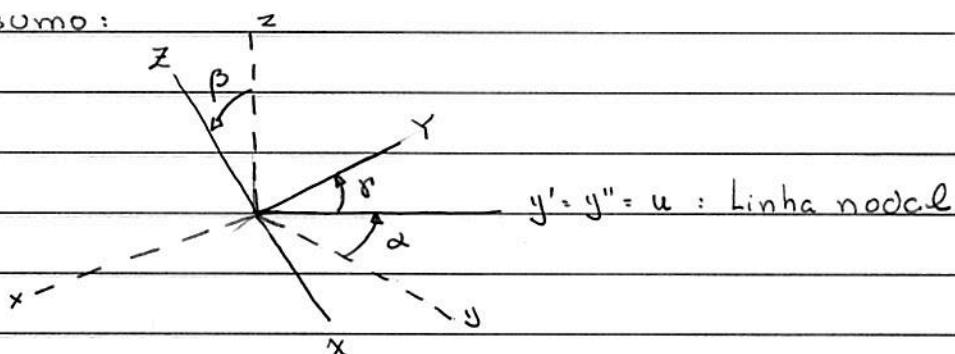
$$x'y'z' \rightarrow x''y''z''$$



(3) notação ângulo γ w.r.t. eixo \hat{x}'' :

$$x''y''z'' \rightarrow XYZ$$

Resumo:



Obs.: $\hat{y}'' = \hat{u} \in \text{plano } xy$

\hookrightarrow matriz de notação: $R(\alpha\beta\gamma) = R_z''(r) R_y'(\beta) R_z(\alpha)$

$$= R_z(r) R_y'(\beta) R_z(\alpha) \quad (167.1)$$

Obs.: definição ângulo α : Sakurai / Merzbacher

Eqs. (165.3) \oplus (167.1): op. notação em termos ângulos de Euler:

$$U(R) \equiv U(\alpha\beta\gamma) = U_z(r) U_{y'}(\beta) U_z(\alpha) \quad (167.2)$$

$$= e^{-irJ_z/\hbar} e^{-i\beta J_y'/\hbar} e^{-i\alpha J_z/\hbar};$$

é possível reescrever $U(\alpha\beta\gamma)$ em termos de J_y e J_z :

Lembra: eixo y $\xrightarrow{R_z(\alpha)}$ eixo y'

$$\hookrightarrow \text{Eq. (160.3)}: J_y' = U_z(\alpha) J_y U_z^*(\alpha) = e^{-i\alpha J_z/\hbar} J_y e^{+i\alpha J_z/\hbar}$$

$$\hookrightarrow e^{-i\hbar\beta J_y'/\hbar} = e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\hbar\beta J_y/\hbar} e^{+i\alpha J_z/\hbar}$$

$$\text{ou } U_{y'}(\beta) = U_z(\alpha) U_y(\beta) U_z^*(\alpha) \quad (167.3)$$

similar: eixo z = eixo z' $\xrightarrow{R_y'(\beta)}$ eixo z'' = eixo z

$$\hookrightarrow J_z = U_{y'}(\beta) J_z U_{y'}^*(\beta)$$

$$\hookrightarrow U_z(r) = U_{y'}(\beta) U_z(r) U_{y'}^*(\beta)$$

(168.1)

Dessa forma:

$$U(\alpha \beta r) = U_z(r) U_{y'}(\beta) U_z(\alpha)$$

$$= \underbrace{\left(U_{y'}(\beta) U_z(r) U_{y'}^*(\beta) \right)}_1 U_{y'}(\beta) U_z(\alpha)$$

$$= \underbrace{\left(U_z(\alpha) U_{y'}(\beta) U_z^*(\alpha) \right)}_{U_z(r)} U_z(r) U_{y'}(\beta) = U_z(\alpha) U_{y'}(\beta) U_z(r)$$

$$\hookrightarrow U(\alpha \beta r) = \exp(-i\alpha J_z/\hbar) \exp(-i\beta J_y/\hbar) \exp(-ir J_z/\hbar) : \quad (168.2)$$

: op. de notação em termos ângulos de Euler
e componentes \vec{J} w.r.t. REF (inicial) xyz.

