

Mecânica quântica relativística.

Refs.: Caps. 1-5, Bjorken and Drell, Relativistic Q.M.

Cap. 22, Messiah

Caps. 5-10, Schwabe

inicial: revisão teoria da relatividade restrita,

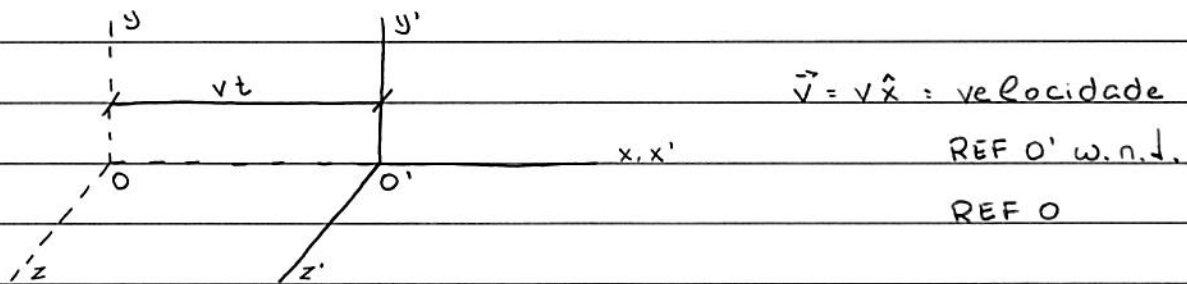
(p/ detalhes, veja notas de aula F1008 - Cap. 11)

Definição: evento: caracterizado por uma posição $\vec{r}$ e instante de tempo t no espaço-tempo (4-D):

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) = (x^0, x^k) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3 \quad \text{e} \quad k = 1, 2, 3$$

considerar 2 REFs inerciais O e O' , e.g.



hipótese: origem $O =$ origem O' p/ $t = t' = 0$

temos que, a relação entre

x^μ : coordenadas evento/pto P w.r.t. REF O

e x'^μ : " " " " " REF O'

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

: Transformação de

$$x'^2 = x^2$$

Lorentz

(239.1)

$$x'^3 = x^3$$

onde $\beta = v/c$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

se $\sinh \zeta \equiv \beta \gamma$ e $\cosh \zeta \equiv \gamma \rightarrow 0 \leq \zeta \leq +\infty$ ↖ parâmetro de boost ζ

↳ transf. (239.1) pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (239.2)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta & 0 & 0 \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_x$$

ou $x' = \Lambda x$: notação matricial

ou $x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$; $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ ⊕ convenção soma sob índices repetidos

Eq. (239.2) : transf. de Lorentz ~ notação em 4-D

⚡ imaginário $i\zeta$!

• consideram: 2 eventos $(ct_1, \vec{n}_1)$ e $(ct_2, \vec{n}_2)$; temos que

$$\Delta s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{n}_1 - \vec{n}_2|^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{n})^2 : \quad (239.3)$$

: intervalo entre eventos 1 e 2 no espaço-tempo

verifica-se que Δs^2 é invariante sob transf. Lorentz:

: intervalo invariante, i.e.,

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{r})^2 = (\Delta x'^0)^2 - (\Delta \vec{r}')^2 ;$$

REF O

REF O'

em particular, em forma diferencial:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2 - d\vec{r}^2 \quad (240.1)$$

verifica-se que, tempo próprio $d\tau$ é dado por:

$$d\tau = \frac{1}{c} ds \rightarrow d\tau \text{ é um invariante} \quad (240.2)$$

(útil e pr. definin 4-vetores)

• quadri-vetores (4-vetores)

Lembrar definição vetor: objeto formado por 3 componentes que, sob uma transformação ortogonal definida pela matriz A, se transforma como as componentes do vetor posição $\vec{r}$ sob A, i.e.,

$$r'_i = A_{ij} r_j \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (240.3)$$

↳ de modo análogo, podemos definir:

• quadri-vetor: objeto formado por 4 componentes (A^0, A^1, A^2, A^3) que se transformam como (239.3) sob uma transformação (boost) de Lorentz, (240.4)

em detalhes:

se $(A^0, \vec{A})$: componentes 4-veloz w.r.t. REF O e

$(A'^0, \vec{A}')$: " " " REF O'

$$\hookrightarrow A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1)$$

$$A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0)$$

$$A'^2 = A^2$$

(241.1)

$$A'^3 = A^3$$

como uma transformação de coordenadas que transforma
pto P no espaço-tempo $(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$
pode ser escrita como

$$x'^\alpha = X'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 \quad (241.2)$$

$\hookrightarrow$ 2 tipos de 4-velozes:

(1) contravariante A^μ :

$$\text{sob transf. (241.2): } A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (241.3)$$

(2) covariante B_μ :

$$\text{sob transf. (241.2): } B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

$$\text{determinada via inversa (241.2)} \quad \curvearrowright \quad (241.4)$$

notas Eqs. (241.3) e (241.4): $\neq$ posição índices μ e ν

produto escalar: definido como produto componentes
covariante e contravariante:

$$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha = B^\alpha A_\alpha : \text{notas posição dos índices:} \quad (241.5)$$

: exemplo: contração

como $B \cdot A$: escalar : invariante sob (241.2)

· novamente, intervalo invariante, forma diferencial (240.1):

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (242.1)$$

caso geral Eq. (240.1):

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta : \text{norma ou métrica} \quad (242.2)$$

do espaço-tempo

$g_{\alpha\beta}$: tensor métrico (tensor covariante)

em particular, p/ (242.1) : $g_{00} = 1$

(espaço-tempo plano)

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

$$g_{\alpha\beta} = 0, \alpha \neq \beta$$

ou

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(242.3)

temos que : $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ e $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$

notas: Eq. (242.2) pode ser escrita como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \overbrace{dx_\alpha dx^\alpha} \text{--- Eq. (241.5)}$$

pois ds^2 é um invariante, escrito como produto escalar

(242.4)

$\hookrightarrow dx_\alpha = g_{\alpha\beta} dx^\beta$: relação entre componentes vetoriais

ou $x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta$ covariante e contravariante

$$g^{\mu\alpha} + \text{Eq. (242.4)}: \quad g^{\mu\alpha} x_\alpha = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} x^\beta = \delta^\mu_\beta x^\beta = x^\mu$$

$$\hookrightarrow x^\mu = g^{\mu\alpha} x_\alpha \quad (243.1)$$

Eqs. (242.4) e (243.1): tensor métrico pode ser utilizado
(via contração) pr "abaixar"/"elevar" índices!

caso geral: se A^0, A^1, A^2, A^3 : componentes 4-velon
contravariante A^α

$$\hookrightarrow A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta \quad (243.2)$$

$$\hookrightarrow A_0 = A^0 \quad : \text{relação entre componentes}$$

$$A_\alpha = -A^\alpha \quad \text{covariantes e contravariantes}$$

$$\text{temos que: } A^\alpha = (A^0, \vec{A})$$

$$A_\alpha = (A_0, -\vec{A}), \text{ onde } \vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$$

$\hookrightarrow$ produto escalar (241.5):

$$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha = B^0 A^0 - \vec{B} \cdot \vec{A}$$

derivadas parciais:

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, +\vec{\nabla} \right) : \text{4-velon covariante}$$

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla} \right) : \text{4-velon contravariante}$$

(243.3)

$$\text{onde } \partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta$$

$$\hookrightarrow \partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} : \begin{array}{l} \text{4-divergente} \\ \text{4-vetor } A^\mu \end{array}$$

(244.1)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 : \begin{array}{l} \text{4-Laplaciano} \\ \text{(d'Alembertiano)} \end{array}$$

• quadri-velocidade,

se $\vec{u}$: velocidade da partícula:

$$U^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u c : \text{4-velocidade}$$

(244.2)

$$U^\kappa = \frac{dx^\kappa}{d\tau} = \frac{dx^\kappa}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u u^\kappa ; \kappa = 1, 2, 3 \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

como $d\tau = ds/c$ é um invariante e $dx^\mu = (dx^0, dx^\kappa)$ é um 4-vetor $\rightarrow U^\mu = (U^0, U^\kappa)$ é um 4-vetor

• quadri-momento,

como massa da partícula m é um escalar:

$$P^0 = m U^0 = \gamma_u m c : \text{4-momento}$$

(244.3)

$$P^\kappa = m U^\kappa = \gamma_u m u^\kappa$$

$$\text{notas: } \cdot c P^0 = \gamma_u m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = E : \text{energia total}$$

$$\cdot \vec{p} = \gamma_u m \vec{u} = \frac{m \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} : \text{momento relativístico}$$

$$\hookrightarrow P^\mu = (E/c, \vec{p}) = (P^0, P^\kappa)$$

notas: $P_\mu P^\mu = (P^0)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = \gamma_u^2 (mc)^2 - \gamma_u^2 (m\vec{u})^2$

$$= \frac{m^2 (c^2 - u^2)}{1 - u^2/c^2} = (mc)^2 : \text{invariante} \quad (245.1)$$

por outro lado: $(P^0)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$

$\hookrightarrow E = ((mc^2)^2 + (pc)^2)^{1/2} : \text{relação entre}$ (245.2)
energia total e momento

• sobre as equações da eletrodinâmica,

• se $\rho = \rho(\vec{r}, t) : \text{densidade de carga elétrica}$
e $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t) : \quad \quad \quad \text{corrente elétrica}$

$\hookrightarrow J^\mu = (c\rho, \vec{J}) : 4\text{-vetor}$

(245.3)

notas: $\partial_\mu J^\mu = 0 : \text{forma covariante da eq.}$
de continuidade

• se $\Phi = \Phi(\vec{r}, t) : \text{potencial escalar}$
e $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t) : \quad \quad \quad \text{vetor}$

$\hookrightarrow A^\mu = (\Phi, \vec{A}) : 4\text{-vetor}$

(245.4)

notas: $\partial_\mu A^\mu = 0 : \text{condição de Lorenz, forma covariante}$

Obs.: Lembra o postulado teoria da relatividade restrita:

eqs. de Maxwell são covariantes (apresentam a mesma
forma) sob transf. de Lorenz

(245.5)

• campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ em termos potenciais ϕ e $\vec{A}$:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

↳ é interessante definir tensor antisimétrico de ordem 2

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \quad : \text{tensor de campo} \quad (246.1)$$

onde $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$;

em termos componentes campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ (verificar)

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (246.2)$$

↳ eqs. de Maxwell, forma covariante:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$$

(246.3)

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$

$$\text{onde } F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\mu\nu}$$

• Hamiltoniana relativística partícula massa m e carga q sob campo EM,

$$H = \left((c\vec{p} - q\vec{A})^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2} + q\phi \quad (246.4)$$

$$\text{onde } p_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \gamma m u_i + \frac{1}{c} q A_i = \tilde{\pi}_i + \frac{1}{c} q A_i \quad \text{momento}$$

: canonicamente

$$\text{ou } \vec{p} = \vec{\tilde{\pi}} + \frac{1}{c} q \vec{A}$$

conjugado

notas: como $H = E + q\Phi \rightarrow H$: energia total partícula
 $\uparrow$ Eq. (245.2)

Eq. (246.4) pode ser escrita como:

$$(H - q\Phi)^2 = (c\vec{p} - q\vec{A})^2 + m^2c^4 = c^2(\vec{p} - q\vec{A}/c)^2 + m^2c^4$$

$$\text{ou } \frac{1}{c^2}(H - q\Phi)^2 - (\vec{p} - q\vec{A}/c)^2 = m^2c^2$$

comparando c/ Eq. (245.1), podemos definir o 4-veloz:

$$\pi^\mu = \left(\frac{1}{c}(H - q\Phi), \vec{p} - \frac{1}{c}q\vec{A} \right)$$

(247.1)

$$= \left(\frac{H}{c}, \vec{p} \right) - \frac{1}{c}q(\Phi, \vec{A}) = p^\mu - \frac{1}{c}qA^\mu$$

4-momento
canonicamente
conjugado

Eqs. de Klein-Gordon e Dirac,

ideia: determinar eq. de onda relativísticas p/ o elétron

inicial: considerar partícula massa m e spin-zero;
 nesse caso, partícula não apresenta graus de
 liberdade internos $\rightarrow$ descrita pela função de
 onda $\psi(\vec{r}, t)$;

ideia: similar ao caso não-relativístico, considerar o
 princípio de correspondência

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

(247.2)

como, p/ partícula livre, massa m : $E = p^2/2m$

$\hookrightarrow i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi(\vec{r}, t)$: Eq. de Schrödinger
 p/ partícula livre;

como hamiltoniano partícula livre relativística, massa m

$$\text{Eq. (245.2): } E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} \quad (248.1)$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (247.2)}} i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4)^{1/2} \psi(\vec{r}, t)$$

notas 2 dificuldades:

(i) expansão $(\dots)^{1/2} \rightarrow$ teoria não-local;

(ii) $\exists$ assimetria tempo t e coordenadas espaciais: NOT OK

c/ postulado (245.5) da teoria da relatividade:

eq. de onda deve ser covariante!

alternativa: considerar como pto de partida:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (248.2)$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (247.2)}} -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\vec{r}, t) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi(\vec{r}, t)$$

$$\textcircled{+} \text{ Eq. } \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2$$

$$\hookrightarrow \left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \psi(\vec{r}, t) : \text{Eq. de Klein-Gordon} \quad (248.3)$$

(*) SLIDES!

notas: Eq. (248.3): similar eq. de onda clássica

$\hookrightarrow$ " é covariante

importante: Eq. (248.2) não é equivalente à Eq. (248.1) mas

$$\text{à } E = \pm (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$$

↳ p, derivan (248.3) introduzimos soluções de energia negativa;
interpretação dessas soluções: antipartículas (positrões)

Obs.: 4-momento $\oplus$ Eq. (247.2):

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \rightarrow \left(i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla} \right) = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right) \stackrel{\text{Eq. (243.3)}}{=} i\hbar \partial^\mu$$

↳ princípio de correspondência (247.2) pode ser escrito como:

$$p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu \quad (249.1)$$

• próxima etapa: determinar a eq. de continuidade
correspondente a (248.3):

$$\psi^* + \text{Eq. (248.3)}: \quad \psi^* (\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \psi = 0 \quad (1)$$

$$\text{c.c.} \quad : \quad \psi (\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \psi^* = 0 \quad (2)$$

$$\hookrightarrow (1) - (2): \quad \psi^* \partial_\mu \partial^\mu \psi - \psi \partial_\mu \partial^\mu \psi^* = 0$$

$$\text{ou} \quad \partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) = 0$$

$$\text{identificando:} \quad J^\mu \propto \psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*$$

$$\hookrightarrow \partial_\mu J^\mu = 0: \text{ eq. de continuidade (245.3);}$$

de fato, temos que $\psi \sim e^{-imc^2 t/\hbar}$ - escolha ~ limite não-relativístico!

$$J^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) \quad (249.2)$$

$$\text{como } J^\mu = (c\rho, \vec{J}): \text{ Eq. (245.3):}$$

$$c p = \frac{i\hbar}{2mc} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*)$$

$$\hookrightarrow \rho(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^*(\vec{r}, t) \partial_t \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \partial_t \psi^*(\vec{r}, t)) \quad (250.1)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \psi^*(\vec{r}, t))$$

notas: $\rho(\vec{r}, t)$ não é positiva-definida

$\hookrightarrow$ " não pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade!

caso geral Eq. (248.3): partícula livre massa m e carga q sob campo EM;

Eq. (246.4):

$$(E - q\Phi)^2 - (c\vec{p} - q\vec{A})^2 = m^2 c^4$$

$$\oplus \text{ Eq. (247.2) } c/\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} :$$

$$\left((i\hbar\partial_t - q\Phi)^2 - (-i\hbar c\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 \right) \psi(\vec{r}, t) = m^2 c^4 \psi(\vec{r}, t)$$

$$\text{ou } \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{iq\Phi}{\hbar c} \right)^2 - \left(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A} \right)^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (250.2)$$

como 4-momento canonicamente conjugado (247.1):

NOT OK!

$$p^\mu = \pi^\mu - \frac{1}{c} q A^\mu \xrightarrow{\text{Eq. (249.1)}} p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu - \frac{1}{c} q A^\mu$$

definição: $p^\mu \rightarrow i\hbar \mathcal{D}^\mu$

(250.3)

$$\hookrightarrow \mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c} A^\mu : 4\text{-vetor}$$

• Eqs. (247.1) & (247.2):

$$\cdot E \rightarrow E - q\Phi \rightarrow i\hbar\partial_t - q\Phi$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{c}E \rightarrow \frac{1}{c}E - \frac{1}{c}q\Phi \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{1}{c}q\Phi =$$

$$= i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{iq}{\hbar c}\Phi\right) = i\hbar\left(\partial^0 + \frac{iq}{\hbar c}A^0\right) \equiv i\hbar\mathcal{D}^0$$

$$\cdot \vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{1}{c}q\vec{A} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{1}{c}q\vec{A} = i\hbar\left(-\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)$$

$$\hookrightarrow p^\mu \rightarrow i\hbar\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu\right) \equiv i\hbar\mathcal{D}^\mu$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu : \text{4-velon}$$

(250.3)

• notan Eqs. (247.2) & (249.1):

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{1}{c}qA^\mu$$

$$\hookrightarrow i\hbar\partial^\mu \rightarrow i\hbar\partial^\mu - \frac{1}{c}qA^\mu = i\hbar\left(\partial^\mu + \frac{iq}{\hbar c}A^\mu\right) = i\hbar\mathcal{D}^\mu \quad (250.4)$$

notas: $\mathcal{D}^0 = \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{iq}{\hbar c} \Phi$ e $\mathcal{D}^k = -\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c} \vec{A} = -(\vec{\nabla} - \frac{iq}{\hbar c} \vec{A})$

↳ Eq. (250.2): $(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu + (mc)^2) \psi(\vec{r}, t) = 0$ (251.1)

Obs.: p/ considerações adicionais sobre a Eq. de Klein-Gordon, veja Cap. 22, Baym.

