

(b) mostre que: $(\vec{L} \times \vec{p}) \cdot \vec{n} = -L^2$; $\vec{n} \cdot (\vec{L} \times \vec{p}) = -L^2 - 2i\hbar \vec{n} \cdot \vec{p}$;
 $(\vec{L} \times \vec{p}) \cdot \vec{p} = 0$; $\vec{p} \cdot (\vec{L} \times \vec{p}) = -2i\hbar^2 p^2$;

(c) calcule $[\vec{p} \cdot \vec{n} , 1/n]$;

(d) derive Eq. (180.1).

Spin $S = 1/2$,

inicial : experimento de Stern - Gerlach (1922).

Lembrem: relação entre momento magnético $\vec{\mu}$ e momento angular (intrínseco) de spin \vec{S}

pt partícula (clássica) carga q, órbita circular raio R e velocidade v :

$$\mu = \frac{IA}{c} = \frac{q}{T} \frac{\pi R^2}{c} = \frac{q}{2\pi R/v} \frac{\pi R^2}{c} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{v R m}{L} = \frac{q}{2mc} L$$

período \downarrow

$$\hookrightarrow \vec{\mu} = \frac{q}{2mc} \vec{L} \tag{182.1}$$

de modo análogo, podemos escrever :

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2mc} \vec{S} \tag{182.2}$$

\uparrow fator (adimensional) gíromagnético (Landé)

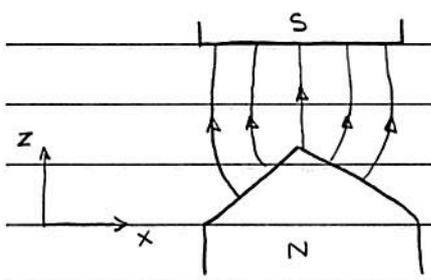
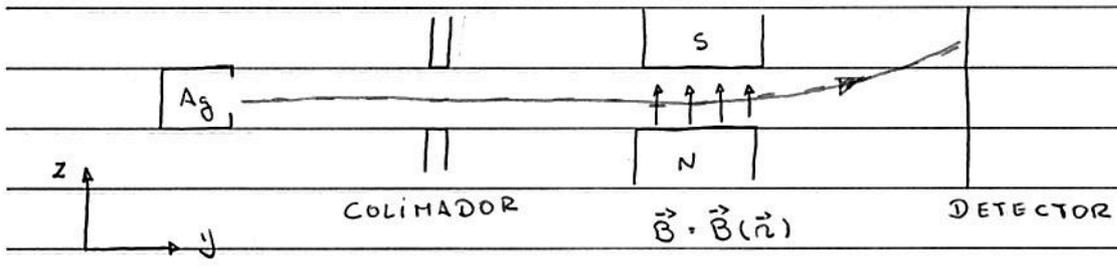
pt elétron ($q=e < 0$) : $g \approx 2$ ($g = 2(1 + \frac{\alpha}{\pi}) + O(\alpha^2)$)

pt próton : $g = 5.58$

pt nêutron : $g = -3.83$

Eq. Dirac \uparrow Conexões EBD!

esquema experimento:



notas: $\vec{B} = B_z(\vec{r}) \hat{z}$, não-homogêneo
 $\equiv SG \hat{z}$
 $\frac{\partial B_z}{\partial z} < 0$

átomo (neutro) $Ag^{47} : [Kr] 4d^{10} 5s^1$ $\rightarrow l = m = 0$ (orbital)

campo magnético: $\vec{B} = B_x(\vec{r}) \hat{x} + B_z(\vec{r}) \hat{z}$; hipótese $B_x \ll B_z$

como $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$: energia potencial

$\hookrightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} U \approx \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{z}$: força sob átomo Ag (183.1)

onde $\mu_z = |\vec{\mu}| \cos \theta$

como $\frac{\partial B_z}{\partial z} < 0$

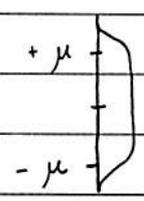
\hookrightarrow se $\mu_z < 0$ ($S_z > 0$): $F_z > 0$ ("p/cima")

se $\mu_z > 0$ ($S_z < 0$): $F_z < 0$ ("p/baixo")

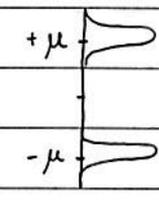
como $F_z \propto \mu_z$ \oplus conceito trajetória \rightarrow experimento
 átomo váleido determina μ_z

classicamente: como a orientação $\vec{\mu}$ dos átomos de Ag incidentes é aleatória

↳ resultado esperado
experimento:



entretanto,
resultado observado:



magneton de Bohr

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} = \mu_B$$

como $l=m=0 \rightarrow \mu \sim \text{spin e\acute{e}tron } \hbar$

↳ quantiza\c{c}\~ao μ_z (observado) \rightarrow quantiza\c{c}\~ao dos valores associados ao observ\~avel $S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$

De fato, interpreta\c{c}\~ao resultados experimentais:

Uhlenbeck e Goudsmit (1925): proposta e\acute{e}tron possui um momento magn\~etico intrinseco (spin).

Formalismo (n\~ao-relativ\~astico) p/ spin $S = 1/2$,

considerar $\vec{J} = \vec{S}$,

$$\text{Eq. (140.1): } [S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

(184.1)

$$\text{Eq. (145.2): } S^2 |s, m\rangle = s(s+1)\hbar^2 |s, m\rangle$$

$$S_z |s, m\rangle = m\hbar |s, m\rangle$$

em particular, p/ $s = 1/2$, temos que

$$S^2 |s = 1/2, m = \pm 1/2\rangle = \frac{3\hbar^2}{4} |s = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$$

(184.2)

$$S_z |s = 1/2, m = \pm 1/2\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |s = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$$

podemos definir:

$$|s=1/2, m=+1/2\rangle \equiv |+\rangle \quad \text{e} \quad |s=1/2, m=-1/2\rangle \equiv |-\rangle$$

como $\dim E(s=1/2) = 2s+1 = 1+1 = 2 \rightarrow$ representação operadores:
: matrizes 2×2

Definindo: $\vec{S} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma}$; $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ (185.1)

Eq. (146.1) $\rightarrow \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: matrizes de Pauli

(185.2)

propriedades matrizes de Pauli (verificar):

(1) $\sigma_i^2 = \hat{1}$, $i = 1, 2, 3$

(4) $\text{Tr } \sigma_i = 0$

(2) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$

(5) $\det \sigma_i = -1$

(185.3)

(3) $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$

(6) $\sigma_x \sigma_y \sigma_z = i \hat{1}$

Obs.:

(i) propriedade (3) está relacionada: $S_+^2 = S_-^2 = 0$ p/ $s=1/2$.

$$S_+^2 = (S_x + iS_y)^2 = \underbrace{S_x^2 - S_y^2}_{=0} + i(S_x S_y + S_y S_x) = 0$$

como $S_+^2 = 0 \rightarrow$ (3)!

(ii) propriedades (1), (2) e (3) podem ser escritas como:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k ; i, j \text{ fixos} \quad (185.4)$$

\hookrightarrow se $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ e $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ são dois vetores usuais ou dois operadores vetoriais que comutam com

$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$: vetor cujas comp. são matrizes de Pauli

↳ identidade: $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ (186.1)

• como $\hat{I}_{2 \times 2}, \sigma_x, \sigma_y$ e σ_z são matrizes linearmente independentes
↳ \forall matriz $A_{2 \times 2}$ pode ser escrita como:

$$A = \lambda_0 \hat{I} + \lambda_1 \sigma_x + \lambda_2 \sigma_y + \lambda_3 \sigma_z$$
$$= \lambda_0 \hat{I} + \vec{\lambda} \cdot \vec{\sigma} = \lambda_0 \hat{I} + \sum_{j=1}^3 \lambda_j \sigma_j$$

(186.2)

onde $\lambda_0 = 1/2 \text{Tr} A$ e $\lambda_i = 1/2 \text{Tr}(\sigma_i A)$

notas: como $\text{Tr} \sigma_i = 0 \rightarrow \text{Tr} A = \lambda_0 \text{Tr} \hat{I} = 2 \lambda_0$

$$\text{Tr}(\sigma_i A) = \lambda_0 \text{Tr} \sigma_i + \sum_j \lambda_j \text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = \lambda_i \text{Tr} \sigma_i^2 = 2 \lambda_i$$

$\sigma_i^2, i=j$
 $\sigma_k, i \neq j \neq k$

• em particular, se U é uma matriz unitária, Eq. (186.2) pode ser escrita como:

$$U = e^{i\varphi} (\hat{I} \cos \omega + i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \omega) ; \varphi, \omega, n_i \in \mathbb{R}$$

\hat{n} vetor unitário (186.3)

Obs.: em coordenadas esféricas, temos que

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

↳ $\hat{n} \cdot \vec{\sigma} = \sigma_x \sin \theta \cos \varphi + \sigma_y \sin \theta \sin \varphi + \sigma_z \cos \theta$

VERIFICAR \rightarrow
$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$
 (186.4)

• spinons,

pr a base $|+\rangle, |-\rangle$ do subespaço $E(s=1/2)$, temos que

$$P_+ + P_- = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| = \hat{1} \quad \text{relação de completudeza} \quad (187.1)$$

se $|\psi\rangle \in E(s=1/2)$

$$\hookrightarrow |\psi\rangle = \hat{1} \cdot |\psi\rangle = |+\rangle \underbrace{\langle+|\psi\rangle}_{\equiv C_+} + |-\rangle \underbrace{\langle-|\psi\rangle}_{\equiv C_-}$$

como $\dim E(s=1/2) = 2$, é interessante escrever:

$$|+\rangle \longrightarrow |X_+\rangle = X_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |-\rangle \longrightarrow |X_-\rangle = X_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow |\psi\rangle \longrightarrow |X\rangle = X = C_+ X_+ + C_- X_- = \begin{pmatrix} C_+ \\ C_- \end{pmatrix} \quad \text{spinon} \quad (187.2)$$

$$\text{onde } |C_+|^2 + |C_-|^2 = 1$$

• operador de rotação pr subespaço $E(s=1/2)$,

$$\text{Eq. (165.3)} \quad \hat{J} = \vec{S} :$$

$$U_{\hat{n}}(\theta) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{S} / \hbar} = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \vec{S} / 2} \quad (187.3)$$

$$= \hat{1} \cos \theta / 2 - i \hat{n} \cdot \vec{S} \sin \theta / 2 \quad \text{Companon} \quad (187.4)$$