Obs.: ângulos de Euler α e β : coordenadas esféricas
eixo Z w.r.t. REF xyz

• Rotação $\theta = 2\pi$.

$$\text{Eq. (165.3)}: U_{\hat{n}}(2\pi) = e^{-2\pi i \hat{n} \cdot \vec{J}/\hbar},$$

em princípio, $U_{\hat{n}}(2\pi) = 1$, pois sistema retorna situação inicial;

entretanto, consideran caso particular $\hat{n} = \hat{z}$: $U_{\hat{z}}(2\pi) = e^{-2\pi i J_z/\hbar}$

$$\hookrightarrow \langle j'm' | U_z(2\pi) | jm \rangle = e^{-2\pi i m} \langle j'm' | jm \rangle = e^{-2\pi i m} \delta_{m'm}$$

se m : inteiro $\sim j = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \langle j_m' | U_z(2\pi) | j_m \rangle = \delta_{m'm}$

se m : semi-inteiro $\sim j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

$$\hookrightarrow \langle j_m' | U_z(2\pi) | j_m \rangle = -\delta_{m'm}$$

$$\hookrightarrow \text{na representação } | j_m \rangle : U_z(2\pi) = \begin{cases} +j & j = 0, 1, 2, \dots \\ -j & j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \end{cases}$$

caso geral:

$$\text{define-se operador } D = U_R(2\pi) = e^{2\pi i \hat{n} \cdot \vec{j} / \hbar}$$

c/ as seguintes propriedades:

(169.1)

- $\frac{1}{2}(J+D)$: projetor subespaço $j = 0, 1, 2, \dots$

- $\frac{1}{2}(J-D)$: " " " $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

- $D^2 = I$, p/ $\forall j$

- $[D, U(R)] = 0$, p/ \forall notação R

notar Eq. (163.3):

dada uma notação infinitesimal R

\hookrightarrow op. notação $U_R(e)$: correspondência one-to-one;

entretanto, p/ notação finita R: essa correspondência one-to-one, pois diferentes conjuntos de notações infinitesimais \rightarrow mesma notação finita R!

verifica-se que p/ uma notação finita R ~ 2 operadores de notação $U'(R) \in U''(R)$ fcis que

$$U''(R) = D U'(R)$$

(169.2)

Ex.: p/ uma dada notação R, temos que

$$U(R) = \exp\left(-i(\theta + 2\pi\kappa)\frac{\hat{n} \cdot \vec{j}}{\hbar}\right) = \exp\left(-2\pi\kappa i \frac{\hat{n} \cdot \vec{j}}{\hbar}\right) \exp\left(-i\theta \frac{\hat{n} \cdot \vec{j}}{\hbar}\right)$$

 $U''(R)$ \mathcal{D} p/ $\kappa = 1$ $U'(R)$

notar Eq. (169.2):

$$\text{se } j = 0, 1, 2, \dots : \mathcal{D} = 1 \rightarrow U''(R) = U'(R)$$

se $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots : \mathcal{D} = -1 \rightarrow U''(R) = -U'(R) : 2$ operadores
distintos associados

à mesma notação R. (170.1)

considerar $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$,

p/ estado $| \Psi \rangle : U_R(2\pi) | \Psi \rangle = -| \Psi \rangle : \text{ok, pois veton } | \Psi \rangle$
é um objeto auxiliar na descrição do sistema;

entretanto, observável Q deve ser invariante sob
notação $\theta = 2\pi \sim$ valores medidas

l condicão $\rightarrow U'(R) \otimes U'(R)^+ = U''(R) \otimes U''(R)^+$

como Eq. (169.2) : $U''(R)^+ = U'(R)^+ \mathcal{D}^+ = \mathcal{D}^+ U'(R)^+ = \mathcal{D} U'(R)^+$
 \uparrow Eq. (169.1)

$\hookrightarrow U'(R) \otimes U'(R)^+ = U'(R) \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} U'(R)^+ ;$ como notação Q é
arbitrária