Resumo: 1ª tentativa determinação eq. de onda relativística:

2 dificuldades:

(i) $\exists$ soluções eq. de onda c/ energia negativa;

(iii) não é possível definir uma densidade de probabilidade.

Eq. de Dirac.

ideia: determinar eq. de onda p/ partícula c/ spin, i.e.

partícula c/ graus de liberdade internos;

Lembrar: descrição partícula spin-1/2, caso não-relativístico:

" via spinones;

considerar: estado do sistema $|\psi\rangle \in E^{(0)} \otimes E^{(s)}$

onde: $E^{(0)}$: espaço vetorial ~ variáveis espaciais

$E^{(s)}$: " " " " spin

↳ $\psi_\sigma(\vec{r}) = \langle \vec{r} \sigma | \psi \rangle$: função de onda da partícula;

$$\sigma = \pm \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad |\vec{r} \sigma\rangle = |\vec{r}\rangle \otimes |\sigma\rangle$$

como $\hat{I} = \sum_{\sigma=\pm} \int d^3\vec{r}' |\vec{r}' \sigma\rangle \langle \vec{r}' \sigma|$

↳ $|\psi\rangle = \int d^3\vec{r}' |\vec{r}' + \rangle \langle \vec{r}' + | \psi \rangle + |\vec{r}' - \rangle \langle \vec{r}' - | \psi \rangle$

$$|\psi\rangle = \int d^3n' \psi_+(\vec{n}') |\vec{n}', +\rangle + \psi_-(\vec{n}') |\vec{n}', -\rangle$$

$$\hookrightarrow \langle \vec{n} | \psi \rangle = \psi_+(\vec{n}) |+\rangle + \psi_-(\vec{n}) |-\rangle$$

$$\text{como } |+\rangle \rightarrow \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |-\rangle \rightarrow \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \text{spinones}$$

$$\hookrightarrow \langle \vec{n} | \psi \rangle = \psi(\vec{n}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{n}) \\ \psi_-(\vec{n}) \end{pmatrix} : \text{função de onda de} \quad (252.1) \\ \text{2 componentes}$$

$$\text{normalização: } \langle \psi | \psi \rangle = \int d^3n |\psi_+(\vec{n})|^2 + |\psi_-(\vec{n})|^2 = 1$$

• caso não relativístico: consideramos elétron descrito por uma função de onda de N-componentes:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{E}^{(0)} \otimes \mathcal{E}^{(s)} \\ \text{ou} \quad \psi(\vec{n}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{n}, t) \\ \psi_2(\vec{n}, t) \\ \vdots \\ \psi_N(\vec{n}, t) \end{pmatrix} : \text{spinor}$$

(252.2)

$$\text{onde } \psi_s(\vec{n}, t) = \langle \vec{n} | s | \psi(t) \rangle ; s = 1, 2, \dots, N$$

similar Eq. (252.1), vamos definir a densidade de probabilidade como:

$$\rho(\vec{n}, t) = \sum_{s=1}^N |\psi_s(\vec{n}, t)|^2 : \text{positiva-definida} \quad (252.3)$$

$\hookrightarrow$ dificuldade (iii) encontrada c/ a eq. de Klein-Gordon é resolvida:

devido à similaridade Eq. (252.3) c/ o caso não-relativístico

$\hookrightarrow$ eq. de onda não relativística deve ser eq. diferencial de

1ª ordem w.r.t. tempo, i.e.,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_D \psi ; \quad H_D : \text{op. hermitiano} \quad (253.1)$$

como (253.1) deve ser eq. relativística $\rightarrow$ deve ter simetria entre as coordenadas espaciais e temporal

$\hookrightarrow H_D$: operador diferencial de 1ª ordem w.r.t. coordenadas espaciais!

próxima etapa: determinação op. H_D ;

considerar: partícula livre, massa m ;

como sistema apresenta invariância translacional $\rightarrow H_D \propto \vec{p}$

$\hookrightarrow$ possível forma op. H_D :

$$H_D = c \hat{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2$$

onde $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ e $\hat{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ e β :

: ops. hermitianos $\sim E^{(s)}$, i.e.,
matrizes $N \times N$;

dessa forma, Eq. de onda (253.1):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2) \psi \quad (253.2)$$

• determinação matrizes α^i e β : via princípio de correspondência;
se $\psi(\vec{r}, t)$: sol. Eq. (253.2)

$\hookrightarrow$ " deve satisfazer relação energia-momento (245.2)
ou, equivalentemente, eq. de Klein-Gordon (248.2);

(253.3)

notar: Eqs. (253.1) e (247.2): $(E - c \alpha^i p^i - \beta mc^2) \psi = 0$

$$\hookrightarrow (E + c \alpha^i p^i + \beta mc^2)(E - c \alpha^i p^i - \beta mc^2) \psi = 0$$

$$(E^2 - \underbrace{c^2 \alpha_i p_i \alpha_j p_j}_{\alpha_i \alpha_j p_i p_j} - \underbrace{\beta^2 m^2 c^4}_{\alpha_i \beta p_i} - \underbrace{mc^3 \alpha_i p_i \beta}_{\beta \alpha_j p_j} - mc^3 \beta \alpha_j p_j) \psi = 0$$

$$= (\alpha_i)^2 (p_i)^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j p_i p_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j$$

$$(E^2 - c^2 (\alpha_i)^2 (p_i)^2 - \beta^2 m^2 c^4 - \frac{1}{2} c^2 \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j -$$

$$- mc^3 \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i) \psi = 0 \quad (254.1)$$

Como Eq. (254.1) = $(E^2 - p^2 c^2 - m^2 c^4) \psi = 0$
 condição $\nearrow$

$\hookrightarrow$ matrizes α^i e β são tais que:

$$\text{relações de anticomutação} \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_i)^2 = \beta^2 = 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \quad i \neq j \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \end{array} \right. \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} \hat{1} \quad (254.2)$$

Dessa forma, a eq. de onda relativística p/ o elétron é dada por:

$$i \hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = (-i \hbar c \hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2) \psi(\vec{r}, t) : \text{Eq. de Dirac} \quad (254.3)$$

onde $\psi(\vec{r}, t)$: spinor N -componentes

e matrizes $N \times N$ α^i e β satisfazem álgebra (254.2).

próxima etapa: determinação de uma representação p/ as matrizes α^i e β ;

Lembrar: α^i e β : matrizes hermitianas;

Eq. (254.2): matrizes α^i e β anticomutam

$$\text{e } (\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1 \rightarrow \text{autovalores } \alpha^i \text{ e } \beta = \pm 1$$

$$\text{notas: } \beta \cdot (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) = 0 \rightarrow \beta \alpha^i \beta + \beta^2 \alpha^i = 0 \rightarrow \alpha^i = -\beta \alpha^i \beta$$

$$\hookrightarrow \text{Tr} \alpha^i = -\text{Tr}(\beta \alpha^i \beta) = -\text{Tr}(\alpha^i \beta^2) = -\text{Tr} \alpha^i \rightarrow \text{Tr} \alpha^i = 0$$

$$\text{similar: } \alpha^i \cdot (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) = 0 \rightarrow \alpha^i \beta \alpha^i = -\beta$$

$$\hookrightarrow \text{Tr} \beta = -\text{Tr}(\alpha^i \beta \alpha^i) = -\text{Tr}(\beta (\alpha^i)^2) = -\text{Tr} \beta \rightarrow \text{Tr} \beta = 0$$

como autovalores α^i e $\beta = \pm 1$ e $\text{Tr} \alpha^i = \text{Tr} \beta = 0$

$\hookrightarrow$ ordem matrizes N : par!

se $N=2 \rightarrow$ conjunto de matrizes: $\hat{I}_{2 \times 2}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:

matrizes de Pauli

: NOT OK, pois são necessárias 4 matrizes que anticomutam!

$\hookrightarrow$ menor valor possível: $N=4$;

nesse caso, uma representação particular é dada por:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{I}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\hat{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (255.1)$$

onde σ^i : matrizes de Pauli, $i=1,2,3$;

verificar-se que Eq. (255.1) OK c/ álgebra (254.2)

Obs.: Eqs. (254.3) e (255.1): representação padrão Eq. de Dirac

sobre a equação de continuidade,

consideram uma dada representação das matrizes α^i e β

como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} : \text{Eq. (252.2)} \rightarrow \psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

hermitiano conjugado

notas:

$$\psi^\dagger * \text{Eq. (254.3)} : i\hbar \psi^\dagger \partial_t \psi = -i\hbar c \psi^\dagger \hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi \quad (1)$$

$$\text{Eq. (254.3)}^\dagger * \psi : -i\hbar (\partial_t \psi^\dagger) \psi = +i\hbar c (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \cdot \hat{\alpha} \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi \quad (2)$$

$$\text{onde } (\alpha^i)^\dagger = \alpha^i \text{ e } \beta^\dagger = \beta$$

$$(1) - (2) : \underbrace{i\hbar (\psi^\dagger \partial_t \psi + (\partial_t \psi^\dagger) \psi)}_{\partial_t (\psi^\dagger \psi)} = \underbrace{-i\hbar c (\psi^\dagger \hat{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^\dagger) \cdot \hat{\alpha} \psi)}_{(3)} \quad (1)$$

$$(3) = \psi^\dagger \alpha^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi) \alpha^\mu \psi = \partial_\mu (\psi^\dagger \alpha^\mu \psi)$$

$$\hookrightarrow \partial_t (\psi^\dagger \psi) + \partial_\mu (c \psi^\dagger \alpha^\mu \psi) = 0 : \text{eq. de continuidade (256.1)}$$

identificando:

$$\rho = \psi^\dagger \psi : \text{densidade de probabilidade : ou cf Eq. (252.3)}$$

$$\text{e } J^\mu = c \psi^\dagger \alpha^\mu \psi : \text{ " " corrente}$$

(256.1)

$$\hookrightarrow J^\mu = (c\rho, \vec{J}) = (c\psi^\dagger \psi, c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi) :$$

: verifica-se que J^μ é, de fato, 4-vetor (veja abaixo)

Ex.: partícula em repouso.

considerar: partícula livre, massa m , em repouso;

$$\text{Eq. (254.3):} \quad i\hbar \partial_t \psi = \beta mc^2 \psi; \quad (257.1)$$

em particular, p/ a representação (255.1) da matriz β ,
temos 4 possíveis soluções p/ Eq. (257.1):

$$\psi_1^{(+)} = e^{-imc^2 t/\hbar} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_2^{(+)} = e^{-imc^2 t/\hbar} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad : \text{energia positiva}$$

$$\psi_1^{(-)} = e^{+imc^2 t/\hbar} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_2^{(-)} = e^{+imc^2 t/\hbar} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad : \text{energia negativa}$$

(257.2)

(i) Similar Eq. de Klein-Gordon: 3 soluções de energia negativa
~ condição (253.3): ψ deve satisfazer

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \sim \quad E = \pm (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2};$$

interpretação sol. de energia negativa: antipartículas
(veja abaixo)

(ii) diferente Eq. de Klein-Gordon: densidade de probabilidade
~ Eq. de Dirac é positiva-definida.

caso geral Eq. (254.3): partícula livre, massa m , carga q
sob campo EM;

consideram: campo EM: $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$, onde

$\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$: potencial escalar;

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$: " vetor;

Eqs. (247.1) e (247.2):

$$E \rightarrow E - q\Phi \rightarrow i\hbar\partial_t - q\Phi$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{1}{c}q\vec{A} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{1}{c}q\vec{A}$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (253.2): } (i\hbar\partial_t - q\Phi)\psi = \left(c\hat{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{1}{c}q\vec{A} \right) + \beta mc^2 \right) \psi$$

$$\text{ou } i\hbar\partial_t \psi = \left(c\hat{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{1}{c}q\vec{A} \right) + \beta mc^2 + q\Phi \right) \psi : \text{Eq. de Dirac}$$

(258.1)

Obs.: comparando Eqs. (250.2) e (258.1)

nesse caso, op. HD assume a forma:

$$H_D = c\hat{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{1}{c}q\vec{A} \right) + \beta mc^2 + q\Phi \hat{I}_{4 \times 4} \quad (258.2)$$

$\hookrightarrow$

próxima etapa: determinar o limite não-relativístico Eq. (258.1);

consideram: $\psi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$; $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\chi}$: spinores de
2 componentes (258.3)

Eq. (258.2) e (258.3) $\oplus$ representação (255.1) p/ matrizes

α^i e β :

$$i\hbar \partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot (\vec{p} - \frac{1}{c} q \vec{A}) \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + q\Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

como $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{1}{c} q \vec{A}$: Eq. (247.3) , temos que

$$i\hbar \partial_t \tilde{\psi} = c \hat{\sigma} \cdot \vec{\pi} \tilde{\chi} + mc^2 \tilde{\psi} + q\Phi \tilde{\psi}$$

e (259.1)

$$i\hbar \partial_t \tilde{\chi} = c \hat{\sigma} \cdot \vec{\pi} \tilde{\psi} - mc^2 \tilde{\chi} + q\Phi \tilde{\chi}$$

onde $\hat{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

como, no limite não-relativístico, mc^2 : maior escala energética
 $\hookrightarrow$ é interessante considerar:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = e^{-imc^2 t/\hbar} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (259.2)$$

onde $\psi = \psi(\vec{r}, t)$ e $\chi = \chi(\vec{r}, t)$: variação "lenta" no tempo

comparamos Eqs. (257.2) e (259.2) :

Eq. (259.2) ~ solução de energia positiva ;

$$\text{como } i\hbar \partial_t \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = mc^2 e^{-imc^2 t/\hbar} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + e^{-imc^2 t/\hbar} (-i\hbar \partial_t) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Eq. (259.1) e (259.2) :

$$i\hbar \partial_t \psi = c \hat{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + q\Phi \psi$$

e

(259.3)

$$i\hbar \partial_t \chi = c \hat{\sigma} \cdot \vec{\pi} \psi + (q\Phi - 2mc^2) \chi$$

segunda Eq. (259.3) pode ser escrita como

$$(2mc^2 + E - q\Phi) \chi = c \hat{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi$$

$= 2mc^2$ pois. no limite não relativístico: $mc^2 \gg E, q\Phi$

$$\hookrightarrow \chi = \frac{\hat{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2mc} \varphi \quad (260.1)$$

notas: $\chi \sim \frac{\pi}{c} \varphi \sim \frac{v}{c} \varphi \rightarrow \chi \ll \varphi$, i.e.,
 $v/c \ll 1$