Eq. (186.3)

notas: identidade (186.1) pr $\vec{A} = \vec{B} = \hat{n}$:

$$(\vec{S} \cdot \hat{n})(\vec{S} \cdot \hat{n}) = \hat{n}^2 + i \vec{S} \cdot (\hat{n} \times \hat{n}) = 1$$

$$\hookrightarrow (\vec{S} \cdot \hat{n})^2 = 1$$

$$\text{e } (\vec{S} \cdot \hat{n})^3 = (\vec{S} \cdot \hat{n}) \text{ e, assim, (187.3)} \rightarrow (187.4) !$$

↳ ação da op. notação $U\hat{n}(\theta)$ sob spinor χ :

$$\chi' = U\hat{n}(\theta)\chi = \left(\hat{1} \cos \theta/2 - i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \theta/2 \right) \chi;$$

em particular, se $\theta = 2\pi \rightarrow \chi' = (\hat{1} \cos \pi) \chi = -\chi$: OK c/

Eq. (170.1)

• op. de notação em termos dos ângulos de Euler, Eq. (168.2):

$$U(\alpha\beta\gamma) = \exp(-i\alpha\sigma_z/2) \exp(-i\beta\sigma_y/2) \exp(-i\gamma\sigma_z/2) \quad (188.1)$$

↳ matriz de notação (173.1):

$$D^{(1/2)}_{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(m\alpha + m'\gamma)} \underbrace{\langle s=1/2, m | e^{-i\beta\sigma_y/2} | s=1/2, m' \rangle}_{= d^{(1/2)}_{mm'}(\beta)}$$

notas Eq. (187.4): $e^{-i\beta\sigma_y/2} = \hat{1} \cos \beta/2 - i\sigma_y \sin \beta/2$

$$\rightarrow d^{(1/2)}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta/2 & -\sin \beta/2 \\ \sin \beta/2 & \cos \beta/2 \end{pmatrix} \quad (188.2)$$

: comparar Eq. (174.1)

• função de onda partícula de spin-1/2,

considerar partícula descrita por variáveis orbitais, e.g.,

\vec{r} e \vec{p} e variáveis de spin; temos que

$$[n_i, s_j] = [p_i, s_j] = 0 : 2 \text{ conjuntos de variáveis}$$

são independentes (188.2)

se $\mathcal{E}^{(o)}$: espaço vetorial \sim variáveis espaciais

$\mathcal{E}^{(s)}$: " " " " spin

$\hookrightarrow E = E^{(0)} \otimes E^{(s)}$: espaço vetorial sistema

se $|\psi\rangle \in E \rightarrow \psi_\sigma(\vec{n}) = \langle \vec{n} \sigma | \psi \rangle$, $\sigma = \pm$:

: função de onda da partícula (189.1)

como $1 = \sum_{\sigma=\pm} \int d^3 n' |\vec{n}' \sigma\rangle \langle \vec{n}' \sigma|$, onde $|\vec{n}' \sigma\rangle = |\vec{n}'\rangle \otimes |\sigma\rangle$,

temos que,

$$|\psi\rangle = 1 \cdot |\psi\rangle = \int d^3 n' |\vec{n}' +\rangle \langle \vec{n}' + | \psi \rangle + |\vec{n}' -\rangle \langle \vec{n}' - | \psi \rangle$$

$$= \int d^3 n' \psi_+(\vec{n}') |\vec{n}' +\rangle + \psi_-(\vec{n}') |\vec{n}' -\rangle$$

$$\hookrightarrow \langle \vec{n} | \psi \rangle = \psi_+(\vec{n}) |+\rangle + \psi_-(\vec{n}) |-\rangle$$

(189.2)

ou, em termos de spinors:

$$\langle \vec{n} | \psi \rangle \equiv \hat{\psi}(\vec{n}) = \psi_+(\vec{n}) \chi_+ + \psi_-(\vec{n}) \chi_- = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{n}) \\ \psi_-(\vec{n}) \end{pmatrix} :$$

(189.3)

: função de onda de 2 componentes

notar condição de normalização:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int d^3 n |\psi_+(\vec{n})|^2 + |\psi_-(\vec{n})|^2 = 1$$

(189.4)

• nesse caso,

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} : \text{momento angular total da partícula (189.5)}$$

de fato, Eqs. (139.1) e (188.2) :

$$[J_i, J_j] = [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} (L_k + S_k)$$

$$[J_i, S_j] = [L_i + S_i, S_j] = [S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

$$[J_i, n_j] = [L_i + S_i, n_j] = [L_i, n_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} n_k \quad : \text{comutador}$$

Eq. (165.2)

$$[J_i, p_j] = [L_i + S_i, p_j] = [L_i, p_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} p_k$$

i.e., a álgebra op. vetorial $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ = álgebra op. momento angular e

comutadores \vec{J} c/ op. vetoriais \vec{S}, \vec{n} e \vec{p} : OK c/ Eq. (165.2)

• Operador densidade, (veja Sec. 16.6, Merzbacher)

considera spinor $|X\rangle = X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$; $c_i \in \mathbb{C}$

e $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

$$\hookrightarrow \hat{\rho} = |X\rangle\langle X| = X X^\dagger = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} (c_1^* \ c_2^*) = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 \end{pmatrix} :$$

: op. densidade p/ estado puro (190.1)

notas: $\text{Tr} \hat{\rho} = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$: condição de normalização (95.2) !

como $\hat{\rho}$ é uma matriz 2×2 c/ $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$, podemos escrever

$$\text{Eq. (186.2)} : \hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) ; \vec{P} = (P_x, P_y, P_z) ; \quad (190.2)$$

nesse caso, $\hat{\rho}$ assume a forma:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{pmatrix} \quad (190.3)$$

$$\text{Eqs. (190.1) = (190.3)} \rightarrow P_x = 2 \text{Re}(c_1^* c_2)$$

$$P_y = 2 \text{Im}(c_1^* c_2) ; P_z = |c_1|^2 - |c_2|^2$$

$$\text{notas: } \hat{p}^2 = \frac{1}{4} (1 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) (1 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{4} (1 + 2 \vec{p} \cdot \vec{\sigma} + \underbrace{(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})(\vec{p} \cdot \vec{\sigma})}_{\text{Eq. (186.1)} = P^2})$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 2 \vec{p} \cdot \vec{\sigma} + P^2) = \hat{p} = \frac{1}{2} (1 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})$$

Eq. (96.1): $\hat{p} \sim$ estado puro!

$\hookrightarrow P^2 = 1$: \vec{p} é um vetor unitário, i.e., estado do sistema é descrito por 2 parâmetros independentes!

$$\text{notas: } \langle \sigma_x \rangle = \text{Tr}(\hat{p} \sigma_x)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_x + \frac{1}{2} \text{Tr} (P_x \sigma_x^2 + P_y \sigma_y \sigma_x + P_z \sigma_z \sigma_x) = P_x$$

$P_x \hat{1} \quad -i P_y \sigma_z \quad +i P_z \sigma_y$

similar por componentes y e z

$$\hookrightarrow \vec{p} = \langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\hat{p} \vec{\sigma}) : \text{vetor de polarização} \quad (191.1)$$

Lembrar: autovalores \hat{p} associado estado puro: 0, 1

temos que:

$$\hat{p} x = x \underbrace{x^\dagger x}_1 = x : x : \text{autovetor } \hat{p} \text{ c/ autovalor } 1$$

$$\hat{p} x' = x x^\dagger x' = 0 : \text{se } x' \perp x, \text{ i.e., } x^\dagger x' = 0$$

$$\hookrightarrow x' \text{ é autovetor } \hat{p} \text{ c/ autovalor } 0$$

$$\text{notas: se } \hat{p} x = x \rightarrow \frac{1}{2} (1 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) x = x \rightarrow (\vec{p} \cdot \vec{\sigma}) x = x ;$$

: se x autovetor \hat{p} c/ autovalor 1

$$\hookrightarrow \text{" " } \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \text{ " " " " " "}$$

(191.2)

$\hookrightarrow \vec{p}$ indica a direção spin partícula descrita por x !

por outro lado, se $\hat{\rho} \chi' = 0$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} (1 + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \chi' = 0 \rightarrow (\vec{P} \cdot \vec{\sigma}) \chi' = -\chi' ; \chi + \chi' = 0 \quad (192.1)$$

Eqs. (191.2) e (192.1) : ok identificação \vec{P} : vetor de polarização

· vamos considerar o caso geral,

$$\text{como } T_n \hat{\rho} = 1 \rightarrow (T_n \hat{\rho})^2 = 1 ;$$

$$(T_n \hat{\rho})^2 = \sum_{ij} \langle i | \hat{\rho} | i \rangle \langle j | \hat{\rho} | j \rangle$$

$$T_n \hat{\rho}^2 = \sum_{ij} \langle i | \hat{\rho} | j \rangle \langle j | \hat{\rho} | i \rangle = \sum_{ij} |\langle i | \hat{\rho} | j \rangle|^2 \geq 0$$

como $\hat{\rho}$ é op. positivo definido

$$\hookrightarrow T_n \hat{\rho}^2 = \sum_{ij} |\langle i | \hat{\rho} | j \rangle|^2 \leq \sum_{ij} \langle i | \hat{\rho} | i \rangle \langle j | \hat{\rho} | j \rangle = (T_n \hat{\rho})^2$$

↑ Eq. (22.2)

$$\hookrightarrow 0 \leq T_n \hat{\rho}^2 \leq (T_n \hat{\rho})^2 = 1 \quad (192.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. (190.2)} : \hat{\rho}^2 &= \frac{1}{4} (1 + 2\vec{P} \cdot \vec{\sigma} + P^2) = \frac{1}{4} (2 + 2\vec{P} \cdot \vec{\sigma} + P^2 - 1) \\ &= \hat{\rho} + \frac{1}{4} (P^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (192.2)}} 0 \leq T_n \hat{\rho} + \frac{1}{4} T_n (P^2 - 1) \leq 1 \rightarrow T_n (P^2 - 1) \leq 0$$

$$\hookrightarrow P^2 \leq 1$$

se $|\vec{P}| = 1$: $\hat{\rho} \sim$ estado puro (ou polarizado)

$|\vec{P}| < 1$: $\hat{\rho} \sim$ mistura estatística (ou parcialmente polarizado)

em particular, se $|\vec{P}| = 0$ (não-polarizado)

$\hookrightarrow \hat{p} = 1/2 \hat{j}$: comparar c/ op. \hat{p}_z , Ex. 2, pg. 98

Obs.: a discussão acima é similar à descrição de polarização da radiação via o tensor de polarização (p/ detalhes, veja Sec. 50, Landau e Lifshitz, The classical theory of fields).