$\hookrightarrow [Q, \mathcal{D}] = 0 : \text{condição p/ observável Q}$
invariante sob notação $\theta = 2\pi .$ (170.2)

Obs. : em princípio, (170.1) poderia causar dificuldades p/
 $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$; entretanto, p/ os observáveis Q de
interesse, temos que $[Q, \mathcal{D}] = 0 !$

• subespaços innedutíveis.

consideram estado arbitrário $| \psi \rangle \in E_1 \subset E$;

se $\forall | \phi \rangle \in E_1$ pode ser obtido a partir de $| \psi \rangle$ via uma notação, i.e., $\forall | \phi \rangle \in E_1$ pode ser escrito como

$| \phi \rangle = U(R) | \psi \rangle \in E_1 \rightarrow E_1$: subespaço innedutível

w.n.t. notação

(171.1)

por outro lado, se \exists pelo menos um estado $| \psi \rangle \in E_1$ e

um estado $| \phi \rangle \in E_1$ tal que $| \phi \rangle \neq U(R) | \psi \rangle \rightarrow$

E_1 : subespaço redutivo w.n.t. notações

Lembrem subespaços $E(j)$, pg. 145:

$\dim E(j) = 2j+1$; base $(2j+1)$ vetores $| j m \rangle$, j fixo;

$E(j)$ é invariante sob ação ops. J_z^+ e J_z^-

Eq. (165.3) $\rightarrow E(j)$ é invariante sob ação $U(R)$

$\hookrightarrow E(j)$ subespaço innedutível w.n.t. notações. (171.2)

(pr detalhes, veja Sec. 13.16, Messiah)

em detalhes,

Eq. (171.2) $\rightarrow U(R) | j m' \rangle \in E(j)$

$$\hookrightarrow U(R) | j m' \rangle = \sum_{m''} D_{m'' m'}^{(j)}(R) | j m'' \rangle$$

\hookrightarrow coeficientes $\in \mathbb{C}$

$$\text{como: } \langle j m | U(R) | j m' \rangle = \sum_{m''} D_{m'' m'}^{(j)}(R) \langle j m | j m'' \rangle$$

$$\hookrightarrow D_{mm'}^{(j)}(R) = \langle j m | U(R) | j m' \rangle$$

(171.3)

$$= \langle j m | e^{-i\theta \hat{J}_z/\hbar} | j m' \rangle$$

Definição:

matriz de notação $D^{(j)}(R)$: matriz quadrada ordem $2j+1$, que representa o op. de notação $U(R)$ na base $|jm\rangle$ (j fixo), i.e., no subespaço $E(j)$

Eq. (171.3) : elemento de matriz de notação $D^{(j)}(R)$

de fato, $D_{mm'}^{(j)}(R)$ é uma representação inedutiva do op. de notação $U(R)$

ideia representação inedutiva:

considerar matriz bloco diagonal D :

$$D = \begin{vmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & D_n \end{vmatrix}; D_i : \text{matrizes } \square \quad (172.1)$$

se \neq transformação de similaridade T , i.e.,

$D'_i = T D_i T^{-1}$: Eq. (44.2), que reduza $\neq D_i$ a blocos diagonais menores \rightarrow matriz D (172.1) corresponde a uma representação inedutiva.

notar: se subespaço $E_1 = E(j_1) \oplus E(j_2) \oplus E(j_3)$

\hookrightarrow a matriz que representa $U(R)$ na base $|jm\rangle$, $j=j_1, j_2, j_3$ é similar Eq. (172.1);

Lembrar que: $\langle j'm' | U(R) | jm \rangle \propto \delta_{jj'}$

próxima etapa: determinação dos elementos de matriz (171.3); nesse caso, é interessante considerarmos $U(R)$ em termos dos ângulos de Euler $\alpha \beta \gamma$, Eq. (168.2):

$$D_{mm'}^{(j)}(\alpha, \beta, r) = \langle j m | e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_y/\hbar} e^{-ir J_z/\hbar} | j m' \rangle$$

$$= e^{-i(m\alpha + m'r)} \langle j m | e^{-i\beta J_y/\hbar} | j m' \rangle$$

$$\equiv d_{mm'}^{(j)}(\beta)$$

(173.1)