χ : componente "pequena" spinor ψ

φ : "grande" " "

Eqs. (259.3) e (260.1):

$$i\hbar \partial_t \varphi = \frac{1}{2m} (\hat{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\hat{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \varphi + q\Phi \varphi :$$

: teoria Dirac 4 componentes $\rightarrow$ teoria 2 componentes
 $v/c \ll 1$

como (veja abaixo):

$$(\hat{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\hat{\sigma} \cdot \vec{\pi}) = \pi^2 - \frac{\hbar}{c} q \hat{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (260.2)$$

$$\hookrightarrow i\hbar \partial_t \varphi = \left(\frac{1}{2m} (\vec{p} - \frac{1}{c} q \vec{A})^2 - \frac{\hbar}{2mc} q \hat{\sigma} \cdot \vec{B} + q\Phi \right) \varphi : \text{Eq. de Pauli}$$

(260.3)

Eq. (260.3) $\rightarrow$ Eqs. (254.3) e (258.1): ok p/ descrição não relativística do elétron.

hipótese: campo magnético $\vec{B}$ uniforme e fixo;

considerando gauge simétrico: $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$,

temos que:

$$(\vec{p} - \frac{1}{c} q \vec{A})^2 = (\vec{p} - \frac{1}{2c} q \vec{B} \times \vec{r})^2$$

$$= p^2 - \frac{1}{2c} q (\vec{p} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) + (\vec{B} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}) + O(B^2)$$

$$2 \vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 2 \vec{B} \cdot \vec{L}$$

$$\begin{aligned} \text{Eq. (260.3)} \rightarrow i\hbar \partial_t \psi &= \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2mc} q \vec{B} \cdot \vec{L} - \frac{\hbar}{2mc} q \hat{\sigma} \cdot \vec{B} + q\phi \right) \psi \\ &= \frac{1}{2mc} q \vec{B} \cdot (\vec{L} + 2 \cdot \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}) \psi \\ &\quad \quad \quad \vec{S} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow i\hbar \partial_t \psi = \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2mc} q \vec{B} \cdot (\vec{L} + 2\vec{S}) + q\phi \right) \psi \quad (261.1)$$

Lembrar: momento magnético elétron:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_{\text{orbital}} + \vec{\mu}_{\text{spin}} = \frac{1}{2mc} q (\vec{L} + g\vec{S})$$

$\hookrightarrow g \approx 2$: fator gíromagnético

notar: Eq. de Dirac indica:

(i) $\exists$ mom. mag. intrínseco (spin) elétron

(ii) $g = 2$.

vamos verificar Eq. (260.2).

Lembrar identidade: se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ vetores, temos que

$$(\hat{\sigma} \cdot \vec{A})(\hat{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \hat{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\hookrightarrow (\hat{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\hat{\sigma} \cdot \vec{\pi}) = \pi^2 + i \hat{\sigma} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\pi})$$

como $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{1}{c} q \vec{A} \rightarrow \pi_i = -i\hbar \partial_i - \frac{1}{c} q A_i$: notação usual

$$\hookrightarrow (\vec{\pi} \times \vec{\pi})_i \psi = \epsilon_{ijk} (-i\hbar \partial_j - \frac{1}{c} q A_j) (-i\hbar \partial_k - \frac{1}{c} q A_k) \psi$$

$$= \epsilon_{ijk} \left(i q \frac{\hbar}{c} \partial_j (A_k \psi) + i q \frac{\hbar}{c} A_j \partial_k \psi \right) = \frac{i}{c} \hbar q \underbrace{\epsilon_{ijk} (\partial_j A_k)}_{B_i} \psi$$

↳ Eq. (260.2)

• Forma covariante Eq. de Dirac,

ideia: reescrever a Eq. de Dirac (254.3) em uma formulação + simétrica w.r.t. variáveis espaciais e temporais;

$$\frac{1}{c} \beta + \text{Eq. (254.3)}: i \hbar \beta \partial_0 \psi = (-i \hbar \beta \alpha^k \partial_k \psi + \beta^2 m c \psi)$$

$$\text{ou } (-i \hbar \beta \partial_0 - i \hbar \beta \alpha^k \partial_k + m c) \psi = 0$$

$$\text{Definição: } \gamma^0 = \beta \quad \text{e} \quad \gamma^k = \beta \alpha^k$$

: matrizes γ (262.1)

$$\text{ou } \gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\gamma^0, \hat{\gamma})$$

$$\text{↳ } (-i \hbar \gamma^0 \partial_0 - i \hbar \gamma^k \partial_k + m c) \psi = 0$$

$$\text{ou } \left(-i \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{m c}{\hbar} \right) \psi = 0 \quad : \text{ Eq. de Dirac,}$$

forma covariante (262.2)

Lembrar: $\lambda_c = \frac{\hbar}{m c}$: comprimento de onda Compton

• notação (introduzida por Feynmann):

$$\not{\gamma} = \gamma \cdot \vec{\sigma} = \gamma^\mu \sigma_\mu = \gamma_\mu \sigma^\mu = \gamma^0 \sigma^0 - \hat{\gamma} \cdot \vec{\sigma}$$

onde $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu$: componentes covariantes matrizes γ

$$\text{↳ Eq. (262.2): } \left(-i \not{\gamma} + \frac{m c}{\hbar} \right) \psi = 0$$

(262.3)

• propriedades matrizes r :

• $r^{0\dagger} = r^0$: r^0 matriz hermitiana

• $r^{\mu\dagger} = -r^\mu$: r^μ " anti-hermitiana

$\hookrightarrow r^{\mu\dagger} = r^0 \gamma^\mu r^0$; $\mu = 0, 1, 2, 3$

• $r^\mu r^\nu + r^\nu r^\mu = 2g^{\mu\nu} \hat{1}_{4 \times 4}$ (263.1)

• $r_\mu = g_{\mu\nu} r^\nu \rightarrow r_0 = r^0$ e $r_k = -r^k$

• $r^\mu = r_\mu^\dagger = r_\mu^{-1}$

Exercício: verificar que álgebra (254.2) $\rightarrow$ Eq. (263.1).

em particular, p/ a representação (255.1), temos que

$$r^0 = \begin{pmatrix} \hat{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\hat{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad r^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (263.2)$$

• similar p/ caso geral, Eq. (258.1):

$\frac{1}{c} \beta^* \text{ Eq. (258.1):}$

$$\beta (i\hbar \partial_0 - \frac{1}{c} q \Phi) \psi = \beta \hat{\alpha} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{1}{c} q \vec{A}) \psi + mc \psi$$

ou
$$\left(i r^0 \left(\partial_0 + \frac{i}{\hbar c} q \Phi \right) - i \hat{r} \cdot \left(-\vec{\nabla} + \frac{i}{\hbar c} q \vec{A} \right) - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0$$

$$= \mathcal{D}_0 \quad = \vec{\mathcal{D}} \quad : \text{ Eq. (250.3)}$$

$\hookrightarrow (-i r^\mu \mathcal{D}_\mu + \frac{mc}{\hbar}) \psi = 0$

(263.3)

• consideramos hermitiano conjugado Eq. (263.3):

$$(i\hbar r^\mu \partial_\mu - mc)\psi = (r^\mu (i\hbar \partial_\mu - q A_\mu) - mc)\psi = 0$$

$$\hookrightarrow \text{h.c.: } (-i\hbar \partial_\mu - q A_\mu)\psi^\dagger r^\mu - mc\psi^\dagger = 0, \quad (264.1)$$

$$\text{onde } \partial_\mu \psi^\dagger r^\mu = (\partial_\mu \psi^\dagger) r^\mu$$

$$\cdot \text{Definição: adjunto de } \psi: \bar{\psi} = \psi^\dagger r^0 \quad (264.2)$$

$$\text{notas: } \bar{\psi} r^0 = \psi^\dagger (r^0)^2 \rightarrow \psi^\dagger = \bar{\psi} r^0$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (264.1)} * r^0 \oplus \text{Eq. (263.1):}$$

$$(-i\hbar \partial_\mu - \frac{1}{c} q A_\mu) \psi^\dagger r^0 r^\mu (r^0)^2 - mc \psi^\dagger r^0 = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{\psi} r^\mu}$$

$$\hookrightarrow (-i\hbar \partial_\mu - \frac{1}{c} q A_\mu) \bar{\psi} r^\mu - mc \bar{\psi} = 0$$

$$\text{ou } (-i\partial_\mu - \frac{1}{\hbar c} q A_\mu) \bar{\psi} r^\mu - \frac{mc}{\hbar} \bar{\psi} = 0 : \text{Eq. adjunta } (264.3)$$

$$\cdot \text{notas: } \bar{\psi} \psi = \psi^\dagger r^0 \psi =$$

$$= (\psi_1^\dagger \psi_2^\dagger \psi_3^\dagger \psi_4^\dagger) \begin{pmatrix} \hat{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\hat{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

• sobre a eq. de continuidade correspondente a (263.3):

$$\bar{\psi} * \text{Eq. (263.3)} : i\hbar \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - \frac{1}{c} q A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - mc \bar{\psi} \psi = 0 \quad (1)$$

$$\text{Eq. (264.3)} * \psi : -i\hbar (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \frac{1}{c} q A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - mc \bar{\psi} \psi = 0 \quad (2)$$

$$\hookrightarrow (1) - (2) : \bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = 0$$

$$\hookrightarrow \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0$$

$$\text{se } J^\mu = c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : \text{4-velon densidade de} \quad (265.1)$$

corrente

$$\hookrightarrow \partial_\mu J^\mu = 0 : \text{eq. de continuidade} \quad (265.2)$$

notas Eq. (265.1):

$$J^0 = c \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = c \psi^\dagger \psi = c \rho$$

: Eq. (256.1)

$$J^k = c \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \psi = c \psi^\dagger \beta \alpha^k \psi = c \psi^\dagger \alpha^k \psi$$

· próxima etapa: verificar que a Eq. de Dirac é covariante sob transf. de Lorentz

· inicial: propriedades do grupo de Lorentz (homogêneo),

Lembrar mecânicas clássica e quântica:

notações em 3-D: conjunto de transformações de coordenadas $\hat{O}(\theta)$ que preservam a norma vetor $\vec{r}$;

em particular, conj. transf. $\hat{O}(\theta)$: grupo

relatividade especial: p/ o 4-velon (x^0, x^1, x^2, x^3) , temos que

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

é um invariante $\rightarrow$ determinação transf. Lorentz (239.1)/(239.2)

$\hookrightarrow$ podemos afirmar que a cinemática da relatividade especial
 $\sim$ conjunto de transf. de coordenadas que preservam s^2 :

grupo de Lorentz homogêneo (266.1)

(notações 3-D e transf. Lorentz (239.1))

generalização (266.1): consideram 2 4-vetores

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \text{ e } (y^0, y^1, y^2, y^3)$$

$$\text{seja } S^2(x, y) = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$$

$\hookrightarrow$ conjunto de transf. de coordenadas que preservam $S^2(x, y)$:

grupo de Lorentz não-homogêneo (Grupo de Poincaré)

(notações 3-D; transf. Lorentz (239.1);

translações e reflexões espaciais e temporais)

vamos considerar apenas o grupo de Lorentz homogêneo.

Eq. (241.2) pode ser escrita como

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (266.2)$$

$\uparrow$ elementos matriz 4×4 Λ que corresponde
 à transf. de coordenadas, e.g., Eq. (239.2)

ou, em notação matricial: $x' = \Lambda x$

como a transf. Lorentz $\sim$ invariância S^2 , temos que

$$x'_\alpha x'^\alpha = g_{\alpha\beta} x'^\beta x'^\alpha = g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\mu \Lambda^\alpha_\nu x^\mu x^\nu = x_\nu x^\nu = g_{\nu\mu} x^\mu x^\nu$$

condição S^2 invariante $\uparrow$

como o 4-vetor x^α é arbitrário

$$\hookrightarrow \Lambda^\alpha_\nu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\mu = (\Lambda^t)^\alpha_\nu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\mu = g_{\nu\mu}$$

(267.1)

ou $\Lambda^t g \Lambda = g$: definição matriz Λ que descreve a transf. de coordenadas

propriedades matriz Λ ,

(i) determinante,

$$\text{Eq. (267.1): } \det(\Lambda^t g \Lambda) = \det g \cdot (\det \Lambda)^2 = \det g$$

$$\text{como } \det g = -1 \neq 0 \rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

(267.2)

$\hookrightarrow$ 2 classes de transf. Lorentz:

(1) transf. de Lorentz próprias: transf. que podem ser obtidas continuamente a partir identidade; nesse caso temos, necessariamente, $\det \Lambda = +1$;

(2) transf. de Lorentz impróprias: transf. que não podem ser obtidas continuamente a partir identidade; nesse caso, podemos ter $\det \Lambda = +1$ ou -1 .

Ex. transf. (2):

- inversão espacial:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou } \Lambda = g \quad (267.3)$$

$\hookrightarrow \det \Lambda = -1$

- inversão espaço-temporal:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou } \Lambda = -\hat{1}_{4 \times 4} \quad (267.4)$$

$\hookrightarrow \det \Lambda = +1$

(ii) sobre número de parâmetros,

como Λ matriz $4 \times 4 \rightarrow 16$ elementos;

de fato Eq. (267.1) $\rightarrow 16$ equações;

entretanto, como $g = g^t \rightarrow$ apenas 10 eqs. linearmente independentes

$\hookrightarrow$ 6 parâmetros (elementos Λ) livres

ou são necessários 6 parâmetros p/ especificar transf. descrita pela matriz Λ !

e.g.: 3 ângulos de Euler: orientação eixos REF O' w.r.t. REF O
(veja Fig. pg. 238)

e 3 componentes velocidade boost REF O' w.r.t. REF O
relativa $\vec{v}$ (ou vetor $\vec{\beta}$) :

sobre a matriz Λ ,

verifica-se que a matriz Λ pode ser escrita como
(p/ detalhes, veja Cap. 11, Jackson)

$$\Lambda = \exp(-\vec{\omega} \cdot \hat{S} - \vec{\gamma} \cdot \hat{K}) \quad (268.1)$$

onde $\hat{S} = (S_1, S_2, S_3)$: vetor, componentes = matrizes S_i

$\hat{K} = (K_1, K_2, K_3)$: " " " K_i

matrizes S_i : geradores de rotação em 3-D

K_i : " de boost

$\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$: parâmetros ~ notação 3-D

$\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$: " ~ boost

e as matrizes S_i e K_i são dadas por:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

componente

espaço-temporal ~ boost

"componente" espacial

~ notações 3-D

propriedades S_i e K_i : $(\hat{E} \cdot \hat{S})^3 = -\hat{E} \cdot \hat{S}$ (269.1)

$$(\hat{E} \cdot \hat{K})^3 = +\hat{E} \cdot \hat{K}$$

considerar 2 casos particulares Eq. (268.1),

(i) boost REF O' w.r.t. REF O , direcção $\hat{x}$;

$$\hookrightarrow \vec{\omega} = 0 \text{ e } \vec{\beta} = (\beta, 0, 0) \rightarrow \Lambda = e^{-\beta K_1}$$

verifica-se que (exercício):

$$\begin{aligned} \Lambda = e^{-\beta K_1} &= 1 - \beta^2 + \underbrace{\left(-\beta + \frac{1}{3!}(-\beta)^3 + \dots \right) K_1}_{\sinh(-\beta)} + \underbrace{\left(1 - \frac{(\beta)^2}{2!} + \frac{(\beta)^4}{4!} + \dots \right) K_1^2}_{\cosh(-\beta)} \\ &= \text{Eq. (239.2)} \end{aligned} \quad (269.2)$$

(ii) notação REF O' w.r.t. eixo $\hat{e}_3$ REF O;

$$\hookrightarrow \omega = (0, 0, \omega) \text{ e } \vec{r} = 0 \rightarrow \Lambda = e^{-\omega S_3}$$

verifica-se que (exercício):

$$\Lambda = e^{-\omega S_3} = 1 + S_3^2 - \underbrace{\left(\omega - \frac{1}{3!}\omega^3 + \dots\right) S_3}_{\sin \omega} - \underbrace{\left(1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} + \dots\right) S_3^2}_{\cos \omega}$$

$$\hookrightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (270.1)$$

• álgebra: temos que (exercício):

$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$: álgebra S_i = álgebra componentes momento angular;

$[S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k$: $\hat{K}$ se transforma como vetor sob rotações; (270.2)

$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k$: boosts, em geral, não comutam.