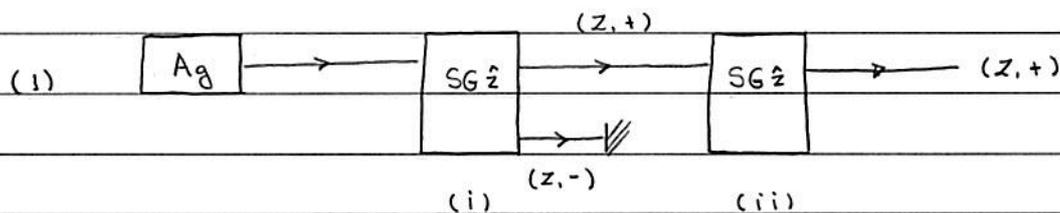
Ex.: conjunto aparatos Stern-Gerlach em série,

ideia: ilustrar postulados (3) e (4);

notação: SG \hat{n}

\uparrow direção campo \vec{B} não-homogêneo

vamos analisar 3 casos:



(i) e (ii) SGs c/ campos \vec{B} mesma direção

Observação: feixe spin polarizado (z,+) (preparado em (i)) é completamente transmitido por (ii)

de fato:

se $|\psi\rangle = C_+|+\rangle + C_-|-\rangle$ $\xrightarrow{\text{medida ideal}}$ $|+\rangle$

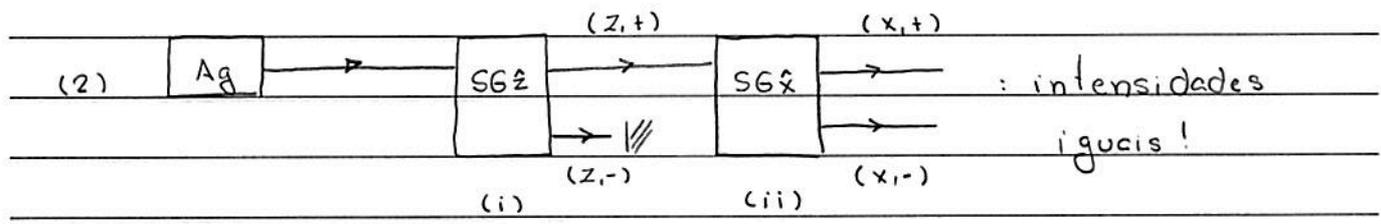
$S_z = \uparrow$ em (1) $P(S_z = \uparrow) = 1$

feixe incidente $\xrightarrow{\text{postulado (4)}}$ $P(S_z = \uparrow) = 0$

$\xrightarrow{\text{postulado (3)}}$

$\xrightarrow{\text{medida ideal}}$ $|+\rangle$

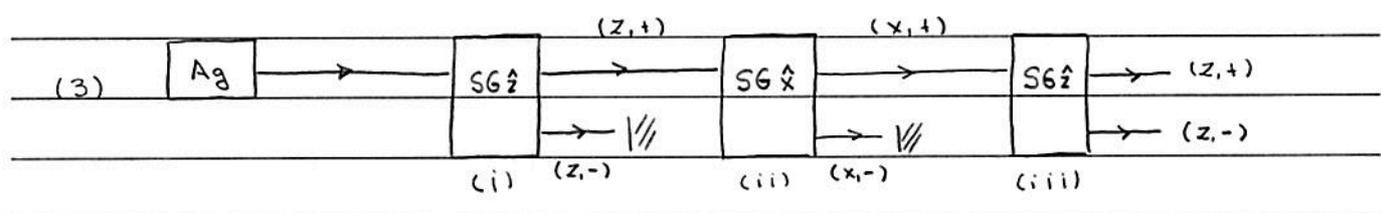
$S_z = \uparrow$ em (2)



(i) e (ii) : SGs c/ campos \vec{B} em direções \perp

Observação : feixe spin polarizado (z,+) (preparado em (i))
 é separado em 2 feixes de mesma intensidade em (ii) :

$$N A_g(z,+) \xrightarrow{(ii)} \begin{matrix} \frac{1}{2} N A_g(x,+) \\ \frac{1}{2} N A_g(x,-) \end{matrix}$$



analisador (iii) adicionado ao conjunto (2)

Observação : feixe spin polarizado (x,+) (preparado em (ii))
 é separado em 2 feixes de mesma intensidade em (iii) :

$$\frac{1}{2} N A_g(x,+) \xrightarrow{(iii)} \begin{matrix} \frac{1}{4} N A_g(z,+) \\ \frac{1}{4} N A_g(z,-) \end{matrix}$$

Lembras : autovalores S_x na base $|+\rangle, |-\rangle$:

$$\begin{aligned} |+\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) & \rightarrow & \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x) \\ |-\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle - |-\rangle) & \rightarrow & \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x - |-\rangle_x) \quad (194.1) \end{aligned}$$

temos que :

feixe preparado em (i) $|+\rangle$ medida ideal $|+\rangle_x$
 $P(S_x = \uparrow) = P(S_x = \downarrow)$ $S_x = \uparrow$ em (ii)
 Eq. (194.1) \oplus postulado (4)
 postulado (3)

$|+\rangle_x$ ----- medida \rightarrow : 2 feixes
 feixe preparado $P(S_z = \uparrow) = P(S_z = \downarrow) = 1/2$ ideal S_z mesma
 em (ii) intensidade!

notas (ii) e (iii) : info sobre polarização S_z é completamente perdida após medida S_x em (ii)

\hookrightarrow observáveis S_x e S_z não são compatíveis!

• Soma de momentos angulares.

consideram o subespaço $E(j_1, j_2) = E(j_1) \otimes E(j_2)$, onde

$\dim E(j_1) = 2j_1 + 1$, base: vetores $|j_1, m_1\rangle$ e

$\dim E(j_2) = 2j_2 + 1$, " " $|j_2, m_2\rangle$

consideram $|\psi\rangle \in E(j_1, j_2)$ sob uma notação infinitesimal:

$$U_{\hat{n}}(\epsilon) |\psi\rangle = U^{(1)}_{\hat{n}}(\epsilon) \otimes U^{(2)}_{\hat{n}}(\epsilon) |\psi\rangle$$

$$\text{Eq. (163.3)} \quad \rightarrow = \left(\hat{J}_1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{J}_1 \right) \otimes \left(\hat{J}_2 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{n} \cdot \vec{J}_2 \right) |\psi\rangle$$

$$\approx \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \hat{n} \cdot \left(\vec{J}_1 \otimes \hat{J}_2 + \hat{J}_1 \otimes \vec{J}_2 \right) \right) |\psi\rangle \quad (195.1)$$

\hookrightarrow definição:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes \hat{J}_2 + \hat{J}_1 \otimes \vec{J}_2, \quad \vec{J}_1 + \vec{J}_2 : \text{momento angular total} \quad (195.2)$$

como ops. \vec{J}_1 e \vec{J}_2 são independentes:

$$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0 \quad \text{e} \quad [J_{i\alpha}, J_{i\beta}] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_{i\gamma}; \quad i=1,2$$

$$\alpha, \beta, \gamma = x, y, z \quad (195.3)$$

1 exercício $\rightarrow [J_x, J_y] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$ (196.1)

Eqs. (195.1) e (196.1) consistentes c/ definição momento angular total (163.3)!

Ex.: (1) $\vec{J} = \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$: soma dois momentos angulares de spin

(2) $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$: soma momentos angulares orbital e spin : Eq. (189.5)

Considerar base p/ subespaço $E(j_1 j_2)$:

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \quad (196.2)$$

$$\text{Eq. (145.2): } J_i^2 |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = j_i(j_i+1)\hbar^2 |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \quad (196.3)$$

$$J_{iz} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = m_i \hbar |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle ; i=1,2$$

verifica-se que (exercício), Eq. (195.3):

$$[J_z, J_i^2] = [J_z, J_2^2] = [J_1^2, J_i^2] = [J_2^2, J_i^2] = 0$$

$\hookrightarrow J_1^2, J_2^2, J^2$ e J_z podem ser diagonalizados simultaneamente!

podemos escrever:

$$J^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J_z |j_1 j_2 j m\rangle = m\hbar |j_1 j_2 j m\rangle \quad (196.4)$$

$$J_i^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j_i(j_i+1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle ; i=1,2$$

como, p/ o subespaço $E(j_1 j_2)$:

$$\sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2| = 1, \quad (197.1)$$

temos que (j_1 e j_2 fixos)

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle; \quad (197.2)$$

próxima etapa (our task): determinar

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle \equiv \langle m_1 m_2 | j m\rangle : \text{coeficientes de Clebsch-Gordan} \quad (197.3)$$

de fato, problema soma momentos = determinação (197.3)
angulares

notar Eq. (197.3): elemento da matriz de transformação S
entre representações $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |m_1 m_2\rangle$
e $|j_1 j_2 j m\rangle = |j m\rangle$.

vamos verificar que:

$$(i) j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2;$$

$$(ii) m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

(197.4)

(iii) p/ cada par $j, m \sim$ somente um estado $|j m\rangle$

novamente, Eq. (197.2):

$$|j m\rangle = \sum_{m'_1 m'_2} |m'_1 m'_2\rangle \langle m'_1 m'_2 | j m\rangle \quad (197.5)$$

$$\bullet \quad J_z |j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} J_z |m_1, m_2\rangle \langle m_1, m_2 | j, m\rangle$$

$$m \hbar |j, m\rangle = (J_{1z} + J_{2z}) |m_1, m_2\rangle = (m_1 + m_2) \hbar |m_1, m_2\rangle$$

$\langle m_1, m_2 | \dots$

$$\hookrightarrow m \hbar \langle m_1, m_2 | j, m\rangle = \sum_{m_1', m_2'} (m_1' + m_2') \hbar \langle m_1, m_2 | m_1', m_2'\rangle \langle m_1', m_2' | j, m\rangle$$

$$\delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2, m_2'}$$

$$\hookrightarrow (m - m_1 - m_2) \hbar \langle m_1, m_2 | j, m\rangle = 0$$

se $\langle m_1, m_2 | j, m\rangle \neq 0 \rightarrow m = m_1 + m_2$: regra de seleção (198.1)

$$\bullet \quad J_- |j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} J_- |m_1, m_2\rangle \langle m_1, m_2 | j, m\rangle$$

$$\langle j, m-1\rangle = (J_{1-} + J_{2-}) |m_1, m_2\rangle \propto |m_1-1, m_2\rangle + |m_1, m_2-1\rangle$$

e similares p/ op. J_+ ;

utilizando Eq. (145.2), verifica-se que (exercício) :

$$\sqrt{(j \pm m)(j \mp m \pm 1)} \langle m_1, m_2 | j, m \mp 1\rangle =$$

$$= \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 \pm 1)} \langle m_1 \pm 1, m_2 | j, m\rangle \quad \text{: relação de recorrência}$$

$$+ \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 \pm 1)} \langle m_1, m_2 \pm 1 | j, m\rangle \quad (198.2)$$

de fato, consideras $m_1 = j_1$ e $m = j$ em (198.2), sinais superiores:

Eq. (198.1) : $m_1 + m_2 = m - 1 \rightarrow j_1 + m_2 = j - 1$

$\hookrightarrow m_2 = j - j_1 - 1$

$$\sqrt{2j} \langle j-j_2-1, j_2 | j, j-1 \rangle = \sqrt{(j_1+j_2-j+1)(j+j_1-j_2)} \langle j-j_2, j_2 | j, j \rangle$$

↳ todos os coeficientes $\langle m_1 m_2 | j m \rangle$ também podem ser determinados a partir de $\langle j-j_2, j_2 | j, j \rangle$

$$\text{se } \langle j-j_2, j_2 | j, j \rangle \neq 0 \rightarrow -j_1 \leq \underbrace{j-j_2}_{m_1} \leq j_1 \rightarrow j_2-j_1 \leq j \leq j_1+j_2 \quad (200.1)$$

Eqs. (199.1) e (200.1) : $|j_1-j_2| \leq j \leq j_1+j_2$: condição triangular (200.2)

• hipótese : $j = |j_1-j_2|, |j_1-j_2|+1, \dots, j_1+j_2-1, j_1+j_2$ (200.3)

$$\text{como } \dim E(j_1 j_2) = \dim E(j_1) \cdot \dim E(j_2) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

e $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j \rightarrow$ p/ cada j fixo $\sim 2j+1$ estados

$$\hookrightarrow \sum_{j=|j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = 2 \sum_{j=j}^{j_1+j_2} j + \sum_{j=j}^{j_1+j_2} 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\underbrace{(j_1+j_2) + (j_1-j_2)}_{2j_1} \right) \cdot \left(\underbrace{(j_1+j_2) - (j_1-j_2) + 1}_{2j_2+1} \right) +$$

$$+ \left(\underbrace{(j_1+j_2) - (j_1-j_2) + 1}_{2j_2+1} \right) = (2j_1+1) \cdot (2j_2+1) : \text{consistente} \\ \text{c/ (200.3)}$$

Obs. : nesse caso, consideramos $j_1 > j_2$; similar $j_1 < j_2$.

notas: Eqs. (198.1) - (200.3) : Eq. (197.4)

• vimos que os coeficientes de Clebsch-Gordon podem, e.g. se determinados a partir de $\langle j_1, j-j_1 | j, j \rangle$

↳ escolha $\langle j, j-j | j, j \rangle \in \mathbb{R}$ e positivo

relação de reconstrução (198.2), $\langle m, m_z | j, m \rangle \in \mathbb{R}$!

notas: condição de ortogonalidade p/ vetores $|j, m\rangle$:

$$\langle j', m' | j, m \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\stackrel{\text{Eq. (197.1)}}{\longrightarrow} \sum_{m_1, m_2} \langle j', m' | m_1, m_2 \rangle \langle m_1, m_2 | j, m \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (201.1)$$

similar, condição de ortogonalidade p/ vetores $|m_1, m_2\rangle$:

$$\langle m'_1, m'_2 | m_1, m_2 \rangle = \delta_{m'_1, m_1} \delta_{m'_2, m_2}$$

$$\longleftarrow \sum_{j, m} \langle m'_1, m'_2 | j, m \rangle \langle j, m | m_1, m_2 \rangle = \delta_{m'_1, m_1} \delta_{m'_2, m_2} \quad (201.2)$$

Eqs. (201.1) e (201.2): matriz de transformação definida pelos coeficientes de Clebsch-Gordan é unitária!

Ex. 1: $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, onde $s_1 = s_2 = 1/2$;

$$\text{Eq. (197.4)}: S = 0, 1$$

como $|m_1, m_2\rangle = |1+, 1+\rangle, |1+, 1-\rangle, |1-, 1+\rangle, |1-, 1-\rangle$,

verifica-se que (veja abaixo):

$$|S=0, m=0\rangle = |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1+\rangle - |1-\rangle) : \text{singlete}$$

$$|S=1, m=1\rangle = |11\rangle = |1+\rangle$$

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1+\rangle + |1-\rangle)$$

$$|1, -1\rangle = |1-\rangle$$

(201.3)

} : tripleto

notas: $|00\rangle = |++\rangle \underbrace{\langle ++|00\rangle}_0 + |+-\rangle \underbrace{\langle +-|00\rangle}_{1/\sqrt{2}} +$
 $+ |-+\rangle \underbrace{\langle -+|00\rangle}_{-1/\sqrt{2}} + |--\rangle \underbrace{\langle --|00\rangle}_0$

Ex. 2: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, onde l inteiro e $l > 0$ e $s = 1/2$;

Eq. (197.4) : $j = l - 1/2, l + 1/2$

verifica-se que (veja abaixo) p/ $j = l + 1/2$:

$|j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left(\sqrt{l+m+1/2} |m-1/2, 1/2\rangle + \sqrt{l-m+1/2} |m+1/2, -1/2\rangle \right)$

e, p/ $j = l - 1/2$ (202.2)

$|j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left(-\sqrt{l-m+1/2} |m-1/2, 1/2\rangle + \sqrt{l+m+1/2} |m+1/2, -1/2\rangle \right)$

notas: $|m-1/2, 1/2\rangle = |l, s=1/2, m_e=m-1/2, m_s=1/2\rangle =$

$= |l, m_e=m-1/2\rangle |s=1/2, m_s=1/2\rangle \stackrel{\text{Eq. (187.2)}}{=} |l, m_e=m-1/2\rangle \chi_+$

$\hookrightarrow \langle \vec{n} | m-1/2, 1/2\rangle = \langle \hat{n} | l, m_e=m-1/2\rangle \chi_+ = Y_l^{m-1/2}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
↖ Eq. (198.1)

similar: $\langle \vec{n} | m+1/2, -1/2\rangle = \langle \hat{n} | l, m_e=m+1/2\rangle \chi_- = Y_l^{m+1/2}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Definição : $\langle \vec{n} | j, m\rangle = \langle \vec{n} | l, s=1/2, j, m\rangle \equiv Y_l^{j, m}(\theta, \varphi)$

$\hookrightarrow \langle \vec{n} | j=l+1/2, m\rangle = Y_l^{l+1/2, m}(\theta, \varphi)$

onde

$$y_e^{l+1/2, m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l+m+1/2} Y_e^{m-1/2}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{l-m+1/2} Y_e^{m+1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} : \quad (203.1)$$

: compare com Eq. (189.3)

similar: $\langle \vec{n} | j = l - 1/2, m \rangle = y_e^{l-1/2, m}(\theta, \varphi)$, onde

$$y_e^{l-1/2, m}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} -\sqrt{l-m+1/2} Y_e^{m-1/2}(\theta, \varphi) \\ \sqrt{l+m+1/2} Y_e^{m+1/2}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (203.2)$$

• detalhes, Ex. 1: em princípio, podemos utilizar a relação de reconstrução (198.2), entretanto, nesse caso, é interessante utilizar um procedimento alternativo;

$$\text{Eq. (197.5)}: |s, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |m_1, m_2\rangle \langle m_1, m_2 | s, m\rangle$$

onde $s = 0, 1$

$$\text{e } |m_1, m_2\rangle = |1+, 1+\rangle, |1+, 1-\rangle, |1-, 1+\rangle, |1-, 1-\rangle$$

considerar $s = m = 1$; como $m = 1 = m_1 + m_2 \rightarrow m_1 = m_2 = 1/2$

$$\hookrightarrow |1, 1\rangle = |1+, 1+\rangle \langle +, + | 1, 1\rangle$$

como $|1, 1\rangle$ e $|1+, 1+\rangle$ não normalizados $\rightarrow \langle +, + | 1, 1\rangle = 1$:

consistente com escolha $\langle j_1, j_1 - j_2 | j, j \rangle = \langle 1/2, 1/2, 1, 1 \rangle \in \mathbb{R}^+$

$$\text{notas: } J_- |1, 1\rangle = J_- |1+, 1+\rangle = (J_{1,-} + J_{2,-}) |1+, 1+\rangle$$

$$\text{Eq. (145.2)}: J_- |1, 1\rangle = \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} \hbar |1, 0\rangle = \sqrt{2} \hbar |1, 0\rangle$$

$$J_{1,-} |1+, 1+\rangle = J_{1,-} |1+\rangle \otimes |1+\rangle = \sqrt{3/4 - 1/2(1/2-1)} \hbar |1-\rangle \otimes |1+\rangle \\ = |1-, 1+\rangle$$

similar: $J_{2,-} |1+\rangle = \hbar |1-\rangle$

$$\hookrightarrow J_{-} |11\rangle = \sqrt{2} \hbar |10\rangle = (J_{1,-} + J_{2,-}) |1+\rangle = |1-\rangle + |1+\rangle$$

$$\hookrightarrow |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1-\rangle + |1+\rangle)$$

$$\cdot J_{-} |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{-} (|1-\rangle + |1+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (J_{1,-} + J_{2,-}) (|1-\rangle + |1+\rangle)$$

$$\text{Eq. (145.2): } J_{-} |10\rangle = \sqrt{2} \hbar |1,-1\rangle$$

$$J_{1,-} |1-\rangle = |1--\rangle \quad J_{2,-} |1-\rangle = 0$$

$$J_{1,-} |1+\rangle = 0 \quad J_{2,-} |1+\rangle = |1--\rangle$$

$$\hookrightarrow J_{-} |10\rangle = \sqrt{2} \hbar |1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{-} (|1-\rangle + |1+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \hbar |1--\rangle$$

$$\hookrightarrow |1,-1\rangle = |1--\rangle$$

\cdot se $S=0 \rightarrow m=0$ e $|00\rangle = a|1-\rangle + b|1+\rangle$, pois $m_1 + m_2 = m = 0$

condição $\langle 00 | 1m \rangle = 0$;

como $\langle 00 | 1m \rangle = 0$ p/ $m = \pm 1$, temos que

$$\langle 00 | 10 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + b) = 0 \rightarrow a = -b$$

⊕ condição de normalização: $a = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\hookrightarrow |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1-\rangle - |1+\rangle)$$

\cdot detalhes, Ex. 2: novamente, vamos utilizar um procedimento alternativo;

como $j_1 = l$ e $j_2 = S = \frac{1}{2} \rightarrow j = l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$

Eq. (197.5):