(temos na origem)

• propriedades matriz $D^{(j)}(\alpha, \beta, r)$

$$\cdot \text{inversa: } (D^{(j)}(\alpha, \beta, r))^{-1} = D^{(j)}(-r, -\beta, -\alpha)$$

$$\cdot \text{Lembra que } U^*(\alpha, \beta, r) = e^{i\alpha J_z/\hbar} e^{i\beta J_y/\hbar} e^{ir J_z/\hbar}$$

$$\cdot \det D^{(j)}(\alpha, \beta, r) = +1, \text{ pois } U(\alpha, \beta, r) \text{ op. unitário}$$

$$\cdot D_{mm'}^{(j)*}(\alpha, \beta, r) = D_{m'm}^{(j)}(-r, -\beta, -\alpha)$$

(173.2)

$$\cdot D_{mm'}^{(j)*}(\alpha, \beta, r) = (-1)^{m-m'} D_{-m,-m'}^{(j)}(\alpha, \beta, r)$$

Obs.: veja apêndice C, Messiah para resumo propriedades matriz $D^{(j)}(\alpha, \beta, r)$!

Ex.: $j=1$;

nesse caso, é possível determinar explicitamente a matriz $d^{(j=1)}(\beta)$:

$$\text{como, p/ } j=1 : J_y = -i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow J_y^3 = J_y$$

e, verifica-se que (exercício):

$$e^{-i\beta J_y/\hbar} = 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (1 - \cos \beta) - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right) \sin \beta$$

(173.3)

e, assim, temos que:

$$d^{(j=1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & -\frac{1}{2}\sin\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ \frac{1}{2}\sin\beta & \cos\beta & -\frac{1}{2}\sin\beta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & \frac{1}{2}\sin\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{pmatrix}$$

(174.1)

• Relação entre Y_m^l e $D^{(l)}(R)$,

considerar $j = l = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Eq. (173.3)} : U(R)|e_m\rangle = \sum_{m'=-l}^{+l} |e_{m'}\rangle D^{(l)}_{m'm}(R)$$

$$\langle \vec{n} | : \langle \vec{n} | U(R)|e_m\rangle = \sum_m \langle \vec{n} | e_{m'} \rangle D^{(l)}_{m'm}(R)$$

$$\text{ou } Y_e^m(\theta', \varphi') = \sum_{m'} Y_e^{m'}(\theta, \varphi) D^{(l)}_{m'm}(R) \quad (174.2)$$

onde (θ, φ) : coordenadas na REF xyz : Fig. pg. 167

$\stackrel{e}{=} (\theta', \varphi')$: " " " XYZ

notar: $\sum_m D^{(l)*}_{m'm}(R) + \text{Eq. (174.5)}$:

$$\sum_m D^{(l)}_{m''m}(R) Y_e^m(\theta', \varphi') = \sum_{m'} Y_e^{m'}(\theta, \varphi) \sum_m D^{(l)*}_{m''m}(R) D^{(l)}_{m'm}(R)$$

$\delta m' m''$

se $m \rightarrow m'$ e $m'' \rightarrow m'$

(verifican)

$$\hookrightarrow Y_e^m(\theta, \varphi) = \sum_{m'} D^{(l)*}_{mm'}(R) Y_e^{m'}(\theta', \varphi') \quad (174.3)$$

Lembrar: (θ, φ) e (θ', φ') : fixos!

$$\text{Eq. (149.3)} : Y_e^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (-1)^m e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta); m > 0$$