Eq. (270.2): álgebra geradores grupo de Lorentz!

• sobre a covariância Eq. de Dirac.

consideram 2 REFs inerciais O e O' , e.g., veja pg. 238;

ideia: determinar a relação entre as funções de onda

$\psi(x) = \psi(\vec{r}, t)$: solução eq. de Dirac w.r.t. REF O

e $\psi'(x') = \psi'(\vec{r}', t')$: " " " " " REF O'

• Eq. de Dirac (262.2) w.r.t. REF O' :

$$(-i\hbar \tilde{\gamma}^\mu \partial'_\mu + mc) \psi'(x') = 0$$

(271.1)

onde $x' = x'^\mu = (x'^0, \vec{r}')$; $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$

e matrizes $\tilde{\gamma}^\mu$ satisfazem propriedades (263.1);

verifica-se que as matrizes γ^μ e $\tilde{\gamma}^\mu$ são equivalentes, i.e., elas estão relacionadas via uma transf. unitária:

$$\tilde{\gamma}_\mu = U^\dagger \gamma_\mu U \quad \text{onde} \quad UU^\dagger = U^\dagger U = 1$$

↳ Eq. (271.1) pode ser escrita como

$$(-i\hbar \gamma^\mu \partial'_\mu + mc) \psi'(x') = 0 \quad (271.2)$$

• hipótese: relação entre $\psi(x)$ e $\psi'(x')$ via uma transformação linear ~ eq. de Dirac e transf. Lorentz: lineares

↳ Definição: matriz 4×4 $S(\Lambda)$:

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = S(\Lambda) \psi(x) = S(\Lambda) \psi(\Lambda^{-1} x') \quad (271.3)$$

onde $x' = \Lambda x$: Eq. (266.2)

matriz 4×4 que corresponde a uma transf. de coordenadas, e.g., Eq. (239.2)

a matriz inversa é dada por:

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') = S^{-1}(\Lambda) \psi'(\Lambda x) \quad (272.1)$$

próxima etapa: determinar matriz 4×4 $S(\Lambda)$;

notas: $S(\Lambda) \neq$ Eq. (262.2):

$$(-i\hbar S(\Lambda) \gamma^\mu \partial_\mu + S(\Lambda) mc) \psi(x) = 0$$

$$-i\hbar S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \partial_\mu \psi(x) + mc S(\Lambda) \psi(x) = 0 \quad (272.2)$$

$$\underbrace{\partial_\mu S(\Lambda) \psi(x)}_{\psi'(x')} \quad \underbrace{\psi'(x')}$$

como Eqs. (243.3) e (266.2):

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu$$

$$\text{Eq. (272.2)} \rightarrow (-i\hbar S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu + mc) \psi'(x') = 0 \quad (272.3)$$

(I)

se $\exists$ matriz 4×4 $S(\Lambda)$ tal que

$$(I) = S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda^\nu_\mu = S(\Lambda) \gamma^\mu \Lambda^\nu_\mu S^{-1}(\Lambda) = \gamma^\nu \quad (272.4)$$

ou $S^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda^\nu_\mu \gamma^\mu \rightarrow$ eq. de Dirac é covariante, i.e.,

Eq. de Dirac apresenta a mesma forma nos REFs O e O' .

vamos considerar Eq. (272.4): definição matriz $S(\Lambda)$;

notas similaridade Eq. (267.1): " " Λ !

• Definição: função de onda $\psi(x)$ que se transforma como Eq. (271.3):
: spinor de Lorentz de 4-componentes

• consideramos uma transf. de Lorentz (266.2) infinitesimal:

$$\Lambda^\nu_\mu = g^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu$$

(273.1)

onde $g^\nu_\mu = g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = \delta^\nu_\mu$: Eq. (242.3)

$\Delta\omega^{\nu\mu} = -\Delta\omega^{\mu\nu}$ (veja abaixo e pg. 268): apenas
6 coeficientes não-nulos!

Exemplos, coeficientes $\Delta\omega^{\mu\nu}$:

(i) boost REF O' w.r.t. REF O , direção $\hat{x}$;

Eq. (269.2) p/ $\beta \ll 1$;

como $\beta = \frac{v}{c} \ll 1 \longrightarrow \beta \approx \beta \ll 1$

$$\Lambda = e^{-\beta K_1} = e^{-\beta \kappa_1} \approx 1 - \beta \kappa_1$$

$$\text{Eq. (269.1)} \rightarrow \Delta^0_1 = \Delta\omega^0_1 = -\beta \quad \& \quad \Delta^1_0 = \Delta\omega^1_0 = -\beta$$

$$\text{ou} \quad \Delta\omega^{01} = \Delta\omega^0_\alpha g^{\alpha 1} = \Delta\omega^0_1 g^{11} = +\beta \approx +\beta$$

(273.2)

$$\Delta\omega^{10} = \Delta\omega^1_\alpha g^{\alpha 0} = \Delta\omega^1_0 g^{00} = -\beta \approx -\beta$$

(ii) rotação REF O' w.r.t. eixo $\hat{z}$ REF O ;

Eq. (270.1) p/ $\omega = \theta \ll 1$:

$$\Lambda = e^{-\theta S_3} = 1 - \theta S_3$$

Eq. (269.1) $\Lambda^1_2 = \Delta\omega^1_2 = +\theta$ e $\Lambda^2_1 = \Delta\omega^2_1 = -\theta$

ou $\Delta\omega^{12} = \Delta\omega^1_\alpha g^{\alpha 2} = \Delta\omega^1_2 g^{22} = -\theta$

(274.1)

$$\Delta\omega^{21} = \Delta\omega^2_\alpha g^{\alpha 1} = \Delta\omega^2_1 g^{11} = +\theta$$

• Vamos verificar que $\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu}$;

Eqs. (267.1) e (273.1):

$$\Lambda^\alpha_\nu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\mu = g_{\nu\mu}$$

$$(g^\alpha_\nu + \Delta\omega^\alpha_\nu) g_{\alpha\beta} (g^\beta_\mu + \Delta\omega^\beta_\mu) = g_{\nu\mu}$$

$$g^\alpha_\nu g_{\alpha\beta} g^\beta_\mu + g^\alpha_\nu g_{\alpha\beta} \Delta\omega^\beta_\mu + \Delta\omega^\alpha_\nu g_{\alpha\beta} g^\beta_\mu + O(\Delta\omega^2) = g_{\nu\mu}$$

$$g_{\nu\mu}$$

$$g_{\nu\beta} \Delta\omega^\beta_\mu$$

$$\Delta\omega^\alpha_\nu g_{\alpha\mu}$$

$$g_{\nu\mu}$$

$$\Delta\omega_{\nu\mu}$$

$$\Delta\omega_{\mu\nu}$$

$$\hookrightarrow \Delta\omega_{\nu\mu} = -\Delta\omega_{\mu\nu}$$

• como matriz 4×4 $S = S(\Lambda) \oplus$ Eq. (273.1) $\rightarrow$ podemos escrever uma expansão matriz $S(\Lambda)$ em termos $\Delta\omega^{\mu\nu}$:

$$\hat{S} = \hat{1}_{4 \times 4} - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2)$$

(274.2)

$$\hat{S}^{-1} = \hat{1}_{4 \times 4} + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega^{\mu\nu} + O(\Delta\omega^2)$$

notar soma sob índices μ e ν !

conjunto de 6 matrizes 4×4

como $\Delta\omega^{\mu\nu} = -\Delta\omega^{\nu\mu} \rightarrow \sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$!

notar: determinação matriz $S(\Lambda) \sim$ determinação $\sigma_{\mu\nu}$.

• Eqs. (272.4), (273.3) e (274.2):

$$S^{-1} r^\nu S = \Lambda^\nu_\mu r^\mu$$

$$\left(1 + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta}\right) r^\nu \left(1 - \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta}\right) = (g^\nu_\mu + \Delta\omega^\nu_\mu) r^\mu$$

$$r^\nu - \frac{i}{4} r^\nu \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} + \frac{i}{4} \sigma_{\alpha\beta} \Delta\omega^{\alpha\beta} r^\nu + O(\Delta\omega^2) = r^\nu + \Delta\omega^\nu_\mu r^\mu$$

$$-\frac{i}{4} (r^\nu \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} r^\nu) \Delta\omega^{\alpha\beta} = -\frac{i}{4} [r^\nu, \sigma_{\alpha\beta}] \Delta\omega^{\alpha\beta} = \Delta\omega^\nu_\mu r^\mu \quad (275.1)$$

verifique-se que (veja abaixo) Eq. (275.1) pode ser escrita como

$$[r^\nu, \sigma_{\alpha\beta}] = 2i (g^\nu_\alpha r_\beta - g^\nu_\beta r_\alpha); \quad (275.2)$$

de fato, a partir de álgebra (263.1), verifica-se que

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [r_\mu, r_\nu]; \quad (275.3)$$

notar: Eq. (275.3) $\rightarrow$ matriz 4×4 $S(\Lambda)$ determinada

$\hookrightarrow$ Eq. de Dirac (262.2) é covariante!

• Como uma transf. finita = sucessão de transf. infinitesimais

$$\text{e se } \Delta\omega^{\mu\nu} = \frac{1}{N} \omega^{\mu\nu}$$

$$\hookrightarrow S(\Lambda) = \left(\hat{1} - \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \frac{\omega^{\mu\nu}}{N} \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S(\Lambda) = e^{-i \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} / 4} \quad (275.4)$$

• sobre as matrizes $\sigma_{\mu\nu}$,

$$\text{Como } r_\mu = g_{\mu\nu} r^\nu$$

$$\hookrightarrow [r_\mu, r_\nu] = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} [r^\alpha, r^\beta] = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} (r^\alpha r^\beta - r^\beta r^\alpha)$$

$$\hookrightarrow [r_\mu, r_\nu] = 2g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(r^\alpha r^\beta - i g^{\alpha\beta})$$

Eq. (263.1)

$$\hookrightarrow \sigma_{\mu\nu} = i g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}(r^\alpha r^\beta - i g^{\alpha\beta}) \quad (276.1)$$

temos que,

$$\cdot \sigma_{0\kappa} = i g_{0\alpha}g_{\kappa\beta}(r^\alpha r^\beta - i g^{\alpha\beta}) = i g_{00}g_{\kappa\kappa}r^0 r^\kappa = -r^0 r^\kappa$$

$$= -i\beta^2 \alpha^\kappa = -i\alpha^\kappa$$

$$\cdot \sigma_{\kappa 0} = i g_{\kappa\alpha}g_{0\beta}(r^\alpha r^\beta - i g^{\alpha\beta}) = i g_{\kappa\kappa}g_{00}r^\kappa r^0 = -i r^\kappa r^0$$

$$= -i\beta \alpha^\kappa \beta = +i\alpha^\kappa \beta^2 = i\alpha^\kappa$$

(276.2)

$$\cdot \sigma_{ij} = i g_{i\alpha}g_{j\beta}(r^\alpha r^\beta - i g^{\alpha\beta}) = i g_{ii}g_{jj}r^i r^j = i r^i r^j$$

$$= i\beta \alpha^i \beta \alpha^j = -i\alpha^i \beta^2 \alpha^j = -i\alpha^i \alpha^j$$

Eq. (255.1)

$$= -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i \sigma^j \end{pmatrix}$$

considerar 2 casos particulares:

(i) boost REF 0' w.r.t. REF 0, direção $\hat{x}$;

$$\text{nesse caso: } \Delta\omega^{01} = -\Delta\omega^{10} = \beta \approx 1 \ll 1$$

Eq. (274.2):

$$S = 1_{4 \times 4} - \frac{i}{4} (\sigma_{01} \Delta\omega^{01} + \sigma_{10} \Delta\omega^{10})$$

$$(-\sigma_{01})(-\Delta\omega^{01})$$

$$= 1 - \frac{i}{2} \sigma_{01} \Delta\omega^{01} = 1 - \frac{i}{2} (-i\alpha^1) \beta = 1 - \frac{1}{2} \beta \alpha^1$$

 $\hookrightarrow$ p/ uma transf. finita, similar Eq. (275.4):

se $\beta \rightarrow \frac{1}{N} \beta$: $S = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2N} \beta \alpha^1 \right)^N = e^{-\beta \alpha^1 / 2}$

verificar $\rightarrow$ $= \mathbb{1}_{4 \times 4} \cosh \frac{\beta}{2} - \alpha^1 \sinh \frac{\beta}{2}$ (277.1)

Resumo matrizes:

$\Lambda = e^{-\beta \alpha^1} = \mathbb{1} - \alpha_1^2 - \alpha_1 \sinh \beta + \alpha_1^2 \cosh \beta$: transf. Lorentz (269.2)

e $S = e^{-\beta \alpha^1 / 2}$: matriz $\sim$ transf. spinor sob transf. Lorentz Λ

onde $\beta = \sqrt{g} \eta$

(ii) notação REF O' w.r.t. eixo $\hat{e}_3$ REF O ;

nesse caso : $\Delta \omega^{12} = -\Delta \omega^{21} = -\theta \ll 1$

Eq. (274.2):

$S = \mathbb{1}_{4 \times 4} - \frac{i}{4} (\sigma_{12} \Delta \omega^{12} + \sigma_{21} \Delta \omega^{21})$

$(-\sigma_{12})(-\Delta \omega^{12})$

$= \mathbb{1} - \frac{i}{2} \sigma_{12} \Delta \omega^{12} = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \sigma_{12} (-\theta) = \mathbb{1} + \frac{i}{2} \theta \sigma_{12}$

$\hookrightarrow$ pr uma transf. finita, se $\theta \rightarrow \frac{1}{N} \theta$

$\hookrightarrow S = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{2N} \theta \sigma_{12} \right)^N = e^{i \theta \sigma_{12} / 2}$

temos que:

$\Lambda = e^{-\theta S_3} = \mathbb{1} + S_3^2 - S_3 \sin \theta - S_3^2 \cos \theta$: matriz notação (270.1)

e $S = e^{+i \theta \sigma_{12} / 2} = \mathbb{1}_{4 \times 4} \cos \frac{\theta}{2} + i \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2}$: (277.2)

: matriz $\sim$ transf. spinor sob notação Λ

• Resumo matrizes de transformação, caso geral:

Eqs. (268.1) e (275.4):

• $\Lambda = \exp(-\vec{\theta} \cdot \hat{S} - \vec{\beta} \cdot \hat{K})$: transf. Lorentz / notação

• $S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}\right)$: " spinor

(278.1)

$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$: parâmetros notação

$\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$: " boost ; $\beta_i = \frac{1}{c} \frac{dx_i}{dt}$

$$\text{e } \omega^{0i} = \beta_i ; \quad \omega^{21} = \theta_3 \quad \omega^{23} = \theta_1 \quad \omega^{31} = \theta_2$$

Lembrar: $\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$ e $x' = \Lambda x$

• vamos verificar Eq. (275.2),

$$\text{como: } \Delta \omega^\nu{}_\mu r^\mu = \frac{1}{2} \Delta \omega^\nu{}_\mu r^\mu + \frac{1}{2} \Delta \omega^\nu{}_\mu r^\mu$$

$$\text{e } \Delta \omega^\nu{}_\mu = \Delta \omega^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} = \Delta \omega^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} \delta_\alpha{}^\nu + \Delta \omega^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} g^{\nu\rho} g_{\rho\alpha}$$

$$\hookrightarrow \Delta \omega^\nu{}_\mu r^\mu = \Delta \omega^{\alpha\beta} \underbrace{g^{\nu\rho} g_{\rho\alpha}}_{g^\nu{}_\alpha} \underbrace{g_{\beta\mu} r^\mu}_{r_\beta} = \Delta \omega^{\alpha\beta} g^\nu{}_\alpha r_\beta =$$

$$= \Delta \omega^{\beta\alpha} g^\nu{}_\beta r_\alpha = - \Delta \omega^{\alpha\beta} g^\nu{}_\beta r_\alpha$$

$$\hookrightarrow -\frac{i}{4} [r^\nu, \sigma_{\alpha\beta}] = \Delta \omega^\nu{}_\mu r^\mu = \frac{1}{2} (g^\nu{}_\alpha r_\beta - g^\nu{}_\beta r_\alpha) \Delta \omega^{\alpha\beta}$$

como $\Delta \omega^{\alpha\beta}$ é arbitrário $\rightarrow$ Eq. (275.2)