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |m_1, m_2\rangle \langle m_1, m_2 | j, m\rangle$$

$$= \sum_{m_2} |m_2, 1/2\rangle \langle m_2, 1/2 | j, m\rangle + |m_2, -1/2\rangle \langle m_2, -1/2 | j, m\rangle$$

$$m_1 + 1/2 = m$$

$$m_2 - 1/2 = m$$

$$\hookrightarrow |j, m\rangle = |m - 1/2, 1/2\rangle \langle m - 1/2, 1/2 | j, m\rangle + |m + 1/2, -1/2\rangle \langle m + 1/2, -1/2 | j, m\rangle$$

$$= a_1$$

$$= a_2$$

$$\hookrightarrow |j, m\rangle = a_1 |m - 1/2, 1/2\rangle + a_2 |m + 1/2, -1/2\rangle ; j \in m \text{ fixos}$$

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$$

como $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \rightarrow J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$

$$= L^2 + S^2 + 2(L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z)$$

$$= L^2 + S^2 + L_+ S_- + L_- S_+ + 2L_z S_z$$

$$\hookrightarrow J^2 - L^2 - S^2 = L_+ S_- + L_- S_+ + 2L_z S_z$$

$$\hookrightarrow (J^2 - L^2 - S^2) |j, m\rangle = (J^2 - L^2 - S^2) (a_1 |m - 1/2, 1/2\rangle + a_2 |m + 1/2, -1/2\rangle)$$

$$= (L_+ S_- + L_- S_+ + 2L_z S_z) (\quad + \quad)$$

hipótese $j = l + 1/2$; temos que

$$(J^2 - L^2 - S^2) |j, m\rangle = (j(j+1) - l(l-1) - 3/4) \hbar^2 |j, m\rangle = l \hbar^2 |j, m\rangle$$

$$2L_z S_z |m - 1/2, 1/2\rangle = 2 \cdot (m - 1/2) \cdot 1/2 \hbar^2 |m - 1/2, 1/2\rangle$$

$$2L_z S_z |m + 1/2, -1/2\rangle = 2 \cdot (m + 1/2) \cdot (-1/2) \hbar^2 |m + 1/2, -1/2\rangle$$

Eq. (145.2):

$$L_+ S_- |m - 1/2, 1/2\rangle = (l(l+1) - (m - 1/2)(m + 1/2))^{1/2} (3/4 - 1/2(-1/2))^{1/2} \hbar^2 |m - 1/2, 1/2\rangle$$

$$L_+ S_- |m + 1/2, -1/2\rangle = 0$$

$$L \cdot S_+ |m - 1/2, 1/2\rangle = 0$$

$$L \cdot S_+ |m + 1/2, -1/2\rangle = \underbrace{\left(\ell(\ell - 1) - (m + 1/2)(m - 1/2) \right)^{1/2}}_{(\ell + m + 1/2)(\ell - m + 1/2)} \cdot \left(3/4 - (-1/2) \cdot 1/2 \right)^{1/2} \hbar^2 |m + 1/2, -1/2\rangle$$

$$\begin{aligned} L \cdot (J^2 - L^2 - S^2) |jm\rangle &= \ell \hbar^2 |jm\rangle = \ell \hbar^2 (a_1 |m - 1/2, 1/2\rangle + a_2 |m + 1/2, -1/2\rangle) = \\ &= \hbar^2 \left(a_1 (m - 1/2) + a_2 (\ell + m + 1/2)^{1/2} (\ell - m + 1/2)^{1/2} \right) |m - 1/2, 1/2\rangle \\ &+ \hbar^2 \left(-a_2 (m + 1/2) + a_1 (\ell + m + 1/2)^{1/2} (\ell - m + 1/2)^{1/2} \right) |m + 1/2, -1/2\rangle \end{aligned}$$

como $\langle m - 1/2, 1/2 | m + 1/2, -1/2 \rangle = 0 \rightarrow$ condição:

$$a_1 (\ell - m + 1/2)^{1/2} - a_2 (\ell + m + 1/2)^{1/2} = 0 \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{(\ell + m + 1/2)^{1/2}}{(\ell - m + 1/2)^{1/2}}$$

$$\oplus |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1 \rightarrow a_1 = \sqrt{\frac{\ell + m + 1/2}{2\ell + 1}} \quad \text{e} \quad a_2 = \sqrt{\frac{\ell - m + 1/2}{2\ell + 1}}$$

similar $j = \ell - 1/2$.

• matriz de notação,

$$\text{Eq. (171.3): } D^{(j)}_{m'm}(R) = \langle j m' | U(R) | j m \rangle = \langle j_1 j_2 j m' | U(R) | j_1 j_2 j m \rangle$$

$$\text{onde } U(R) = U^{(1)}(R) \otimes U^{(2)}(R) \quad ; \quad \text{Eq. (195.1)}$$

$$U(R) = U \hat{n}(\theta) = \exp(-i\theta \hat{n} \cdot \vec{J}/\hbar) = \exp(-i\theta \hat{n} \cdot \vec{J}_1/\hbar) \otimes \exp(-i\theta \hat{n} \cdot \vec{J}_2/\hbar)$$

$$\text{notas: } \langle j_1 j_2 m'_1 m'_2 | U(R) | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle$$

$$= \langle m'_1 m'_2 | U(R) | m_1 m_2 \rangle$$

$$= \langle m'_1 m'_2 | U^{(1)}(R) \otimes U^{(2)}(R) | m_1 m_2 \rangle$$

$$= \langle m'_1 | U^{(j_1)}(R) | m_1 \rangle \langle m'_2 | U^{(j_2)}(R) | m_2 \rangle = D^{(j_1)}_{m'_1 m_1}(R) D^{(j_2)}_{m'_2 m_2}(R)$$

$$\hookrightarrow D^{(j_1)}_{m'_1 m_1}(R) D^{(j_2)}_{m'_2 m_2}(R) = \langle m'_1 m'_2 | U(R) | m_1 m_2 \rangle$$

$$= \sum_{\substack{j, j' \\ m, m'}} \langle m'_1 m'_2 | j' m' \rangle \langle j' m' | U(R) | j m \rangle \langle j m | m_1 m_2 \rangle$$

$$D^{(j')}_{m' m}(R) \delta_{j j'}$$

$$= \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m, m'=-j}^j \langle m'_1 m'_2 | j m' \rangle D^{(j)}_{m' m}(R) \langle j m | m_1 m_2 \rangle \quad (206.1)$$

: série de Clebsch-Gordan

Eq. (206.1) : matrizes $D^{(j_1)}(R) \otimes D^{(j_2)}(R)$ e $D^{(j)}(R)$ relacionadas via uma transformação unitária ;
 elementos da matriz de transformação =
 = coeficientes de Clebsch-Gordan ;

- matrizes $D^{(j_1)}(R) \otimes D^{(j_2)}(R)$ e $D^{(j)}(R) \sim$ subespaço $E(j, j_2)$

- $D^{(j_1)}(R) \otimes D^{(j_2)}(R)$: representação redutível operador $U(R)$
 $D^{(j)}(R)$: " irredutível " "

esquemáticamente :

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} \rightarrow \begin{pmatrix} D^{(j_1+j_2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D^{(j_1+j_2-1)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & D^{(|j_1-j_2|)} \end{pmatrix} \quad (206.2)$$

formalmente, podemos escrever :

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} \oplus D^{(j_1+j_2-1)} \oplus \dots \oplus D^{(|j_1-j_2|)}$$

rep. redutível

rep. irredutível

• Aplicação Eq. (206.1).

$$\text{Eq. (175.3)} : D^{(l)}_{m_0}{}^*(R) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\theta, \varphi)$$

considerar Eq. (206.1) c/

$$j_1 = l_1, j_2 = l_2, j = l ; m_1 = m_2 = 0 \rightarrow m = 0 ;$$

c.c. Eq. (206.1) ;

$$m'_1 \rightarrow m_1 ; m'_2 \rightarrow m_2 ; m' \rightarrow m$$

$$\hookrightarrow Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \sum_{l, m} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}} \langle m_1 m_2 | l m \rangle *$$

$$* \langle 0 0 | l 0 \rangle Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (207.1)$$

• $\int d\Omega Y_{l_3}^{m_3}(\theta, \varphi)^* \text{ Eq. (207.1)} :$

$$\text{como } \int d\Omega Y_{l_3}^{m_3}(\theta, \varphi)^* Y_l^m(\theta, \varphi) = \delta_{l, l_3} \delta_{m, m_3}$$

$$\hookrightarrow \int d\Omega Y_{l_3}^{m_3}(\theta, \varphi)^* Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) =$$

$$= \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}} \langle m_1 m_2 | l_3 m_3 \rangle \langle 0 0 | l_3 0 \rangle : \quad (207.2)$$

: caso particular teorema de Wigner-Eckart (veja abaixo)

• é possível verificar que (veja Ex. 17.20, Menzbach):

$$\sum_{m'_2} \langle m'_1 m'_2 | j_3 m_3 \rangle D^{(j_2)}_{m'_2 m_2}(R) =$$

$$= \sum_{m_1 m} D^{(j_3)}_{m_3 m}(R) \langle m_1 m_2 | j_3 m \rangle D^{(j_1)}_{m'_1 m_1}{}^*(R) ; \quad (207.3)$$

pt notações infinitesimais, verifica-se que (207.3) é idêntica à relação de recorrência (198.2) !