(174.4)

notam: $Y_e^m(\theta=0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} S_{m,0}$ (175.1)

$$Y_e^{m=0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \quad (175.2)$$

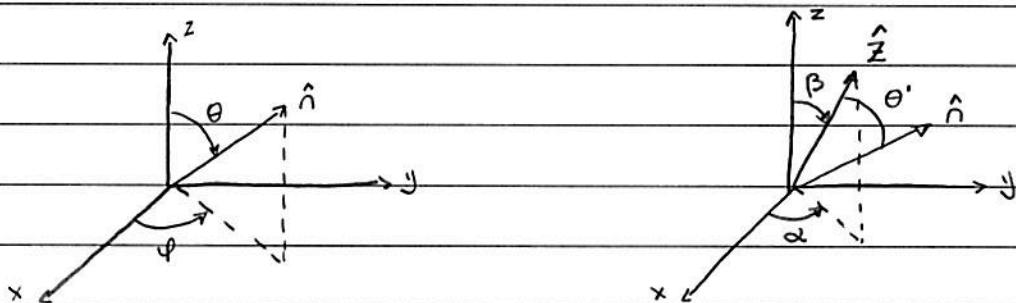
(i) consideram $\theta' = 0$ em (174.3): $\hat{n} = \hat{z}$,

$$Y_e^m(\theta, \varphi) = \sum_{m'} S_{m',0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_l^{(2)}{}^*_{mm'}(R)$$

$$\hookrightarrow D_l^{(2)}{}^*_{m,0}(R) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_e^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_e^m(\beta, \alpha) \quad (175.3)$$

Lembran: (β, α) : coordenadas esféricas eixo \hat{z} w.r.t. REF xyz!

novamente, Fig. pg. 167



Lembran: (θ', φ') : coodenadas esféricas \hat{n} w.r.t. REF XYZ!

Eq. (175.3): relação entre Y_e^l e $D_l^{(2)}(R)$

(ii) consideram $m=0$ em (174.2):

$$Y_e^0(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta') = \sum_m Y_e^m(\theta, \varphi) D_l^{(2)}{}^*_{m,0}(R)$$

$$= \int_{m'} Y_e^m(\theta, \varphi) Y_e^m(\beta, \alpha)^* \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$$

$$\hookrightarrow P_e(\cos \theta') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_e^m(\beta, \alpha)^* Y_e^m(\theta, \varphi) : \text{Eq. (154.2)} :$$

: teorema de adição p/ harmônicos esféricos !

• Invariância sistema sob notações.

Lembrem: notação finita R = conjunto de notações infinitesimais.
se sistema invariante sob $\nabla U_R(\epsilon)$

\hookrightarrow " " " $U(R)$;

como $U_R(\epsilon) \sim \hat{n} \cdot \vec{J}$ \rightarrow invariância sistema momento
sob notação " angular \vec{J}

• em detalhes,

se estado $| \psi \rangle$ invariante sob notação

$$\hookrightarrow J_i | \psi \rangle = 0, i = 1, 2, 3;$$

de fato, é suficiente que

$$J^2 | \psi \rangle = 0 : \text{condição invariância estado}$$

(176.1)

sob notação

Ex.: estados \tilde{s} ($l=0$) átomo H,

$$\langle \tilde{n} | n l=0 m=0 \rangle \propto F_{n, l=0}(r) Y_0^0(\theta, \varphi)$$

• se observável S invariante sob notação

$$\hookrightarrow \text{Eq. (161.1)} : [U(R), S] = 0 \rightarrow [\vec{J}, S] = 0$$

(176.2)

consideram, em particular, o hamiltoniano H do sistema,

se, p/ notação R :

$[U(R), H] = 0 \rightarrow$ equações de movimento são invariantes
sob notação

(177.1)

Eq. de Schrödinger (73.1) : $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$

$$U(R) + (73.1) : i\hbar \frac{d}{dt} (U(R)|\psi(t)\rangle) = U(R)H|\psi(t)\rangle - H(U(R)|\psi(t)\rangle)$$

↑ Eq. (177.1)

↳ se $|\psi(t)\rangle$ sol. eq. de Schrödinger

↳ $U(R)|\psi(t)\rangle$ " " " "