• notan:

$$\text{Eq. (277.2): } S_R = e^{+i\theta \sigma_{12}/2} \rightarrow S_R^\dagger = e^{-i\theta \sigma_{12}/2} = S_R^{-1} : \text{rotação}$$

$$\text{Eq. (277.1): } S_L = e^{-\beta \alpha^{1/2}} \rightarrow S_L^\dagger = e^{-\beta \alpha^{1/2}} \neq e^{+\beta \alpha^{1/2}} = S_L^{-1} : \text{boost};$$

nesse caso, temos que (verificar): $S_L^{-1} = \rho_0 S_L^\dagger \rho_0$;

como $[\rho_0, \sigma_{ij}] = 0$, $i, j = 1, 2, 3 \rightarrow$ podemos escrever os dois casos acima como:

$$S^{-1} = \rho_0 S^\dagger \rho_0 \quad (279.1)$$

• sobre a inversão espacial,

nesse caso, temos que, Eq. (267.3):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = g \rightarrow \det \Lambda = -1 : \text{transf. de Lorentz} \quad (279.2)$$

imprópria;

nesse caso, não é possível considerar uma transf. infinitesimal
p/ determinar a matriz 4×4 $S(\Lambda)$

$\hookrightarrow$ determinação $S(\Lambda)$ a partir Eq. (272.4):

$$S^{-1} r^\mu S = \Lambda^\nu_\mu r^\mu = g^{\nu\mu} r^\mu = g^{\nu\mu} r^\mu$$

$\uparrow$ cuidado: não há soma
sob índice ν !

$$\hookrightarrow S^{-1} r^0 S = + r^0 \quad \text{e} \quad S^{-1} r^x S = - r^x \quad (279.3)$$

$$\text{solução Eq. (279.3): } S \equiv P = e^{i\phi} r^0; \quad (279.4)$$

de fato, álgebra (263.1)

$$\hookrightarrow S^{-1} r^0 S = e^{-i\varphi} r^0 r^0 r^0 e^{+i\varphi} = (r^0)^2 r^0 = + r^0$$

$$\hookrightarrow S^{-1} r^k S = e^{-i\varphi} r^0 r^k r^0 e^{+i\varphi} = - r^k r^0 r^0 = - r^k$$

• notam: $PP^\dagger = P^\dagger P = 1 \rightarrow S \equiv P$ é unitária;

$$\text{como } P^{-1} = P^\dagger = e^{-i\varphi} r^0$$

$$\hookrightarrow r^0 P^\dagger r^0 = r^0 e^{-i\varphi} r^0 r^0 = e^{-i\varphi} r^0 = P^{-1} : \text{Eq. (279.1)}$$

• consideram: soluções eq. de Dirac p/ partícula livre em repouso, Eq. (257.2);

Eqs. (263.2) e (279.4):

$$P \psi_i^{(+)} = + e^{i\varphi} \psi_i^{(+)} : \text{spinon energia positiva : autoestado } P \\ \text{c/ autovalor } +1 ; i=1,2$$

≡

$$P \psi_i^{(-)} = - e^{i\varphi} \psi_i^{(-)} : \text{spinon energia negativa : autoestado } P \\ \text{c/ autovalor } -1 ; i=1,2$$

(280.1)

$\hookrightarrow$ partículas e antipartículas apresentam paridade intrínseca oposta.

• covariantes bilineares,

verifica-se que a combinação 4 matrizes Γ^μ

$\hookrightarrow$ 16 matrizes 4×4 linearmente independentes Γ^a , i.e.,

✓ matriz 4×4 pode ser escrita em termos matrizes Γ^a ;

temos que:

$$\Gamma^S = \hat{1}_{4 \times 4} : 1 \text{ matriz}$$

$$\Gamma^\mu_\nu = \gamma_\mu : 4 \text{ matrizes}$$

$$\Gamma^{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} : 6 \text{ " (280.2)}$$

$$\Gamma^P = i r^0 r^1 r^2 r^3 \equiv \gamma^5 = \gamma_5 : 1 \text{ "}$$

$$\Gamma^A_\mu = \gamma_5 \gamma_\mu : 4 \text{ "}$$

• propriedades matrizes Γ^n :

$$\cdot (\Gamma^n)^2 = \pm 1$$

• p/ cada $\Gamma^n \neq \Gamma^s$, $\exists$ matriz Γ^m tal que $\Gamma^n \Gamma^m = -\Gamma^m \Gamma^n$

$$\cdot \text{Tr } \Gamma^n = 0, \quad \Gamma^n \neq \Gamma^s$$

(281.1)

$$\text{notas: } \pm \text{Tr } \Gamma^n = \text{Tr}(\Gamma^n (\Gamma^m)^2) = -\text{Tr}(\Gamma^m \Gamma^n \Gamma^m)$$

$$= -\text{Tr}(\Gamma^n (\Gamma^m)^2) = \mp \text{Tr } \Gamma^n$$

• dadas $\Gamma^a \neq \Gamma^b$ c/ $a \neq b \rightarrow \exists \Gamma^n \neq \Gamma^s$ tal que $\Gamma^a \Gamma^b = \Gamma^n$

• vamos verificar que Eq. (281.1) $\rightarrow$ matrizes Γ^n são linearmente independentes;

$$\text{considerar: } \sum_n a_n \Gamma^n = 0, \quad a_n \in \mathbb{C} \quad (281.2)$$

$$\Gamma^m \neq \Gamma^s + \text{Eq. (281.2)}: \sum_n a_n \Gamma^m \Gamma^n = 0$$

$$\text{Tr: } \text{Tr}\left(\sum_n a_n \Gamma^m \Gamma^n\right) = \sum_n a_n \text{Tr}(\Gamma^m \Gamma^n) =$$

$$= \underbrace{a_m \text{Tr}(\Gamma^m)^2}_{\pm 4} + \sum_{n \neq m} a_n \underbrace{\text{Tr}(\Gamma^m \Gamma^n)}_{\Gamma^a} = 0 \rightarrow a_m = 0; m \neq s$$

$$\text{se } m=s: \sum_n a_n \text{Tr}(\Gamma^s \Gamma^n) = \underbrace{a_s \text{Tr}(\Gamma^s)^2}_{+4} + \sum_{n \neq s} a_n \underbrace{\text{Tr} \Gamma^n}_0 = 0$$

$$\hookrightarrow a_s = 0.$$

• Eq. (280.2) $\rightarrow$ é possível escrever quantidades bilineares em termos dos spinores $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ cujos componentes são bem determinados sob transf. Lorentz;

temos que:

$S(x) = \bar{\psi}\psi$	: 1 componente	: escalar
$V^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	: 4 componentes	: vetor
$T^{\mu\nu}(x) = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	: 6 "	: tensor antisimétrico
$A^\mu(x) = \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$	: 4 "	: pseudovetor
$P(x) = \bar{\psi}\gamma_5\psi$	: 1 "	: pseudoscalar

(282.1)

verifica-se que, sob uma transf. Lorentz Λ :

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\bar{\psi}(x)\sigma^{\alpha\beta}\psi(x)$$

(282.2)

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = (\det \Lambda)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = (\det \Lambda)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$$

• notam:

$$\text{Eq. (264.2): } \bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

$$\text{como } \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S\psi(x) \rightarrow \psi'^\dagger(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger$$

$$\hookrightarrow \psi'(x') = S\psi(x)$$

(282.3)

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^\dagger(x')\gamma^0 = \psi^\dagger(x)S^\dagger\gamma^0$$

Lembrar: Eq. (272.3) : $S^{-1} = \Gamma_0 S^\dagger \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0 = S^\dagger \Gamma_0 S$ ou $\Gamma_0 = S^\dagger \Gamma_0 S$

e Eq. (272.4) : $S^{-1} \Gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \Gamma^\nu$;

temos que:

(i) $\bar{\psi}'(x') \psi'(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger \Gamma_0 S \psi(x) = \psi^\dagger(x) \Gamma_0 \psi(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x)$:

: invariante sob transf. Lorentz : escalar

(ii) $\bar{\psi}'(x') \Gamma^\mu \psi'(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger \Gamma_0 \Gamma^\mu S \psi(x) = \psi^\dagger(x) S^\dagger \Gamma_0 S S^{-1} \Gamma^\mu S \psi(x)$

$\uparrow$
 $S S^{-1}$

$\Gamma_0 \quad \Lambda^\mu_\nu \Gamma^\nu$

$= \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \Gamma^\nu \psi(x)$:

: componente 4-veloz sob transf. Lorentz

$\hookrightarrow$ Eq. (265.1) : $J^\mu = c \bar{\psi} \Gamma^\mu \psi$ é, de fato, 4-veloz !

Obs.: relações úteis p/ verificam Eq. (282.2) :

$\Gamma^\mu \Gamma_5 + \Gamma_5 \Gamma^\mu = 0$

(283.1)

$[\Gamma_5, \Gamma_{\mu\nu}] = 0$ ou $[\Gamma_5, S] = 0$

• Soluções Eq. de Dirac : partícula livre;

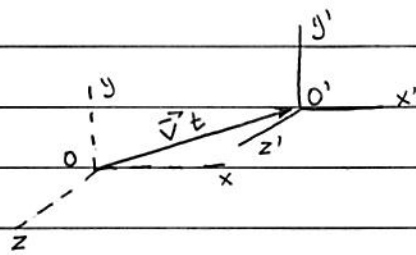
ideia : generalizam solução (257.2) p/ partícula livre
que se movimenta c/ velocidade $\vec{v}$;

solução genl = solução (257.2) $\oplus$ transf. Lorentz;

• consideram 2 REFs inerciais O e O' :

REF O : observador

REF O' : partícula



$\vec{v}$: velocidade REF O'
w.r.t. REF O

sol. Eq. de Dirac (254.3) p/ REF O' = Eq. (257.2):

$$\psi_n^{(+)}(x') = u_n(0) e^{-imc^2 t'/\hbar}, \quad n=1,2$$

(284.1)

$$\psi_n^{(-)}(x') = v_n(0) e^{+imc^2 t'/\hbar}$$

onde

$$u_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sol. Eq. de Dirac (254.3) p/ REF O ;

Eq. (273.3) : $\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x)$

$$\hookrightarrow \psi(x) = S^{-1}(\Lambda) \psi'(x') \quad (284.2)$$

onde $S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}\right)$: Eq. (278.1)

c/ $\omega^{0i} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$; $\beta_i = \gamma \alpha_i$ ou $\alpha_i = \gamma^{-1} \beta_i$

similar Eq. (277.1), verifica-se que (exercício)

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\alpha^i \beta_i / 2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \hat{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \hat{\alpha} \cdot \hat{v} \gamma\right)$$

onde $\hat{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$: veton cujas componentes são as matrizes α^i : Eq. (255.1) e

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{\beta}}{\beta} \quad \parallel \quad \hat{z} = \frac{\vec{z}}{z}$$

$$\hookrightarrow S^{-1}(\Lambda) = \exp\left(+\frac{1}{2} \hat{\alpha} \cdot \hat{v} z\right)$$

$$= \hat{I}_{4 \times 4} \cosh \frac{z}{2} + (\hat{\alpha} \cdot \hat{v}) \sinh \frac{z}{2}$$

verificam!

$$= \cosh \frac{z}{2} \left(\hat{I}_{4 \times 4} + (\hat{\alpha} \cdot \hat{v}) \tanh \frac{z}{2} \right) \quad (285.1)$$

Como:

$$\cdot \cosh^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cosh z) \quad \xrightarrow{\text{Eq. (239.1)}} = \frac{1}{2} (1 + r)$$

$$\text{Eq. (244.3)} \quad \xrightarrow{\quad} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) = \frac{E + mc^2}{2mc^2}$$

$$\cdot \sinh^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{2} (-1 + \cosh z) = \frac{E - mc^2}{2mc^2}$$

$$\hookrightarrow \tanh^2 \frac{z}{2} = \frac{E - mc^2}{E + mc^2} = \frac{E^2 - (mc^2)^2}{(E + mc^2)^2} \quad \xrightarrow{\text{Eq. (245.2)}} = \left(\frac{pc}{E + mc^2} \right)^2; \quad p = |\vec{p}|$$

$$\hookrightarrow S^{-1}(\Lambda) = \left(\frac{E + mc^2}{2mc^2} \right)^{1/2} \left(\hat{I}_{4 \times 4} + \underbrace{\hat{\alpha} \cdot \hat{v} p}_{\text{d'ici}} \frac{c}{E + mc^2} \right) \quad (285.2)$$

$$\cdot \text{Eq. (244.3)}: \quad p^\mu = (p^0, \vec{p}) = (\gamma mc, \gamma m \vec{v}) = (E/c, \vec{p})$$

$$\hookrightarrow p^\mu x_\mu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x} = \gamma mc^2 t - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

$$\hookrightarrow p/\text{partícula em repouso}: \quad p'^\mu x'_\mu = mc^2 t' \quad (285.3)$$

$$\text{Como } p^\mu x_\mu = p'^\mu x'_\mu \rightarrow mc^2 t' = \gamma mc^2 t - \vec{p} \cdot \vec{x} = p^\mu x_\mu$$

↳ Eqs. (284.1), (284.2), (285.1) e (285.3):

$$\psi_n^{(+)}(x) = S^{-1}(\Lambda) u_n(0) e^{-imc^2 t/\hbar} = u_n(p) e^{-ip^\mu x_\mu/\hbar} \quad (286.1)$$

$$\psi_n^{(-)}(x) = S^{-1}(\Lambda) v_n(0) e^{+imc^2 t/\hbar} = v_n(p) e^{+ip^\mu x_\mu/\hbar}$$

onde (verifica):

$$S^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{c p_z}{E + mc^2} & \frac{c p_-}{E + mc^2} \\ 0 & 1 & \frac{c p_+}{E + mc^2} & -\frac{c p_z}{E + mc^2} \\ \frac{c p_z}{E + mc^2} & \frac{c p_-}{E + mc^2} & 1 & 0 \\ \frac{c p_+}{E + mc^2} & -\frac{c p_z}{E + mc^2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (286.2)$$

onde $C = \frac{c}{E + mc^2}$

$p_{\pm} = p_x \pm i p_y$

notas: $u_1(p)$ e $u_2(p)$: colunas 1 e 2 Eq. (286.2)

$v_1(p)$ e $v_2(p)$: " 3 e 4 "

↑ de fato, 4-vetor p^μ

Eq. (286.1) : soluções Eq. de Dirac p/ partícula livre =
= ondas planas

para procedimento alternativo, veja Sec. 6.3, Schwabl

propriedades soluções (286.1):

$$(1) \quad (\not{p} - mc) u_n(p) = (\gamma^\mu p_\mu - mc) u_n(p) = 0 \quad (286.3)$$

$$(\not{p} + mc) v_n(p) = (\gamma^\mu p_\mu + mc) v_n(p) = 0$$

notas: Eq. Dirac (262.2):

$$(-i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + mc) \psi_n^{(+)}(x) = (-i\hbar \gamma^\mu (-ip_\mu) + mc) u_n(p) e^{-ip^\mu x_\mu/\hbar} = 0$$

pois $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$; similar p/ $\bar{\psi}_n(p)$.

$$(2) \quad \bar{u}_n(p) (\not{p} - mc) = \bar{u}_n(p) (r^\mu p_\mu - mc) = 0$$

(287.1)

$$\bar{v}_n(p) (\not{p} + mc) = \bar{v}_n(p) (r^\mu p_\mu + mc) = 0$$

notas: h.c. Eq. (286.3):

$$u_n^\dagger(p) (r^\mu{}^\dagger p_\mu - mc) = 0 + r^0 \quad \text{e} \quad r^\mu{}^\dagger = r^0 r^\mu r^0 : \text{Eq. (263.1)}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{u_n^\dagger(p)}_{\bar{u}_n(p)} r^0 \underbrace{(r^\mu (r^0)^2 p_\mu - mc)}_{r^\mu} = 0$$