Operadores tensoriais.

ideia: introduzir operadores irreduzíveis w.r.t. notações

duas etapas iniciais:

(1) representação op. escalar na base vetores $|j, m\rangle$;

considerar: op. escalar S;

Eq. (165.1): $[J_i, S] = 0, i = 1, 2, 3$

$\hookrightarrow [J_z, S] = [J^2, S] = 0$

como $J_z S = S J_z \rightarrow J_z (S |j, m\rangle) = m \hbar (S |j, m\rangle)$

similar: $J^2 (S |j, m\rangle) = j(j+1) \hbar^2 (S |j, m\rangle)$

$\hookrightarrow S |j, m\rangle \propto |j, m\rangle \rightarrow \langle j', m' | S |j, m\rangle \propto \langle j', m' | j, m\rangle$

ou $\langle j', m' | S |j, m\rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm} \langle j, m | S |j, m\rangle$ (208.1)

como $J_+ S = S J_+ \rightarrow \langle j, m | J_+ S |j, m-1\rangle = \langle j, m | S J_+ |j, m-1\rangle$

Eq. (145.2):

$\langle j, m | J_+ S |j, m-1\rangle = \sqrt{j(j-1) - m(m-1)} \hbar \langle j, m-1 | S |j, m-1\rangle$

$(J_- |j, m\rangle)^*$

$\langle j, m | S J_+ |j, m-1\rangle = \sqrt{j(j-1) - (m-1)m} \hbar \langle j, m | S |j, m\rangle$

$\hookrightarrow \langle j, m-1 | S |j, m-1\rangle = \langle j, m | S |j, m\rangle$, i.e., $\langle j, m | S |j, m\rangle$ independente m !

caso geral:

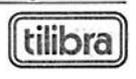
pt representação associada vetores $|\alpha, j, m\rangle$

\uparrow conjunto números quânticos

temos que:

$\langle \alpha', j', m' | S | \alpha, j, m\rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm} S^{(j) \alpha' \alpha}$ (208.2)

elemento matriz independe m



(2) Lembrar mecânica clássica;

definição tensor cartesiano \vec{T} ordem $(n \times n \times \dots \times n)$ N : objeto
c/ 3^N componentes que sob uma notação R se
transforma como:

$$T'_{ijk\dots} = \sum_{i'j'k'\dots} R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} \dots T_{i'j'k'\dots} \quad (209.1)$$

N -termos

onde R : matriz de notação (ortogonal) (156.3)

Ex. 1: vetor (usual) \vec{v} ;

Eq. (157.1): $v'_i = \sum_j R_{ij} v_j$: vetor \vec{v} é um tensor
de ordem 1

Ex. 2: considerar vetores \vec{u} e \vec{v} ;

↳ diádica: $T_{ij} = u_i v_j$: 9 componentes (209.2)

Eq. (157.1): $T'_{ij} = \sum_{i'j'} R_{ii'} R_{jj'} u_{i'} v_{j'} = \sum_{i'j'} R_{ii'} R_{jj'} T_{i'j'}$:

: T_{ij} é um tensor ordem 2 ; $3^2 = 9$ componentes.

T_{ij} pode ser escrito como:

$$u_i v_j = \frac{1}{2} u_i v_j + \frac{1}{2} u_i v_j + \frac{1}{2} u_j v_i - \frac{1}{2} u_j v_i + \frac{1}{3} \vec{u} \cdot \vec{v} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \vec{u} \cdot \vec{v} \delta_{ij}$$
$$= \frac{1}{3} \vec{u} \cdot \vec{v} \delta_{ij} + \frac{1}{2} (u_i v_j - u_j v_i) + \left(\frac{1}{2} (u_i v_j + u_j v_i) - \frac{1}{3} \vec{u} \cdot \vec{v} \delta_{ij} \right)$$

escalar: tensor tensor simétrico

1 componente antisimétrico: traço nulo: (209.3)

3 componentes 5 componentes

independentes independentes



notas: diádica T_{ij} pode ser escrita como uma soma de uma
de objetos com comportamentos distintos sob notação
↳ tensor cartesiano $T_{ij} = u_i \cdot v_j$ e redutível.

caso geral: tensor cartesiano ordem 2 T_{ij} pode ser escrito como

$$T_{ij} = \underbrace{\frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k T_{kk}}_{T^{(A)}_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji})}_{T^{(S)}_{ij}} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sum_k T_{kk} \quad (210.1)$$

sob notação, temos que:

$$\text{Eq. (157.1)} : T'_{ij} = \sum_{km} R_{ik} R_{jm} T_{km}$$

$$T'_{ji} = \sum_{km} R_{jk} R_{im} T_{km} = \sum_{km} R_{ik} R_{jm} T_{km}$$

$$\text{↳ } \sum_i T'_{ii} = \sum_{km} \sum_i R_{ik} R_{im} T_{km} = \sum_k T_{kk} : \text{invariante} \quad (210.2)$$

(escalar)

$$\text{Eq. (156.3)} \rightarrow \delta_{km}$$

$$\cdot T^{(A)'}_{ij} = \frac{1}{2} (T'_{ij} - T'_{ji}) = \sum_{km} R_{ik} R_{jm} \frac{1}{2} (T_{km} - T_{mk})$$

$$= \sum_{km} R_{ik} R_{jm} T^{(A)}_{km} \quad (210.3)$$

$$\cdot T^{(S)'}_{ij} = \frac{1}{2} (T'_{ij} + T'_{ji}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k T'_{kk}$$

$$= \sum_{km} R_{ik} R_{jm} (T_{km} + T_{mk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k T_{kk}$$

$$\sum_k R_{ik} R_{jk} \sum_l T_{ll} = \sum_{km} R_{ik} R_{jm} \delta_{km} \sum_l T_{ll}$$

$$= \sum_{km} R_{ik} R_{jm} \left(\frac{1}{2} (T_{km} + T_{mk}) - \frac{1}{3} \delta_{km} \sum_l T_{ll} \right) \quad (210.4)$$

$$T^{(S)}_{km}$$

notas:

Eq. (210.2): $\sum_k T_{kk}$: invariante sob notação

Eq. (210.3): sob notação componentes $T^{(A)}$ se transformam entre si

Eq. (210.4): " " " $T^{(S)}$ " " " "

↳ tensores $\sum_k T_{kk}$, $T^{(A)}$ e $T^{(S)}$ são as componentes irreduzíveis do tensor cartesiano de ordem 2 T_{ij}

(notas similaridade com o subespaço E_j):

subespaço irreduzível w.r.t. notações, Eq. (171.2).

ou $\sum_k T_{kk}$, $T^{(A)}$ e $T^{(S)}$: exemplos tensores irreduzíveis

Definição (Messiah): um tensor é irreduzível se o espaço onde ele está definido é irreduzível w.r.t. notações

notas: número de componentes:

$T_{ij} : 3 \times 3$

$\sum_k T_{kk} : 1$ componente

$T^{(A)}_{ij} : 3$ componentes independentes

$T^{(S)}_{ij} : 5$ " "

ou $3 \times 3 = 1 + 3 + 5$;

: componentes

$(2,0,1) + (2,1,1) + (2,2,1)$ Eq. (206.2)
" " "
e e e

i.e., T_{ij} pode ser escrito em termos de objetos que sob notação se transformam como harmônicos

esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi)$, $l = 1, 2, 3$

(211.1)

• Tenson esférico irredutível,

Lembrar: estado $|j, m\rangle$ sob notação \mathcal{R} ,

$$\text{Eq. (171.3)}: U(\mathcal{R})|j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle D^{(j)}_{m'm}(\mathcal{R}) \in \text{subespaço } E(j)$$

em particular, p/ $j=l$, temos que

$$\langle \vec{n} | U(\mathcal{R}) | l, m \rangle = \sum_{m'} \langle \vec{n} | l, m' \rangle D^{(l)}_{m'm}(\mathcal{R})$$

$$\text{ou } Y_l^m(\theta, \varphi) = \sum_{m'} Y_l^{m'}(\theta, \varphi) D^{(l)}_{m'm}(\mathcal{R}) \quad ; \text{ Eq. (174.2)}$$

Eq. (211.1) \rightarrow Eq. (174.2) pode ser utilizada p/ definir um
tenson esférico irredutível de ordem k :

$$T^{(k)}_q = \sum_{q'=-k}^{+k} T^{(k)}_{q'} D^{(k)}_{q'q}(\mathcal{R}) \quad ; \quad (211.2)$$

$q = -k, -k+1, \dots, k-1, k$

• $T^{(k)}_q$: componentes tenson esférico $T^{(k)}$

• como a matriz $D^{(k)}(\mathcal{R})$ corresponde a uma representação irredutível do op. de notação $U(\mathcal{R}) \rightarrow$ tenson $T^{(k)}$ é irredutível!

notar: a partir vetor $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e das expressões dos harmônicos esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi) = Y_l^m(\hat{n})$, é possível obter tensões esféricas:

$$T^{(k)}_q = Y_{l=k}^{m=q}(\hat{n} \rightarrow \vec{v}) \quad (211.3)$$

em particular, p/ $k=1$:

$$\text{Eq. (153.2)}: Y_1^0(\theta, \varphi) = Y_1^0(\hat{n}) = \sqrt{3/4\pi} z/r \rightarrow T_0^{(1)} = v_z$$

$$Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) = Y_1^{\pm 1}(\hat{n}) = \mp \sqrt{3/8\pi} (x \pm iy)/r \rightarrow T_{\pm 1}^{(1)} = \mp (v_x \pm iv_y)/\sqrt{2}$$

temos que:

$$T_{\pm 1}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (v_x \pm i v_y)$$

: componentes tensor

$$T_0^{(1)} = v_z$$

esférico $T^{(1)}$ em termos

componentes vetor \vec{v} (211.4)

$$T_{\pm 1}^{(1)} = +\frac{1}{\sqrt{2}} (v_x \mp i v_y)$$

pr $k=2$, temos que:

$$Y_2^0(\hat{n}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2z^2 - x^2 - y^2)/r^2 \rightarrow T_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2v_z^2 - v_x^2 - v_y^2)$$

$$Y_2^{\pm 1}(\hat{n}) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (x \pm iy)z/r^2 \rightarrow T_{\pm 1}^{(2)} = \mp \sqrt{3} (v_x \pm i v_y) v_z$$

$$Y_2^{\pm 2}(\hat{n}) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (x \pm iy)^2/r^2 \rightarrow T_{\pm 2}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (v_x \pm i v_y)^2$$

$$T_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (2v_z^2 - v_x^2 - v_y^2)$$

\hookrightarrow

: componentes tensor

$$T_{\pm 1}^{(2)} = \mp \sqrt{3} (v_x \pm i v_y) v_z$$

esférico $T^{(2)}$ em termos

componentes vetor \vec{v}

$$T_{\pm 2}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (v_x \pm i v_y)^2$$

(211.5)

Definição operador tensorial esférico e irredutível,

Lembrar: operador escalar S sob notação R,

Eq. (161.1) : $U^\dagger(R) S U(R) = S \cdot \underline{e}$ (212.1)

operador vetorial \vec{v} sob notação R,

Eq. (161.2) : $U^\dagger(R) v_i U(R) = \sum_j R_{ij} v_j$

ou $U(R) v_i U^\dagger(R) = \sum_j v_j R_{ji}$ (212.2)

além disso, se \vec{J} é o momento angular total do sistema,

Eq. (165.1) : $[J_i, v_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} v_k; i, j, k = 1, 2, 3$

Obs.: Eq. (165.1) pode ser considerada como a propriedade que define op. vetorial \vec{v}

pg. 172: representação do op. de notação U(R) na base |j m>:
: " irredutível do op. U(R)

estado |j m> sob notação R,

Eq. (171.3) : $U(R) |j m\rangle = \sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}(R) |j m'\rangle \in \text{subespaço } E(j)$

Definição: um operador tensorial esférico e irredutível $T_q^{(k)}$ de ordem (rank) k (-k ≤ k ≤ k) é um objeto c/ 2k+1 componentes que sob uma notação R se transforma como

$U^\dagger(R) T_q^{(k)} U(R) = \sum_{q'=-k}^{+k} D^{(k)*}_{qq'}(R) T_{q'}^{(k)}$ (212.3)

ou, forma equivalente,

$$U(R) T_q^{(k)} U^\dagger(R) = \sum_{q'=-k}^k T_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(j)}(R) \tag{213.1}$$

notas:

(1) Eqs. (171.3) e (213.1): vetores $|j m\rangle$ e tensores $T_q^{(k)}$ se transformam de forma análoga sob notação, similar relação entre vetores usuais, Eq. (157.1), e ops. vetoriais, Eq. (161.3).