• considerar o problema de autovalores p/ $H \neq H(t)$,

se $H|n_i\rangle = E_n|n_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, g_n$

$$U(R)H|n_i\rangle = H(U(R)|n_i\rangle) = E_n(U(R)|n_i\rangle)$$

Eq. (177.1) ↑

↳ se $|n_i\rangle$: autovetor H associado ao autovalor E_n

↳ $U(R)|n_i\rangle$: " " " " " "

ou se $[U(R), H] = 0 \rightarrow$ subespaço E_n do autovalor E_n
é invariante sob notação

em resumo : $[H, U(R)] = 0 \rightarrow [H, \vec{J}] = 0$: condição invariância
do sistema sob
notação

além disso, $[H, \vec{J}] = 0 \rightarrow \vec{J}$ é uma clé de movimento
(notas similaridade
mecânica clássica)

· Átomo de hidrogênio, solução algébrica,

ideia: similar à oscilação harmônico e ops. J^2 e J_z ,

determinam espectro átomo H considerando

apenas propriedades algébricas operações:

(pr detalhes veja Sec. 12.4, Herzbach)

consideram sistema descrito pelo hamiltoniano:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

: hamiltoniano

(não-relativístico) (178.1)

pr átomo H

como $V(r)$ é um potencial central $\rightarrow [H, \vec{L}] = 0$

$$\hookrightarrow [H, L^2] = [H, L_z] = 0$$

como $[L^2, L_z] = 0 \rightarrow H, L^2 \text{ e } L_z$: conjunto de observáveis

que comutam

podemos, inicialmente, afirmar que

$$H |d, l, m\rangle = E(d, l) |d, l, m\rangle ;$$

(178.2)

i.e., autovalores $E(d, l)$ independem m devido invariância

sistema sob rotação (invariância subespaços $E(l)$)

w.n.l. rotação

info adicional: Lembrar mecânica clássica (veja Sec. 3.9, Goldstein)

$$\vec{K}_{CL} = \vec{p} \times \vec{L} - m \times \frac{\vec{r}}{r} : \text{vetor de Runge-Lenz}$$

(178.3)

pr problema de Kepler, i.e., $V(r) = -k/r$:

vetor \vec{K}_{CL} é conservado

M.Q.: vamos considerar cte $\kappa = e^2$ e $\vec{K} = \kappa \vec{c} / -me^2$:

$$\vec{K} = \frac{1}{2me^2} (\vec{L} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{L}) + \vec{n}$$
(179.1)

Obs.: notam negra de simetrização (60.3)

Verifica-se que (exercício): $[H, \vec{K}] = 0$:

operador \vec{K} : cte de movimento

(similar à mecânica clássica)

propriedades operador \vec{K} (verificar):

$$\cdot \vec{K} \cdot \vec{L} = \vec{L} \cdot \vec{K} = 0$$

$$\cdot [L_i, K_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} K_k \xrightarrow{\text{Eq. (165.5)}} \vec{K} \text{ é um operador vetorial}$$

(179.2)

$$\cdot [K_i, K_j] = i\hbar \left(-\frac{2H}{me^4} \right) \epsilon_{ijk} L_k$$

notam: Eq. (179.2) $\oplus [L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$

\hookrightarrow operadores vetoriais $\vec{L} \in \vec{K}$ formam uma álgebra fechada

é interessante definir o op. vetorial

$$\vec{A} = \sqrt{\frac{-me^4}{2E}} \vec{K}, \quad E < 0 \text{ (estados ligados)}$$

(179.3)

$$\text{Eq. (179.2)} \rightarrow [A_i, A_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

verifica-se a seguinte identidade (veja abaixo)

$$\frac{K^2}{me^4} = \frac{2\hbar}{E} (L^2 + h^2) + 1 \quad (180.1)$$

considerando apenas estados ligados $E < 0$, temos que

$$\frac{-me^4}{2E} K^2 = - (L^2 + h^2) - \frac{me^4}{2E}$$

$$\hookrightarrow A^2 + L^2 + h^2 = - \frac{me^4}{2E} \quad (180.2)$$

é interessante definir os operadores

$$\vec{J}_1 = \frac{1}{2} (\vec{L} + \vec{A}) \quad e \quad \vec{J}_2 = \frac{1}{2} (\vec{L} - \vec{A}) \quad (180.3)$$

$$\hookrightarrow J_1^2 = \frac{1}{4} (L^2 + A^2 + \underbrace{\vec{L} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{L}}_{=0}) = J_2^2$$

além disso, verifica-se que (exercício)

$$\cdot [\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0$$

(180.4)

$$\cdot [J_{i\alpha}, J_{j\beta}] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_{j\gamma} ; \quad i=1,2 \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$$

i.e., \vec{J}_1 e \vec{J}_2 são dois ops momento angular independentes!