(3) relações de ortogonalidade:

$$\bar{u}_n(p) u_s(p) = \delta_{n,s}$$

$$\bar{u}_n(p) v_s(p) = 0$$

(287.2)

$$\bar{v}_n(p) v_s(p) = -\delta_{n,s}$$

$$\bar{v}_n(p) u_s(p) = 0$$

comparar Eqs. (282.1) e (287.2)

$\hookrightarrow$ Eq. (287.2) é uma forma bilinear, em particular um escalar

p/ REF O' = REF particular, demos que

$$\text{Eq. (284.1):} \quad \bar{u}_n(o) u_s(o) = \delta_{n,s} \quad \bar{u}_n(o) v_s(o) = 0$$

$$\bar{v}_n(o) v_s(o) = -\delta_{n,s} \quad \bar{v}_n(o) u_s(o) = 0 \quad (287.3)$$

como Eq. (287.3) é invariante sob transf. Lorentz

$\hookrightarrow$ Eq. (287.2)

notas: Eq. (287.2): relações de TL entre spinores

p/ o mesmo 4-momento p^μ .

$$(4) \quad \bar{\psi}_n^{(+)}(x) \gamma^0 \psi_s^{(+)}(x) = \bar{u}_n(p) \gamma^0 u_s(p) = \frac{E}{mc^2} \delta_{n,s}$$

$$\bar{\psi}_n^{(-)}(x) \gamma^0 \psi_s^{(-)}(x) = \bar{v}_n(p) \gamma^0 v_s(p) = \frac{E}{mc^2} \delta_{n,s} \quad (288.1)$$

$$\bar{\psi}_n^{(\pm)}(x) \gamma^0 \psi_s^{(\mp)}(x) = 0$$

notar: $\bar{u}_s(p) \gamma^0 + E q. (286.3): \bar{u}_s(p) (\gamma^0 \gamma^\mu p_\mu - mc \gamma^0) u_n(p) = 0$

(+)

$$Eq. (287.1) + \gamma^0 + u_n(p): \bar{u}_s(p) (\gamma^\mu \gamma^0 p_\mu - mc \gamma^0) u_n(p) = 0$$

$$\hookrightarrow \bar{u}_s(p) (\gamma^0 \gamma^\mu p_\mu + \gamma^\mu \gamma^0 p_\mu) u_n(p) = + 2mc \bar{u}_s(p) \gamma^0 u_n(p)$$

$$(\gamma^0 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^0) p_\mu$$

$$= 2g^{\mu\mu} p_\mu = 2p^0 = 2E/c \rightarrow Eq. (288.1)$$

notar:

(i) $\bar{\psi}_n^{(+)} \gamma^0 \bar{\psi}_s^{(+)} = \psi_n^{(+)\dagger} \psi_s^{(+)} = 0$: relação de ortogonalidade entre soluções de energias opostas!

(ii) 4-velon densidade de corrente (265.1): $J^\mu = c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

$$\hookrightarrow J^0 = c \rho = c \bar{\psi} \gamma^0 \psi = c \cdot \frac{E}{mc^2} \rightarrow \rho = \frac{E}{mc^2} \quad p/ \text{ as 4 soluções}$$

p/ REF O' = REF partículas, demos que (verificam): $\rho' = 1$:

: ou c/ transf. Lorentz, e.g., (239.1):

$$J'^0 = \gamma (J^0 - \beta J^1)$$

$$J'^1 = 0 = \gamma (J^1 - \beta J^0) \rightarrow J^1 = \beta J^0$$

$$J'^2 = 0 = J^2$$

$$J'^3 = 0 = J^3$$

$$\rightarrow J'^0 = \gamma (1 - \beta^2) J^0$$

$$= \frac{1}{\gamma} J^0 = \frac{1}{\gamma} c \cdot \frac{E}{mc^2}$$

$$= c \cdot 1 !$$

Eq. de Dirac, partícula livre: solução alternativa,

soluções (257.2) e Eq. (285.3)

↳ soluções Eq. de Dirac (254.3) p/ momento finito assumem a forma:

$$\psi_n^{(+)}(x) = u_n(p) e^{-ip^\mu x_\mu / \hbar}$$

$$; n = 1, 2 \quad (288.2)$$

$$\psi_n^{(-)}(x) = v_n(p) e^{+ip^\mu x_\mu / \hbar}$$

↳ ideia: determinar os spinores $u_n(p)$ e $v_n(p)$!

notar: Eq. de Dirac (254.3) e soluções (288.2)

$$\hookrightarrow (\gamma^\mu p_\mu - mc) u_n(p) = 0$$

$$: \text{Eq. (286.3)}$$

$$\text{e } (\gamma^\mu p_\mu + mc) v_n(p) = 0$$

notar:

$$\gamma^\mu p_\mu \pm mc = \gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i \pm mc =$$

$$= p_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - p^i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \pm mc \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_0 \pm mc & -\hat{\sigma} \cdot \vec{p} \\ +\hat{\sigma} \cdot \vec{p} & -p_0 \pm mc \end{pmatrix} \quad (288.3)$$

considerar: $u_n(p) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$; ϕ e χ : spinores de 2 componentes

$$(288.4)$$

temos que:

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc) u_1(p) = 0 \rightarrow (p_0 - mc) \psi - \hat{\sigma} \cdot \vec{p} \chi = 0$$

$$\hat{=} \hat{\sigma} \cdot \vec{p} \psi - (p_0 + mc) \chi = 0$$

$$\hookrightarrow \chi = \frac{\hat{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0 + mc} \psi$$

$$\text{como } \hat{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix} ; p_{\pm} = p_x \pm i p_y$$

$$p/ \quad \psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{=} \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow u_1(p) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbb{C} p_z \\ \mathbb{C} p_+ \end{pmatrix} \quad u_2(p) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbb{C} p_- \\ -\mathbb{C} p_+ \end{pmatrix}$$

onde A : cte de normalização (288.5)

$$\hat{=} \mathbb{C} = \frac{1}{p_0 + mc} = \frac{c}{E + mc^2}$$

Substitua Eq. (287.2):

$$\bar{u}_1(p) u_1(p) = u_1^\dagger(p) \gamma^0 u_1(p) = 1$$

$$\hookrightarrow |A|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathbb{C} p_z & -\mathbb{C} p_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbb{C} p_z \\ \mathbb{C} p_+ \end{pmatrix} =$$

$$= |A|^2 (1 - \mathbb{C}^2 p^2) = 1$$

$$\text{como: } 1 - G^2 p^2 = 1 - \frac{p^2}{(p_0 + mc)^2} =$$

$$= \frac{1}{(p_0 + mc)^2} \left(p_0^2 - p^2 + 2p_0 mc + m^2 c^2 \right)$$

$$= m^2 c^2$$

Eq. (245.1)

$$2m^2 c^2 + 2p_0 mc = 2mc(p_0 + mc)$$

$$= \frac{2mc}{p_0 + mc} = \frac{2mc^2}{E + mc^2}$$

$$\hookrightarrow A = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} : \text{compara Eq. (286.2)!}$$

• similar:

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc) \psi_n(p) = 0 \rightarrow (p_0 + mc) \phi - \hat{\sigma} \cdot \vec{p} \chi = 0$$

$$\hat{=} \hat{\sigma} \cdot \vec{p} \phi - (p_0 - mc) \chi = 0$$

$$\hookrightarrow \phi = \frac{\hat{\sigma} \cdot \vec{p}}{p_0 + mc} \chi \rightarrow \text{Eq. (286.2)!}$$

• Projétores.

Lembrar: descrição não-relativística spin-1/2.

$$\sigma_z |+\rangle = |+\rangle$$

$$|+\rangle \rightarrow \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle \rightarrow \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z |-\rangle = -|-\rangle$$

e

$$P_+ = |+\rangle\langle +| = \frac{1}{2} (1 + \sigma_z) : \text{projétor subespaço autovalor } +1 \text{ (spin up)}$$

$$P_- = |-\rangle\langle -| = \frac{1}{2} (1 - \sigma_z) : \text{ " " " } -1 \text{ (spin down)}$$

(289.1)

ideia: determinar os 4 projétores ~ subespaços

energia positiva/negativa e spin up/down

• verifica-se que:

$$\Lambda_+(p) = \frac{\not{p} + mc}{2mc} = \frac{\gamma^\mu p_\mu + mc}{2mc} : \text{projétor subespaço energia } > 0$$

(289.2)

$$\Lambda_-(p) = \frac{\not{p} - mc}{2mc} = \frac{\gamma^\mu p_\mu - mc}{2mc} : \text{ " " " } < 0$$

notas: projétores em forma covariante

$$\text{como } \not{p} u_n(p) = mc u_n(p) \text{ e } \not{p} \bar{v}_n(p) = -mc \bar{v}_n(p)$$

$$\hookrightarrow \Lambda_+(p) u_n(p) = u_n(p)$$

$$\Lambda_+(p) \bar{v}_n(p) = 0$$

$$\Lambda_-(p) u_n(p) = 0$$

$$\Lambda_-(p) \bar{v}_n(p) = \bar{v}_n(p)$$

• propriedades projétores:

$$\Lambda_\pm^2(p) = \Lambda_\pm(p)$$

$$\Lambda_+(p) \Lambda_-(p) = 0$$

(289.3)

$$\text{Tr } \Lambda_\pm(p) = 2$$

$$\Lambda_+(p) + \Lambda_-(p) = 1$$

vamos verificar $\Lambda_+^2(p) = \Lambda_+(p)$:

$$\Lambda_+^2(p) = \frac{1}{4(mc)^2} (\gamma^\mu p_\mu + mc)(\gamma^\nu p_\nu + mc)$$

$$= \frac{1}{4m^2 c^2} (\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu + (mc)^2 + 2mc \gamma^\mu p_\mu) = \Lambda_+(p)$$

$$\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu = \frac{1}{2} \cdot 2 g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$$

$$= p^\mu p_\mu = (mc)^2$$

• projeções de spin (p/ detalhes, veja Sec. 3.2, Bjorken and Drell);
verifica-se que

$$\hat{\Sigma}(n) = \frac{1}{2} (\hat{1} + \gamma_5 \not{n}) = \frac{1}{2} (\hat{1}_{4 \times 4} + \gamma_5 \gamma^\mu n_\mu) \quad (290.1)$$

$$\text{onde } n^\mu n_\mu = 1 \text{ e } n^\mu p_\mu = 0$$

Ex.: consideramos REF O' = REF partícula

$\hookrightarrow p^\mu = (mc, 0)$, pois partícula em repouso

$$\text{se } n^\mu = (0, 0, 0, \pm 1) \equiv \pm n_z \rightarrow n^\mu p_\mu = 0$$

2 casos:

$$(i) \hat{\Sigma}(+n_z) = \frac{1}{2} (\hat{1}_{4 \times 4} + \gamma_5 \gamma^3 n_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sigma^3 & 0 \\ 0 & 1 - \sigma^3 \end{pmatrix}$$

pois $n_3 = -1$

$$\hookrightarrow \hat{\Sigma}(+n_z) u_1(0) = u_1(0)$$

$$\hat{\Sigma}(+n_z) u_2(0) = u_2(0)$$

$$(ii) \hat{\Sigma}(-n_z) = \frac{1}{2} (\hat{1}_{4 \times 4} + \gamma_5 \gamma^3 n_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sigma^3 & 0 \\ 0 & 1 + \sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \hat{U}(-nz) u_2(0) = u_2(0)$$

$$\hat{U}(-nz) \sigma_3(0) = \sigma_3(0)$$

Resumo: $\hat{U}(+nz) u_1(0) = u_1(0)$

$$\hat{U}(-nz) u_2(0) = u_2(0)$$

(291.1)

$$\hat{U}(-nz) \sigma_3(0) = \sigma_3(0)$$

$$\hat{U}(+nz) \sigma_2(0) = \sigma_2(0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{U}(-nz) u_2(0) = u_2(0) \\ \hat{U}(-nz) \sigma_3(0) = \sigma_3(0) \\ \hat{U}(+nz) \sigma_2(0) = \sigma_2(0) \end{array} \right\} \text{notas} \neq \text{w.n.d. } u_0(p)!$$

• Caso geral: REF 0: observador

$$\text{se } n'^{\mu} = (0, 0, 0, 1) \text{ e } p'^{\mu} = (mc, 0) : \text{REF } 0'$$

$$\xrightarrow{\text{Eq. (266.2)}} n^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} n'^{\nu} \text{ e } p^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p'^{\nu}$$

: REF 0

$$\text{ou } n_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} n'_{\nu}$$

notas:

$$r_3 r^{\mu} n_{\mu} S^{-1}(\Lambda) = \Lambda^{\nu}_{\mu} n'_{\nu} r_3 r^{\mu} S^{-1}$$

$$= n'_{\nu} r_3 S^{-1} \Lambda^{\nu}_{\mu} S r^{\mu} S^{-1} = n'_{\nu} r_3 S^{-1} r^{\nu} = S^{-1} r_3 r^{\nu} n'_{\nu}$$

Eq. (283.1)

$$\xrightarrow{\text{Eq. (272.4)}} = r^{\nu}$$

temos que:

$$\hat{U}(nz) u_1(p) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_{4 \times 4} + r_3 r^{\mu} n_{\mu} \right) S^{-1}(\Lambda) u_1(0)$$

$$= S^{-1}(\Lambda) \frac{1}{2} \left(\mathbb{1}_{4 \times 4} + r_3 r^{\nu} n'_{\nu} \right) u_1(0)$$

Eq. (291.1)

$$= S^{-1}(\Lambda) u_1(0) = u_1(p)$$

similar, verifica-se que (exercício):

$$\begin{aligned} \hat{L}(nz) u_1(p) &= u_1(p) & \hat{L}(-nz) u_2(p) &= u_2(p) \\ \hat{L}(-nz) \sigma_1(p) &= \sigma_1(p) & \hat{L}(nz) \sigma_2(p) &= \sigma_2(p) \end{aligned} \quad (292.1)$$

• Pacotes de onda,

consideram: combinação linear soluções (286.1):

$$\psi^{(+)}(x) = \psi^{(+)}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \sum_{n=1,2} b(p,n) u_n(p) e^{-i p_\mu x^\mu / \hbar} \quad (292.2)$$

onde coeficiente $b(p,n) \in \mathbb{C}$

Eq. (292.2): pacote de ondas planas, energia positiva;
solução de Eq. de Dirac (254.3), pois Eq. de Dirac
é uma eq. linear

normalização:

$$\int d^3r |\psi^{(+)}(\vec{r}, t)|^2 = \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{EE'}}}_{\frac{mc^2}{E}} \int d^3r e^{+i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{r} / \hbar} *$$

$$* \sum_{n,s=1,2} b^*(p',s) b(p,n) u_s^\dagger(p') u_n(p)$$

$$= \sum_{n,s} \int \frac{d^3p}{E} mc^2 b^*(p,s) b(p,n) u_s^\dagger(p) u_n(p) = \sum_n \int d^3p \underbrace{|b(p,n)|^2}_{\frac{E}{mc^2} \delta_{n,s}} = 1 \quad (292.3)$$

sobre o projetor de spin $Z(n)$;

em princípio, $Z(n)$ é uma generalização Eq. (289.1), i.e.,

$$Z(nz) = \frac{1}{2} (\hat{1}_{4 \times 4} + \sigma^3) ; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_{2 \times 2}^3 & 0 \\ 0 & \sigma_{2 \times 2}^3 \end{pmatrix}$$

verifica-se que (exercício) p/ REF partícula

$$Z(nz) = \frac{1}{2} (\hat{1}_{4 \times 4} + \sigma^3) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0 n_z) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5 \gamma^\mu n_\mu \gamma_0)$$

$$\text{onde } n^\mu = (0, 0, 0, 1) = +n_z \quad \checkmark \quad (292.3)$$

como Eq. (292.3) não é um escalar $\rightarrow$ Eq. (290.1) é utilizada
como projetor pois, assim, $Z(n)$ é covariante

$$\text{notas: } \sigma^3 u_1(0) = +u_1(0)$$

$$\sigma^3 u_2(0) = -u_2(0)$$

$$\sigma^3 v_1(0) = +v_1(0)$$

(292.4)

$$\sigma^3 v_2(0) = -v_2(0) : \text{comparamos c/ Eq. (291.1)}$$

De fato, a convenção utilizada p/ spin up e spin down
é baseada na Eq. (292.4), i.e.,

$$u_1(0) \text{ e } v_1(0) : \text{spin up}$$

(292.5)

$$u_2(0) \text{ e } v_2(0) : \text{spin down}$$

próxima etapa: corrente total $\sim$ pacote (292.2);

como 4-velon densidade de corrente (265.1): $j^\mu = c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

$$\hookrightarrow J^\mu = \int d^3n j^\mu(x) = \int d^3n j^\mu(\vec{n}, t) = c \int d^3n \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : \text{corrente total}$$