(2) notas similaridades nas definições ops. vetorial, Eq. (212.2), e tensorial esférico, Eqs. (212.3) e (213.1).

• sobre a equivalência entre (212.3) e (213.1),

$$\sum_q D_{qq''}^{(k)}(R) \text{ Eq. (212.3):}$$

$$\begin{aligned} \sum_q U^\dagger(R) D_{qq''}^{(k)}(R) T_q^{(k)} U(R) &= \sum_{q'} \underbrace{\sum_q D_{qq''}^{(k)}(R) D_{qq'}^{(k)\dagger}(R)}_{\delta_{q'q''}} T_{q'}^{(k)} \\ &= T_{q''}^{(k)} \end{aligned}$$

$$q \rightarrow q' \text{ e } q'' \rightarrow q$$

$$\hookrightarrow T_q^{(k)} = \sum_{q'} U^\dagger(R) T_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(R) U(R)$$

$$\hookrightarrow U(R) T_q^{(k)} U^\dagger(R) = \sum_{q'} T_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(R) \text{ : Eq. (213.1)}$$

• consideram uma notação infinitesimal $U_{\hat{n}}(\epsilon)$; Eqs. (163.3) e (213.1):

$$\left(1 - i\epsilon \frac{\vec{J} \cdot \hat{n}}{\hbar}\right) T_q^{(k)} \left(1 + i\epsilon \frac{\vec{J} \cdot \hat{n}}{\hbar}\right) = \sum_{q'} T_{q'}^{(k)} \langle kq' | 1 - i\epsilon \frac{\vec{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} | kq \rangle$$

$$T_q^{(\kappa)} - \frac{i\epsilon}{\hbar} [\vec{J} \cdot \hat{n}, T_q^{(\kappa)}] + O(\epsilon^2) = T_q^{(\kappa)} - \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{q'} T_{q'}^{(\kappa)} \langle \kappa q' | \vec{J} \cdot \hat{n} | \kappa q \rangle$$

$$\hookrightarrow [\vec{J} \cdot \hat{n}, T_q^{(\kappa)}] = \sum_{q'} T_{q'}^{(\kappa)} \langle \kappa q' | \vec{J} \cdot \hat{n} | \kappa q \rangle ; \quad (214.1)$$

: Comparan Eq. (164.2)

se $\hat{n} = \hat{z}$, temos que

$$[J_z, T_q^{(\kappa)}] = \sum_{q'} T_{q'}^{(\kappa)} \langle \kappa q' | J_z | \kappa q \rangle = \hbar q T_q^{(\kappa)} ;$$

$$\hbar q \langle \kappa q' | \kappa q \rangle$$

similar se $\hat{n} = \hat{x} + i\hat{y}$;

$$[J_+, T_q^{(\kappa)}] = \sum_{q'} T_{q'}^{(\kappa)} \langle \kappa q' | J_+ | \kappa q \rangle = \hbar \sqrt{\kappa(\kappa+1) - q(q+1)} T_{q+1}^{(\kappa)} ;$$

$$\sqrt{\kappa(\kappa+1) - q(q+1)} \hbar \langle \kappa, q' | \kappa, q+1 \rangle$$

dessa forma, se $T_q^{(\kappa)}$ op. tensorial esférico e irredutível:

$$[J_z, T_q^{(\kappa)}] = \hbar q T_q^{(\kappa)}$$

(214.2)

$$[J_{\pm}, T_q^{(\kappa)}] = \hbar \sqrt{\kappa(\kappa+1) - q(q\pm 1)} T_{q\pm 1}^{(\kappa)}$$

similar (165.1), podemos considerar Eq. (214.2) como a propriedade que define um op. tensorial esférico e irredutível!

• se op. $T_q^{(\kappa)}$ associado a um observável $\rightarrow T_q^{(\kappa)}$ invariante sob rotação $\theta = 2\pi \rightarrow \kappa$ inteiro e $\kappa \geq 0$.

Ex. 1: op. escalar $S =$ op. tensorial esférico e irredutível ordem $\kappa = 0$.

Ex. 2: considerar op. vetorial $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$;

Eq. (213.1): $A_{+1}^{(1)} = -1/\sqrt{2} (A_x + i A_y)$

$A_{00}^{(1)} = A_z$

(213.1)

$A_{-1}^{(1)} = 1/\sqrt{2} (A_x - i A_y)$:

: componentes op. tensorial esférico e irredutível $A^{(1)}$ em termos componentes cartesianas op. vetorial \vec{A} .

Exercício: verificar que (213.1) satisfaz (214.2).

• similares Ex. 3 pg. 210, op. tensoriais esféricos e irredutíveis onde μ podem ser construídos a partir expressões dos harmônicos esféricos.

• Representação do operador tensorial.

ideia: determinar a representação do op. $T_q^{(k)}$ na base $|\alpha j m\rangle$, i.e., determinar

$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle$

↑ conjunto de números quânticos

verifica-se que

$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle = \langle \alpha' j' || T^{(k)} || \alpha j \rangle \langle j k m q | j k j' m' \rangle$:

elemento de matriz reduzido Coeficientes de Clebsch-Gordan

(215.2)

: Teorema de Wigner-Eckart

obs.: elemento de matriz reduzido independente m, m' e q !

• Demonstração (215.2),
considerar estados:

$$T_q^{(k)} | \alpha_j m \rangle : (2k+1) \cdot (2j+1) \text{ estados pois} \quad (216.1)$$

k e j : fixos

$$q = -k, -k+1, \dots, k-1, k$$

$$j = -m, -m+1, \dots, m-1, m$$

$\hat{=}$

$$| \alpha_j'' m'' \rangle = \sum_{m, q} T_q^{(k)} | \alpha_j m \rangle \underbrace{\langle m q | j'' m'' \rangle}_{\text{Coef. de}} \quad (216.2)$$

$\langle j_k m q | j_k j'' m'' \rangle$: Clebsch-Gordan

notas: $| \alpha_j'' m'' \rangle$: combinação linear estados (216.1) onde
coefs. = coefs. Clebsch-Gordan!

notas:

$$\cdot J_z | \alpha_j'' m'' \rangle = \sum_{m, q} J_z T_q^{(k)} | \alpha_j m \rangle \langle m q | j'' m'' \rangle$$

$$\stackrel{\text{Eq. (214.2)}}{=} \underbrace{(h q T_q^{(k)} + T_q^{(k)} J_z)} | \alpha_j m \rangle$$

propriedade

$$\langle m q | j'' m'' \rangle$$

$$h(q+m) T_q^{(k)} | \alpha_j m \rangle$$

$\rightarrow m''$

$$\hookrightarrow J_z | \alpha_j'' m'' \rangle = m'' h \sum_{m, q} T_q^{(k)} | \alpha_j m \rangle \langle m q | j'' m'' \rangle = m'' h | \alpha_j'' m'' \rangle \quad (216.3)$$

similar,

$$\cdot J_+ | \alpha_j'' m'' \rangle = \sum_{m, q} J_+ T_q^{(k)} | \alpha_j m \rangle \langle m q | j'' m'' \rangle$$

(I)

$$(I) = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q+1)} T_{q+1}^{(k)} | \alpha j m \rangle +$$

$$+ T_q^{(k)} J_+ | \alpha j m \rangle$$

$$\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \hbar | \alpha j m+1 \rangle$$

$$\hookrightarrow J_+ | \alpha j'' m'' \rangle = \sum_{mq} \langle m q | j'' m'' \rangle * \hbar *$$

$$* \left(\sqrt{k(k+1) - q(q+1)} T_{q+1}^{(k)} | \alpha j m \rangle + \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} T_q^{(k)} | \alpha j m+1 \rangle \right)$$

$q \rightarrow q-1$ $m \rightarrow m-1$

$$= \sum_{m,q} T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle + \left(\sqrt{k(k+1) - q(q-1)} \langle m q-1 | j'' m'' \rangle \right.$$

$$\left. + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \langle m-1 q | j'' m'' \rangle \right)$$

relação de

recorrência (198.2)

$$= \sqrt{j''(j''+1) - m''(m''+1)} \langle m q | j'' m''+1 \rangle$$

$$\hookrightarrow J_+ | \alpha j'' m'' \rangle = \sqrt{j''(j''+1) - m''(m''+1)} \hbar \sum_{m,q} T_q^{(k)} | \alpha j m \rangle \langle m q | j'' m''+1 \rangle$$

$| \alpha j'' m''+1 \rangle$

similar, verifica-se que

$$J_- | \alpha j'' m'' \rangle = \sqrt{j''(j''+1) - m''(m''-1)} \hbar | \alpha j'' m''-1 \rangle$$

(257.1)

Eqs. (256.3) e (257.1): $| \alpha j'' m'' \rangle$: Eq. (256.2), autoestados J_z e J^2

$$\sum_{j'' m''} \langle m' q' | j'' m'' \rangle * \text{Eq. (256.2)} :$$

$$\sum_{m, q} \sum_{j'' m''} T_q^{(\kappa)} |\alpha_j m\rangle \langle m q | j'' m'' \rangle \langle m' q' | j'' m'' \rangle$$

$$\langle j'' m'' | m' q' \rangle \in \mathbb{R}$$

$$= \sum_{j'' m''} |\alpha_j m\rangle \langle m' q' | j'' m'' \rangle$$

$$= \sum_{m q} T_q^{(\kappa)} |\alpha_j m\rangle \langle m q | m' q' \rangle = T_{q'}^{(\kappa)} |\alpha_j m'\rangle$$

se $q' \rightarrow q$ e $m' \rightarrow m$

$$\hookrightarrow T_q^{(\kappa)} |\alpha_j m\rangle = \sum_{j'' m''} |\alpha_j m\rangle \langle m q | j'' m'' \rangle \quad (218.1)$$

$\langle \alpha' j' m' | :$

$$\hookrightarrow \langle \alpha' j' m' | T_q^{(\kappa)} |\alpha_j m\rangle = \sum_{j'' m''} \langle \alpha' j' m' | \alpha_j m'' \rangle \langle m q | j'' m'' \rangle$$

$$\sim \delta_{j' j''} \delta_{m' m''} \langle j' \kappa m q | j' \kappa j'' m'' \rangle$$

$$= \langle \alpha' j' m' | \alpha_j m' \rangle \langle j' \kappa m q | j' \kappa j' m' \rangle$$

Como : $\langle \alpha' j' m' | \alpha_j m' \rangle$: independe m : Eq. (208.2)

$$\stackrel{e}{=} |j - \kappa| \leq j' \leq j + \kappa \quad : \text{Eq. (197.5)}$$

$\hookrightarrow \langle \alpha' j' m' | \alpha_j m' \rangle$ depende j, j' e κ

\hookrightarrow definição $\langle \alpha' j' m' | \alpha_j m' \rangle = \langle \alpha' j' || T^{(\kappa)} || \alpha_j \rangle : \text{Eq. (215.2)!}$

notas: consequência teorema de Wigner-Eckart \sim coeficientes de Clebsch-Gordan:

$$\langle \alpha' j' m' | T_q^{(\kappa)} |\alpha_j m\rangle \neq 0 \text{ se}$$

$$m + q = m' \rightarrow q = m' - m$$

$$|j - k| \leq j' \leq j + k \rightarrow |j - j'| \leq k \leq j + j' \quad \begin{matrix} \text{: regras de} \\ \text{seleção} \end{matrix} \quad (219.1)$$

↑
veja Exercise 17.13, Menzbach

Obs.: o fator $1/\sqrt{2j+1}$ pode ser introduzido em (219.2) por conveniência.