$$\text{Eq. (180.2)} : A^2 + L^2 + h^2 = 2(J_1^2 + J_2^2) + h^2 = - \frac{me^2}{2E}$$

$$\text{como os autovalores } J_1^2 = J_2^2 : j(j+1)\hbar^2$$

$$\hookrightarrow E = \frac{-me^2}{2\hbar^2(2j+1)^2}$$

identificando $2j+1 \rightarrow n$, número quântico principal

como $j = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, \dots \rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$\hookrightarrow E_n = -\frac{me^2}{2\hbar^2 n^2} : \text{níveis de energia (estados ligados)} \quad (183.1)$$

átomo de H

• degenerescência E_n ,

p/ j fixo: $2j+1$ valores m ;

Como \vec{j}_1 e \vec{j}_2 são independentes $\rightarrow (2j+1) \cdot (2j+1) = n^2$:

: degenerescência E_n !

• notar: autovalores E_n independem \vec{l} : comparar Eq. (178.2)
nesse caso, a degenerescência $\sim [H, \vec{\lambda}] = 0$, i.e.,
vetor de Runge-Lenz é uma clé de movimento!

Obs.: verifica-se que (veja Sec. 4.8, Weinberg p/ detalhes)
que a degenerescência E_n pode ser interpretada
como invariância notacional em 4-D espaciais:

\vec{j}_1 e \vec{j}_2 : 2 geradores independentes \sim notações em 3-D;
matrizes de notação: grupo $SO(3) \otimes SO(3)$:

: esse grupo pode ser visto como o grupo de
notações em 4-D: grupo $SO(4)$!

Exercício: verifiquem identidade (180.1).

(a) como $[L_i, p_j] = ih \epsilon_{ijk} p_k$, mostre que

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{me^2} \vec{L} \times \vec{p} + \frac{ih}{me^2} \vec{p} + \frac{\vec{r}}{n};$$

(b) mostre que: $(\vec{L} \times \vec{p}) \cdot \vec{n} = -L^2$; $\vec{n} \cdot (\vec{L} \times \vec{p}) = -L^2 - 2ih\vec{n} \cdot \vec{p}$;
 $(\vec{L} \times \vec{p}) \cdot \vec{p} = 0$; $\vec{p} \cdot (\vec{L} \times \vec{p}) = -2ih^2 p^2$;

(c) calcule $[\vec{p} \cdot \vec{n}, \gamma_n]$;

(d) derive Eq. (180.1).

• Spin $S = 1/2$,

inicial: experimento de Stern-Gerlach (1922).

Lembra: relação entre momento magnético $\vec{\mu}$ e momento angular (intrínseco) de spin \vec{s}

pt partícula (clássica) carga q , órbita circular raio R e velocidade v :

$$\mu = \frac{IA}{c} = \frac{q}{T} \frac{\pi R^2}{c} = \frac{q}{2\pi R/J} \frac{\pi R^2}{c} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{v R m}{L} = \frac{q}{2mc} L$$

↓
período

$$\Rightarrow \vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{L} \quad (182.1)$$

de modo análogo, podemos escrever:

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2mc} \vec{s} \quad (182.2)$$

↑
fator (adimensional) gionomagnético (Lande)

pt elétron ($q = e < 0$): $g \approx 2$ ($g = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \right) + O(\alpha^2)$)

pt próton: $g = 5.59$

Eq. Dirac
Conexões E&QD!

pt nêutron: $g = -3.83$