(293.1)

Eqs. (292.2) e (293.1):

$$J^\mu = c \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{mc^2}{E} \int d^3n e^{i(\vec{p}-\vec{p}') \cdot \vec{n}/\hbar} \cdot$$

$$(2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{p}-\vec{p}') \cdot$$

$$\cdot \sum_{n,s=1,2} b^\dagger(p',s) b(p,n) \bar{u}_s(p') \gamma^\mu u_n(p)$$

(I)

o termo (I) pode ser determinado via a identidade de Gordon (veja P. 10.1, Schwebe)

$$\bar{u}_s(p) \gamma^\mu u_n(q) = \frac{1}{2mc} \bar{u}_s(p) \left((p^\mu + q^\mu) + i \sigma^{\mu\nu} (p_\nu - q_\nu) \right) u_n(q)$$

$$\hookrightarrow J^\mu = \sum_{n,s=1,2} \int d^3p \frac{mc^2}{E} \cdot \frac{1}{2m} \cdot 2p^\mu \bar{u}_s(p) u_n(p) b^\dagger(p,s) b(p,n)$$

$\delta_{n,s} : \text{Eq. (287.2)}$

$$J^\mu = \sum_{n=1,2} \int d^3p \frac{p^\mu c^2}{E} |b(p,n)|^2 \quad (293.2)$$

comparando Eqs. (292.2) e (293.2), temos que

$$J^\mu = \left\langle \frac{p^\mu c^2}{E} \right\rangle = \langle \sigma_{\text{group}, \mu} \rangle, \quad p/E > 0 : \text{similar caso não-relativístico}$$

(293.2)

Lembrar: $v_{group, \kappa} = \frac{\partial E}{\partial p_{\kappa}} = \frac{\partial (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}}{\partial p_{\kappa}} = \frac{1}{E} c^2 p_{\kappa}$

caso geral: pacote de ondas planas = combinação linear
soluções (286.1), energias positiva e negativa:

$$\psi^{(1)}(x) = \sum_{n=1,2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(b(p,n) u_n(p) e^{-i p_{\mu} x^{\mu}/\hbar} + d^*(p,n) \bar{v}_n(p) e^{+i p_{\mu} x^{\mu}/\hbar} \right) \quad (294.1)$$

onde coeficientes $b(p,n)$ e $d(p,n) \in \mathbb{C}$

$$\varepsilon \quad p = p^{\mu} = (p_0, \vec{p}) = (E/c, \vec{p})$$

similar Eq. (292.3), verifica-se que a condição de normalização é dada por (exercício):

$$\sum_{n=1,2} \int d^3 p \left(|b(p,n)|^2 + |d(p,n)|^2 \right) = 1 \quad (294.2)$$

similar Eq. (293.2), verifica-se que (exercício):

$$J^{\kappa} = \sum_{n=1,2} \int d^3 p \left(|b(p,n)|^2 + |d(p,n)|^2 \right) \frac{p^{\kappa} c^2}{E} +$$

$$+ i \sum_{n,s=1,2} \int d^3 p \left(b^*(-p,n) d^*(p,s) e^{2i x^0 p^0/\hbar} \bar{u}_n(-p) \sigma^{\kappa 0} v_s(p) - b(-p,n) d(p,s) e^{-2i x^0 p^0/\hbar} \bar{v}_n(p) \sigma^{\kappa 0} u_s(-p) \right) \quad (294.3)$$

onde (notação): $-p = (E/c, -\vec{p})$

$$\varepsilon \quad \frac{2 x^0 p^0}{\hbar} = \frac{2 c p_0 t}{\hbar} = \frac{2 E t}{\hbar}$$

notas Eq. (294.3):

primeiro termo: t -independente, similar Eq. (293.2);

segundo " : t -dependente, frequência de oscilação

$$\frac{2cp_0}{h} = \frac{2E}{h} > \frac{2mc^2}{h} = 2 \cdot 10^{23} \text{ Hz}; \quad (295.1)$$

- amplitude $\propto$ soluções energia negativa $u_n(p)$;

$$p/\hbar = \frac{mc^2}{h} \rightarrow \lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{h}{mc} = \lambda_{\text{compton}}$$

Obs.: oscilações rápidas (295.1) são denominadas zitterbewegung!

| Eq. (294.3) $\rightarrow$ em princípio, as soluções de energia negativa são importantes p/ a descrição partícula livre;

- consideram, caso particular,

$$\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-\vec{r}^2/2d^2} u_1(0): \text{ pacote inicial gaussiano;}$$

largura $\sim d$

e energia $E > 0$!

vamos determinar $\psi(\vec{r}, t) \sim$ determinar coeficientes $b(p, n)$ e $d(p, n)$;
Eq. (294.1):

$$\psi(\vec{r}, 0) = \int_{n=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(b(p, n) u_n(p) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} + d^*(p, n) \tilde{u}_n(p) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar} \right) \quad (295.2)$$

- $\int d^3n e^{i\vec{r}\cdot\vec{n}/\hbar} + \text{Eq. (295.2)}:$

$$(1) = \int d^3n \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-i\vec{r}\cdot\vec{n}/\hbar - \vec{n}^2/2d^2} u_1(0) = \frac{(2\pi d^2)^{3/2}}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-(\kappa d)^2/2\hbar^2} u_1(0)$$

$$(I) = \sum_{n=1,2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(b(p,n) u_n(p) \underbrace{\int d^3 \tilde{n} e^{-i(\vec{\tilde{n}} - \vec{p}) \cdot \vec{n}/\hbar}}_{(2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{\tilde{n}} - \vec{p})} + \right. \\ \left. + d^\dagger(p,n) v_n(p) \underbrace{\int d^3 \tilde{n} e^{-i(\vec{\tilde{n}} + \vec{p}) \cdot \vec{n}/\hbar}}_{(2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{\tilde{n}} + \vec{p})} \right)$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow p} \sum_{n=1,2} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} (b(p,n) u_n(p) + d^\dagger(p,n) v_n(p)) = \underbrace{\left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-(pd)^2/2\hbar^2}}_{(II)} u_1(0) \quad (296.1)$$

$$\cdot \bar{u}_s(p) \gamma^0 + \text{Eq. (296.1)} :$$

$$\sum_{n=1,2} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} (b(p,n) \bar{u}_s(p) \gamma^0 u_n(p) + d^\dagger(p,n) \bar{u}_s(p) \gamma^0 v_n(p)) = \\ = E/mc^2 \delta_{n,s} \quad = 0 : \text{Eq. (288.1)}$$

$$= \bar{u}_s(p) \gamma^0 + (II) = u_s^\dagger(p) + (II)$$

$$\hookrightarrow b(p,n) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-(pd)^2/2\hbar^2} u_n^\dagger(p) u_1(0)$$

similar, verifica-se que (exercício): (296.2)

$$\hookrightarrow d^\dagger(-p,n) = \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left(\frac{d^2}{\pi\hbar^2}\right)^{3/4} e^{-(pd)^2/2\hbar^2} v_n^\dagger(-p) u_1(0)$$

notas: (i) componentes que contribuem p/ o pacote são tais que $p \leq \frac{\hbar}{d}$

(ii) Eqs. (284.1) e (286.2):

$$u_1^\dagger(p) u_1(0) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}$$

$$u_2^\dagger(p) u_1(0) = 0$$

$$v_1^\dagger(p) u_1(0) = c \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} p_z$$

$$v_2^\dagger(p) u_1(0) = c \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} (p_x - i p_y)$$

$$\hookrightarrow \frac{v_1^\dagger(p) u_1(0)}{u_1^\dagger(p) u_1(0)} \sim c |\vec{p}| = \frac{c |\vec{p}|}{E+mc^2} \sim \frac{p}{p \sim mc}; \quad (297.1)$$

dessa forma: $p \sim mc \leq \frac{h}{d} \rightarrow d \leq \frac{h}{mc} = \lambda_{compton}$

$\hookrightarrow$ se partícula localizada região $d < \lambda_c$ em $t=0$

$\hookrightarrow$ p/ $t > 0$: componentes do pacote ondas de energia negativa são importantes p/ descrição estado da partícula!

$\hookrightarrow$ por outro lado, se partícula localizada região $d > \lambda_c$, temos que

$$\frac{h}{mc} < d < \frac{h}{p} \rightarrow p < mc$$

|Eq. (297.1)| $\rightarrow$ soluções de energia negativa podem ser desconsideradas!

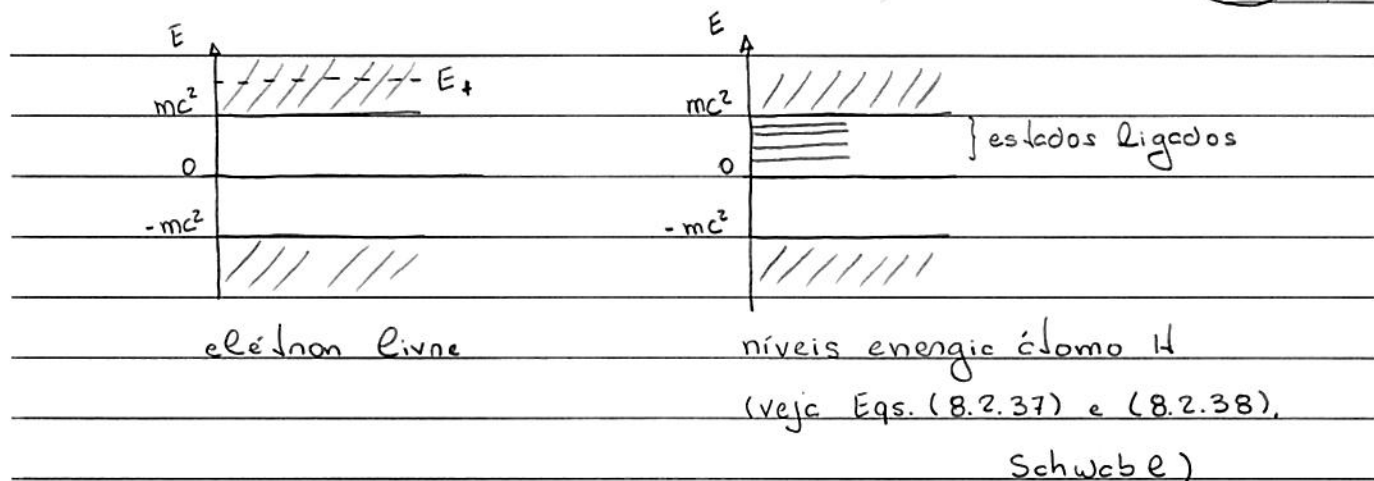
Interpretação das soluções de energia negativa:

: teoria dos buracos

$\neq$ exemplo discutido acima, em alguns casos, os estados de energia negativa não podem ser desprezados;
consideram 2 exemplos:

(1) elétron livre, energia $E > 0$ $\oplus$ campo EM fraco,
frequência ω ;

consideram: instante de observação $t \gg 1$;



teoria de perturbação dependente do tempo, Eqs. (59.2) e (60.1):
probabilidade $\neq 0$ transição elétron p/ estados finais
energias:

$$E_f = E_i + \hbar\omega$$

e $E_f = E_i - \hbar\omega$: se $\hbar\omega > E_i + mc^2 \rightarrow E_i < -mc^2$, i.e.,
é possível uma transição p/ estado energia negativa

(2) átomo H;

em princípio, elétron estado ligado $\xrightarrow{\text{decaimento}}$ estado
energia negativa $\rightarrow$ instabilidade do átomo!

Obs.: veja também, Paradoxo de Klein, Sec. 10.3.4, Schwabe

proposta Dirac: - todos os estados de energia negativa estão
completamente ocupados por elétrons de
acordo c/ estatística Fermi-Dirac $\equiv$

$\equiv$ "mar de Dirac" = vácuo (estado de referência) (298.3)

- vácuo: não é observado;

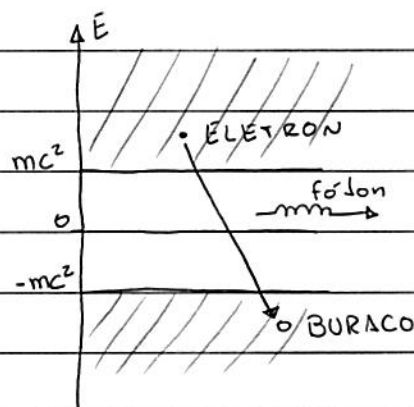
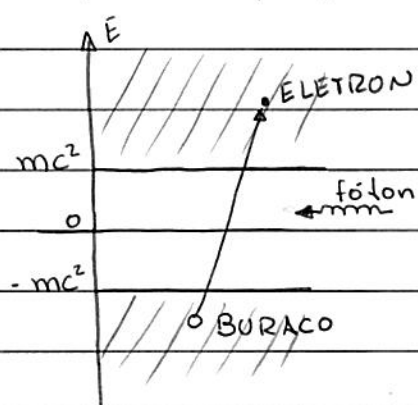
- propriedades do sistema são definidas w.r.t. vácuo;

$\hookrightarrow$ elétron adicionado w.r.t. vácuo: energia positiva;

energia total = $E_{\text{elétron}} - E_{\text{vácuo}} = E_{\text{elétron}}$
+ vácuo

• carga total : $Q_{\text{elétron}} - Q_{\text{vácuo}} = Q_{\text{elétron}}$
 $\oplus \text{ vácuo}$

• consequências propostas (298.1):



produção:

por elétron-buraco

aniquilação:

por elétron-buraco

(i) consideramos vácuo $\oplus$ 1 elétron carga $-e$ e energia $-E$,
 onde $e > 0$ e $E > 0 \equiv$ buraco;

w.n.d. vácuo: a ausência desse elétron pode ser
 considerada como a presença de uma
 partícula de carga $+e$ e energia $+E =$ pósitron:

: nos dois casos, a energia e a carga do sistema w.n.d. (299.1)
 vácuo são iguais.

(ii) consideramos vácuo $\oplus$ radiação EM:

fóton $\rightarrow$ transição elétron E maior de Dirac p/
 estado vazio energia positiva: criação por
 elétron-buraco: OK c/ experimento

(iii) 1 elétron energia positiva $\oplus$ 1 buraco: elétron pode
 sofrer transição p/ estado energia negativa disponível
 $\oplus$ emissão fóton: aniquilação por elétron-buraco:
 : OK c/ experimento

• devido às suas propriedades, o positron é a antipartícula associada ao elétron;

• teoria dos buracos $\rightarrow$ teoria de Dirac p/ o elétron é, de fato, uma teoria de várias partículas, i.e.,

$\psi(x)$ não pode ser interpretada como uma função de onda (formulação p/ 1 partícula) mas

$\psi(x)$ deve ser considerado como um campo (formulação p/ várias partículas)

• próxima etapa: formalização conceito (299.1), i.e.,

determinação operadores e tal que

$\psi(x)$: função de onda elétron

$\psi_c(x)$: " " " " posição

• conjugação de carga;

considerar: eq. de Dirac (263.3) p/ elétron, carga $q = e < 0$:

(cuidado notação!)