Ex. aplicações do teorema de Wigner-Eckart,
(p/ detalhes, veja Sec. 17.8, Menzbach)

(1) op. escalas S ,
como $S = T^{(k=0)} q=0$, temos que

$$\langle \alpha' j' m' | S | \alpha j m \rangle \neq 0 \text{ se Eq. (219.1)} \rightarrow \begin{matrix} q=0=m'-m \rightarrow m'=m \\ \& j \leq j' \leq j \rightarrow j'=j \end{matrix}$$

: comparem Eq. (208.2)

(2) op. vetorial \vec{V} ,
nesse caso, $k=1$ e $q=0, \pm 1$;
regras de seleção (219.1):

$$q = \Delta m = m' - m = 0, \pm 1$$
$$|j - 1| \leq j' \leq j + 1 : \begin{matrix} \text{se } j=0 \rightarrow 1 \leq j' \leq 1 \rightarrow j'=1 \\ \text{se } j \gg 1 \rightarrow j-1 \leq j' \leq j+1 \\ \text{ou } -1 \leq j' - j \leq 1 \\ \hookrightarrow \Delta j = j' - j = 0, \pm 1 \end{matrix}$$

em resumo:

$$\langle \alpha' j' m' | \vec{V} | \alpha j m \rangle \neq 0 \text{ se } \begin{matrix} \Delta m = m' - m = 0, \pm 1 \\ \Delta j = j' - j = 0, \pm 1 \\ (j=j'=0 \text{ não incluído}) \end{matrix}$$

(3) consideramos momento angular \vec{J} e determinamos
 $\langle \alpha' j' m' | \vec{J} | \alpha j m \rangle$;

$$\text{Eq. (215)} : J_{+1}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} J_+$$

$$J_0^{(1)} = J_z \quad : \text{componentes esféricas } \vec{J}$$

$$J_{-1}^{(1)} = +\frac{1}{\sqrt{2}} J_- \quad \text{em termos comp. cartesianas}$$

Eq. (215.2) :

$$\langle \alpha' j' m' | J_0^{(1)} | \alpha j m \rangle = \langle \alpha' j' m' | \vec{J} | \alpha j m \rangle \langle j \downarrow m 0 | j \downarrow j' m' \rangle$$

$$\langle \alpha' j' m' | J_z | \alpha j m \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm} m \hbar$$

$$\hookrightarrow \langle \alpha' j' m' | \vec{J} | \alpha j m \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm} m \hbar$$

$$\langle j \downarrow m 0 | j \downarrow j m \rangle$$

em particular, se $m=j$, temos que (tabela)

$$\langle j \downarrow j 0 | j \downarrow j j \rangle = \sqrt{\frac{j}{j+1}}$$

$$\hookrightarrow \langle \alpha' j' m' | \vec{J} | \alpha j m \rangle = \delta_{j'j} \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad (220.1)$$

(4) consideramos op. vetorial \vec{A} e o op. de momento angular \vec{J} ,

Eq. (215.2) p/ $q=1$ e $q=-1, 0, 1$:

$$\langle \alpha' j' m' | A_q^{(1)} | \alpha j m \rangle = \langle \alpha' j' m' | \vec{A} | \alpha j m \rangle \langle j \downarrow m q | j \downarrow j' m' \rangle$$

$$\langle \alpha' j' m' | J_q^{(1)} | \alpha j m \rangle = \langle \alpha' j' m' | \vec{J} | \alpha j m \rangle \langle j \downarrow m q | j \downarrow j' m' \rangle$$

$$\hookrightarrow \langle \alpha' j' m' | A_q^{(1)} | \alpha j m \rangle = \frac{\langle \alpha' j' m' | \vec{A} | \alpha j m \rangle \langle \alpha' j' m' | J_q^{(1)} | \alpha j m \rangle}{\langle \alpha' j' m' | \vec{J} | \alpha j m \rangle}$$

considerar caso particular $j=j'$;

considerar op. escalar $\vec{J} \cdot \vec{A}$;

como (verificar):

$$J_x A_x + J_y A_y = \frac{1}{2} (J_+ A_- + J_- A_+) = - (J_+ A_{-1} + J_- A_{+1}), \text{ vemos que:}$$

Eq. (215.1)

$$\langle \alpha' j m' | \vec{J} \cdot \vec{A} | \alpha j m \rangle = \langle \alpha' j m' | J_0 A_0 - J_+ A_{-1} - J_- A_{+1} | \alpha j m \rangle$$

pois $J_q | \alpha j m \rangle$ conhecido \uparrow

$$\sum_{q=0,\pm 1} \langle \alpha' j m' | A_q | \alpha j m \rangle$$

$$\text{Eq. (215.2): } \langle \alpha' j m' | A_q | \alpha j m \rangle = \langle \alpha' j || \vec{A} || \alpha j \rangle \langle j_1 m q | j_2 j m' \rangle$$

temo comum na $\sum q$!

$$\hookrightarrow \langle \alpha' j m' | \vec{J} \cdot \vec{A} | \alpha j m \rangle = C(j, m, m') \langle \alpha' j || \vec{A} || \alpha j \rangle$$

\uparrow cle

como $\vec{J} \cdot \vec{A}$ é um op. escalar Eq. (208.2) $C(j, m, m') \rightarrow C_j$

$$\hookrightarrow \langle \alpha' j m' | \vec{J} \cdot \vec{A} | \alpha j m \rangle = C_j \langle \alpha' j || \vec{A} || \alpha j \rangle \quad (221.1)$$

C_j pode ser determinada considerando $\vec{J} = \vec{A}$ e $\alpha = \alpha'$ em (221.1):

$$\langle \alpha j m | J^2 | \alpha j m \rangle = j(j+1) \hbar^2 = C_j \langle \alpha j || \vec{J} || \alpha j \rangle$$

como C_j independe α , podemos escrever

$$C_j = \frac{j(j+1) \hbar^2}{\langle \alpha' j || \vec{J} || \alpha j \rangle} = \frac{\langle \alpha' j m' | \vec{J} \cdot \vec{A} | \alpha j m \rangle}{\langle \alpha' j || \vec{A} || \alpha j \rangle} \quad (221.2)$$

\uparrow
Eq. (221.1)

Eqs. (220.2) e (221.2):

$$\langle \alpha' j m' | A_q^{(1)} | \alpha j m \rangle = \langle \alpha' j m' | \vec{J} \cdot \vec{A} | \alpha j m \rangle \frac{\langle \alpha' j m' | J_q^{(1)} | \alpha j m \rangle}{j(j+1)\hbar^2} \quad (222.1)$$

: teorema de projeção

• aplicação teorema de projeção (222.1):

determinação do momento magnético de um átomo;

forma geral, operadores " " " " " :

$$\vec{\mu} = \frac{-e}{2mc} (g_L \vec{L} + g_S \vec{S}) \quad ; \quad m: \text{massa elétron} \quad (222.2)$$

$g_L = 1$ e $g_S \approx 2$

como \vec{L} e \vec{S} : ops. vetoriais $\rightarrow \vec{\mu}$ é op. vetorial

considerar: $\mu = \langle \alpha j j | \mu_z | \alpha j j \rangle$: momento magnético átomo

Eq. (215.2):

$$\mu = \langle \alpha j j | \mu_z^{(1)} | \alpha j j \rangle = \langle \alpha j || \vec{\mu} || \alpha j \rangle \cdot \underbrace{\langle j j | J_0 | j j \rangle}_{\sqrt{j(j+1)}}$$

alternativa: via Eq. (222.1):

$$\mu = \langle \alpha j j | \mu_z^{(1)} | \alpha j j \rangle = \frac{-e}{2mc^2} \frac{1}{j(j+1)\hbar^2} \langle \alpha j j | \vec{J} \cdot (g_L \vec{L} + g_S \vec{S}) | \alpha j j \rangle + \underbrace{\langle \alpha j j | J_0^{(1)} | \alpha j j \rangle}_{j\hbar}$$

como $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

$$\hookrightarrow L^2 = (\vec{J} - \vec{S})^2 = J^2 + S^2 - 2\vec{J} \cdot \vec{S} \rightarrow 2\vec{J} \cdot \vec{S} = J^2 + S^2 - L^2$$

$$S^2 = (\vec{J} - \vec{L})^2 = J^2 + L^2 - 2\vec{J} \cdot \vec{L} \quad 2\vec{J} \cdot \vec{L} = J^2 + L^2 - S^2$$

$$\hookrightarrow \vec{J} \cdot (g_L \vec{L} + g_S \vec{S}) = \frac{1}{2}(g_S + g_L)L^2 + \frac{1}{2}(g_L - g_S)(L^2 - S^2)$$

$$\text{como } L^2 |\alpha j m\rangle = \ell(\ell+1) \hbar^2 |\alpha j m\rangle$$

$$S^2 |\alpha j m\rangle = s(s+1) \hbar^2 |\alpha j m\rangle$$

$$\text{e } J^2 |\alpha j m\rangle = j(j+1) \hbar^2 |\alpha j m\rangle$$

verifica-se que, p/ $g_L = 1$ e $g_S = 2$,

$$\mu = -\frac{e\hbar}{2mc} \left(1 + \frac{1}{2j(j+1)} (j(j+1) - \ell(\ell+1) + s(s+1)) \right) \quad (223.1)$$

g_J : fator de Landé