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{c} e \gamma^\mu A_\mu - mc) \psi(x) = 0$$

$$\text{ou } (i\hbar \not{\partial} - \frac{1}{c} e \not{A} - mc) \psi = 0 \quad (300.1)$$

p/ partícula carga $q = -e > 0$ sob mesmos campos $\vec{E}, \vec{H}$, temos que

$$(i\hbar \not{\partial} + \frac{1}{c} e \not{A} - mc) \psi_c = 0 \quad (300.2)$$

Eq. (298.1):

solução energia negativa (300.1): $\psi(x)$ função onda elétron $\leftarrow$ ONE-TO-ONE

" " positiva " : $\psi_c(x)$ " " posição

(300.2)

próxima etapa: determinar op. que relaciona $\psi(x)$ e $\psi_c(x)$;

c.c. Eq. (300.1): $(-i\hbar r^{\mu*} \partial_{\mu} - \frac{1}{c} e r^{\mu*} A_{\mu}^* - mc) \psi^* = 0$

como $A_{\mu}^* = A_{\mu}$, temos que

$$(-i\hbar \partial_{\mu} + \frac{1}{c} e A_{\mu}) r^{\mu*} - mc) \psi^* = 0$$

$cr^0 \psi^* : (-i\hbar \partial_{\mu} + \frac{1}{c} e A_{\mu}) (cr^0) r^{\mu*} (cr^0)^{-1} - mc) cr^0 \psi^* = 0 \quad (301.1)$

notar: Eq. (300.2) = (301.1) se molhiz C é tal que

$$(cr^0) r^{\mu*} (cr^0)^{-1} = -r^{\mu} \quad \text{e} \quad \psi_c = cr^0 \psi^* \quad (301.2)$$

como, na representação (263.2), temos que

$$r^{\mu\dagger} = r^0 r^{\mu} r^0 \rightarrow r^{\mu*} = r^0 r^{\mu\dagger} r^0 \quad \text{ou} \quad r^{\mu\dagger} = r^0 r^{\mu*} r^0$$

$\hookrightarrow$ Eq. (301.2): $cr^0 r^{\mu*} r^0 c^{-1} = cr^{\mu\dagger} c^{-1} = -r^{\mu} \quad (301.3)$

$$\text{ou} \quad c^{-1} r^{\mu} c = -r^{\mu\dagger}$$

verifica-se que

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 = -C^{-1} = -C^{\dagger} = -C^t \quad (301.4)$$

$\hookrightarrow C = cr^0 \psi_0 = i\gamma^2 \gamma^0 \gamma^0 \psi_0 = i\gamma^2 \psi_0$: op. de conjugação
 de carga
 op. de conjugação complexa
 (301.5)

Ex.: elétron livre, em repouso, $A^{\mu} = 0$, Eq. (257.2);

$$\psi_c = C \psi_2^{(-)} = i\gamma^2 \psi_0 \sigma_2(0) e^{imc^2 t/\hbar}$$

$$\psi_c = \frac{1}{r^2} \psi_2(0) e^{-imc^2 t/\hbar} = u_1(0) e^{-imc^2 t/\hbar}$$

VERIFICAR $\psi_c = u_1(0)$

notas: função de onda conjugada $\psi_c(x)$ apresenta energia e spins opostos ao estado eletrônico $\psi(x)$, veja comentário pg. 292.1.

Caso geral: $\psi(x)$: estado de energia positiva

e descrito pelos autovalores p^μ : 4-momento

e polarização de spin S^μ , i.e.,

$$\psi(x) = \Lambda(p) \tilde{Z}(s) \psi(x) = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \right) \psi(x) : \text{Eqs. (289.2)}$$

e (290.1)

(302.1)

$$\psi_c = C \psi = C \gamma^0 \psi$$

$$= (C \gamma^0) \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)^* (C \gamma^0)^{-1} (C \gamma^0) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \right)^* (C \gamma^0)^{-1} (C \gamma^0) \psi^*$$

ψ_c

$$= \left(\frac{-\not{p} + mc}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \right) \psi_c \quad (302.2)$$

pois,

$$(C \gamma^0) \not{p}^* (C \gamma^0)^{-1} = (C \gamma^0) \gamma^\mu{}^* p_\mu^* (C \gamma^0)^{-1}$$

$$= p_\mu (C \gamma^0) \gamma^\mu{}^* (C \gamma^0)^{-1} = -\gamma^\mu \quad \text{--- Eq. (301.2)}$$

$$= (C \gamma^0) (\gamma_5 \not{s})^* (C \gamma^0)^{-1} = (C \gamma^0) \gamma_5 (C \gamma^0)^{-1} (C \gamma^0) \gamma^\mu{}^* (C \gamma^0)^{-1} n_\mu$$

$$i \gamma^2 \gamma_5 \gamma^2 i$$

$$- \gamma^\mu$$

$$= (-1)(-1)(\gamma^2)^2 \gamma_5 = -\gamma_5$$

Eq. (302.2) : ψ_c é descrito pelos mesmos autovalores p^u e s^u que descrevem ψ , porém c/ energia e spin opostos !

Eq. (302.2) : interpretação em termos posição:

se ψ : estado eletrônico energia positiva e spin up

$\hookrightarrow \psi_c$: " posição " " " " " :

: OK c/ discussão pg. 292.3 !

• paridade,

vamos verificar que Eq. de Dirac (258.3) é invariante sob paridade;

Eq. (279.4) : $P = e^{i\phi} \gamma^0$: op. paridade

Eq. (271.3) : $\psi'(x') = \psi'(\vec{n}', t) = P \psi(x) = e^{i\phi} \gamma^0 \psi(\vec{n}, t)$; $\vec{n}' = -\vec{n}$

$$\text{ou } \psi'(\vec{n}, t) = e^{i\phi} \gamma^0 \psi(-\vec{n}, t) \quad (303.1)$$

como campos $\vec{E}$: vetor polar e $\vec{B}$: vetor axial, sob paridade, temos que :

$$\phi(\vec{n}, t) \rightarrow \phi'(\vec{n}, t) = + \phi(-\vec{n}, t)$$

(303.2)

$$\vec{A}(\vec{n}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{n}, t) = - \vec{A}(-\vec{n}, t)$$

$\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$: Eq. (258.1) :

$$i\hbar \partial_t \psi(-\vec{n}, t) = \left(c \hat{\alpha} \cdot \left(+i\vec{\nabla} - \frac{1}{c} q \vec{A}(-\vec{n}, t) \right) + \beta mc^2 + \right. \\ \left. + q \phi(-\vec{n}, t) \right) \psi(-\vec{n}, t)$$

$$P^\dagger : i\hbar \partial_t P\psi(-\vec{r}, t) = \left(c P \hat{\alpha} P^{-1} \cdot P \left(i\vec{\nabla} - \frac{1}{c} q \vec{A}(-\vec{r}, t) \right) P^{-1} + \right.$$

$$\psi'(\vec{r}, t)$$

$$r^0 \hat{\alpha} r^0$$

$$i\vec{\nabla} - \frac{1}{c} q \vec{A}(-\vec{r}, t)$$

$$= -\hat{\alpha}$$

$$i\vec{\nabla} + \frac{1}{c} q \vec{A}'(\vec{r}, t)$$

$$+ P \beta P^{-1} m c^2 + q P \Phi(-\vec{r}, t) P^{-1}) P\psi(-\vec{r}, t)$$

$$\beta$$

$$\Phi(-\vec{r}, t) = + \Phi'(\vec{r}, t)$$

$$\hookrightarrow i\hbar \partial_t \psi'(\vec{r}, t) = \left(c \hat{\alpha} \cdot \left(-i\vec{\nabla} - \frac{1}{c} q \vec{A}'(\vec{r}, t) \right) + \beta m c^2 + \right.$$

$$\left. + q \Phi'(\vec{r}, t) \right) \psi'(\vec{r}, t) : \quad (304.1)$$

: Eq. de Dirac invariante sob paridade!

· inversão temporal.

Lembrem: caso não-relativístico:

$$i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t)$$

$$t \rightarrow -t : -i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, -t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, -t)$$

$$c.c. : +i\hbar \partial_t \psi^*(\vec{r}, -t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \psi^*(\vec{r}, -t) ; V(\vec{r}) \in \mathbb{R}$$

notam: se $\psi(\vec{r}, t)$: sol. Eq. de Schrödinger

$$\hookrightarrow \psi^*(\vec{r}, -t) : \quad " \quad " \quad " \quad " ;$$

em particular, p/ partícula spin-1/2, temos que

$\Theta = i\sigma_y K_0$: op. de inversão temporal

(304.2)

onde K_0 : op. de conjugação complexa associado à
representação de coordenadas: $K_0 |\vec{r}\rangle = |\vec{r}\rangle$;
op. anti-unitária

vamos considerar um procedimento similar p/ Eq. de Dirac;

considerar: $T = T_0 K_0$: op. de inversão temporal
↑ " " conjugação complexa (305.1)

$$\text{Eq. (271.3): } \psi'(x') = \psi'(\vec{r}, t') = T \psi(x) = T \psi(\vec{r}, t) = T_0 \psi^*(\vec{r}, t); t' = -t$$

$$\text{ou } \psi'(\vec{r}, t) = T_0 \psi^*(\vec{r}, -t) \quad (305.2)$$

como, sob inversão temporal, campos $\vec{E} \rightarrow +\vec{E}$ e $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$, temos que

$$\phi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi'(\vec{r}, t) = +\phi(\vec{r}, -t) \quad (305.3)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = -\vec{A}(\vec{r}, -t)$$

$t \rightarrow -t$: Eq. (258.1):

$$-i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, -t) = \left(c\hat{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla} - \frac{1}{c} q \vec{A}(\vec{r}, -t)) + \beta mc^2 + q\phi(\vec{r}, -t) \right) \psi(\vec{r}, -t)$$

$$T = T_0 K_0 + : +i\hbar \partial_t T_0 \psi^*(\vec{r}, -t) = \left(c T \hat{\alpha} T^{-1} \cdot T(-i\vec{\nabla} - \frac{1}{c} q \vec{A}(\vec{r}, -t)) T^{-1} + \right. \\ \left. \psi'(\vec{r}, t) \quad +i\vec{\nabla} + \frac{1}{c} q \vec{A}'(\vec{r}, t) \right)$$

$$+ T \beta T^{-1} mc^2 + q T \phi(\vec{r}, -t) T^{-1}) T_0 \psi^*(\vec{r}, -t)$$

$$\phi'(\vec{r}, t)$$

pois: $T(-i\vec{\sigma} - \frac{1}{c}q\vec{A}(\vec{r},-t))T^{-1} = \psi_0(-i\vec{\sigma} - \frac{1}{c}q\vec{A}(\vec{r},-t))\psi_0$

$$= +i\vec{\sigma} - \frac{1}{c}q\vec{A}(\vec{r},-t)$$

$$\text{e } T\Phi(\vec{r},-t)T^{-1} = \psi_0\Phi(\vec{r},-t)\psi_0 = \Phi(\vec{r},-t)$$

↳ condição: Eq. de Dirac invariante sob inversão temporal se

$$T\alpha^k T^{-1} = -\alpha^k \quad \text{e} \quad T\beta T^{-1} = \beta \quad (306.1)$$

$$\text{ou } T_0\alpha^k T_0^{-1} = -\alpha^k \quad \text{e} \quad T\beta^* T^{-1} = \beta$$

p/ a representação (255.1), temos que

$$T_0\alpha^1 T_0^{-1} = -\alpha^1 \quad T_0\alpha^2 T_0^{-1} = +\alpha^2 \quad T_0\alpha^3 T_0^{-1} = -\alpha^3$$

$$\text{e } T_0\beta T_0^{-1} = +\beta$$

$$\text{↳ } T_0 = -i\alpha^1\alpha^3 = -i\beta^2\alpha^1\alpha^3 = +i\beta\alpha^1\beta\alpha^3 = +i\gamma^1\gamma^3 \quad (306.2)$$

$$\text{ou } T = T_0\psi_0 = +i\gamma^1\gamma^3\psi_0 : \text{ op. inversão temporal : } (306.3)$$

: comparan Eq. (304.2)

similar Eq. (302.1), consideran $\psi(x)$: estado de energia positiva, descrito pelos 4-velones momento p^μ e polarização spin S^μ :

$$\psi(x) = \Lambda_+(p)\Sigma(s)\psi(x) = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc}\right)\left(\frac{1 + \gamma_3\beta}{2}\right)\psi(x);$$

sob inversão temporal, temos que

$$\tau \psi(\vec{r}, t) = \psi'(\vec{r}, -t) = \tau \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right) \tau^{-1} \tau \left(\frac{1 + \not{r}_3 \not{s}}{2} \right) \tau^{-1} \tau \psi(\vec{r}, t)$$

notas:

$$\cdot \tau \not{p} \tau^{-1} = \tau_0 \not{p}_0 (\tau^\mu p_\mu) \not{p}_0 \tau_0^{-1} = p_\mu \tau_0 \tau^\mu \tau_0^{-1}$$

$$= \begin{cases} p_0 \tau_0 \beta \tau_0^{-1} = p_0 \beta = p_0 \tau^0 \\ p_\mu \tau_0 \beta \alpha^\mu \tau_0^{-1} = p_\mu \tau_0 \beta \tau_0^{-1} \tau_0 \alpha^\mu \tau_0^{-1} = -p_\mu \beta \alpha^\mu = -p_\mu \tau^\mu \end{cases}$$

$$= \not{p}' \quad ; \quad \text{onde } p' = p'^\mu = (p^0, -\vec{p})$$

$$\cdot \tau \not{r}_3 \not{s} \tau^{-1} = \tau \not{r}_3 \tau^{-1} \tau \not{s} \tau^{-1} = \tau \not{r}_3 \tau^{-1} \not{s}' \quad ; \quad s' = s'^\mu = (s^0, -\vec{s})$$

$$= i \tau^1 \tau^3 \not{r}_3 (i \not{r}_3 \tau^3 \not{s}') = i(-i) \tau^1 \tau^3 \not{r}_3 \tau^3 \not{s}'$$

$$= \tau^1 \tau^3 \tau^3 \tau^1 \not{r}_3 = (-1) \tau^1 \tau^1 \not{r}_3 = \not{r}_3$$

$$\hookrightarrow \psi'(\vec{r}, -t) = \left(\frac{\not{p}' + mc}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \not{r}_3 \not{s}'}{2} \right) \psi'(\vec{r}, -t), \text{ i.e.,}$$

$\psi'(x)$ apresenta momento $\vec{p}$ e spin $\vec{s}$ opostos a $\psi(x)$:

: ou a ideia clássica de inversão temporal!

• como Eq. de Dirac é invariante sob inversões espaciais e temporais, podemos também considerar essas duas simetrias p/ determinarem $\psi(x)$ do posição e paridade $\psi(x)$ e elétrons;

Eqs. (279.4), (301.4) e (306.3):

$$\begin{aligned} PCT &= (e^{i\phi} \tau^0) (i \tau^2 \not{r}_0) (i \tau^1 \tau^3 \not{r}_0) = i(-i) e^{i\phi} \tau^0 \tau^2 \tau^1 \tau^3 \not{r}_0 \\ &= -e^{i\phi} \tau^0 \tau^1 \tau^2 \tau^3 = -e^{i\phi} (-i) \not{r}_0 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow P_{CT} = i e^{i\phi} \gamma_5$$

(308.1)

$$\hookrightarrow \psi_{PCT}(x') = i e^{i\phi} \gamma_5 \psi(x) ; x'^{\mu} = -x^{\mu}$$

$$\text{ou } \psi_{PCT}(\vec{r}, t) = i e^{i\phi} \gamma_5 \psi(-\vec{r}, -t) : \text{função onda positron (308.2)}$$

• Considerar, e.g., uma partícula livre, energia negativa, descrita pelos 4-velones p^{μ} e s^{μ} :

$$\psi(x) = \left(\frac{-\not{p} + mc}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \right) \psi(x)$$

$$\hookrightarrow \psi_{PCT}(x') = i e^{i\phi} \gamma_5 \psi(x) = i e^{i\phi} \gamma_5 \left(\frac{-\not{p} + mc}{2mc} \right) \left(\frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2} \right) \psi(x)$$

$$\text{VERIFICAR} \quad \downarrow = \left(\frac{+\not{p} + mc}{2mc} \right) \left(\frac{1 - \gamma_5 \not{s}}{2} \right) i e^{i\phi} \gamma_5 \psi(x) :$$

$\psi_{PCT}(x')$

: função de onda positron energia positiva e
 projecção spin = projecção spin $\psi(x)$, veja comentário
 pg. 292.1.