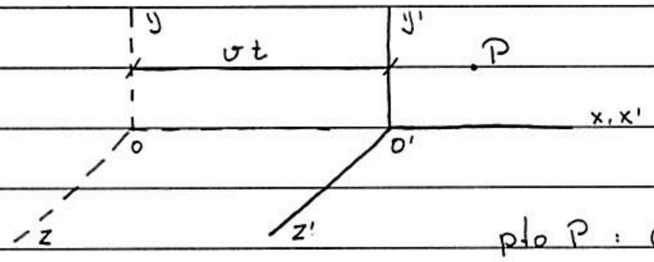
· Transformação de Galileu. (p/ detalhes veja Sec. 3.4, Ballentine)

ideia: estudar a invariância do sistema sob uma transformação de Galileu.

· lembrar: mecânica clássica.



$\vec{v} = v\hat{x}$: velocidade REF K' w.r.t. REF K

pto P : (x, y, z) : coordenadas REF K

(x', y', z') : " " K'

hipótese: origem O = origem O' p/ $t = t' = 0$

temos que:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y \quad : \text{transf. de Galileu}$$
$$z' = z \quad (\text{transf. passiva})$$
$$t' = t$$

ou, p/ uma transf. ativa:

$$x' = x + vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

↳ caso geral, $\vec{v}$: velocidade REF K' w.r.t. REF K e eixos $\hat{e}_i \parallel \hat{e}'_i$, temos que

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}t$$
$$t' = t \qquad (269.1)$$

· mecânica quântica.

p/ transf. de Galileu (ativa) ~ associado op. unitário $U(\vec{v})$

↑ parâmetro

· notação : $\vec{r}(t) = \vec{r}_H(t)$ e $\vec{V}(t) = \vec{V}_H(t)$

· notar : $\vec{V}(t)$: op. velocidade ; $\vec{v}$: parâmetro da transf.

se $|\psi'\rangle = U(\vec{v})|\psi\rangle$

$\hookrightarrow \langle\psi'|\vec{r}(t)|\psi'\rangle = \langle\psi|U^{+}(\vec{v})\,\vec{r}(t)\,U(\vec{v})|\psi\rangle = \langle\psi|\vec{r}(t)|\psi\rangle + \vec{v}\,t$

condição ~ Eq. (269.1)

como $|\psi\rangle$ é arbitrário, temos que

$$U^{+}(\vec{v})\,\vec{r}(t)\,U(\vec{v}) = \vec{r}(t) + \vec{v}\,t$$

ou
$$U(\vec{v})\,\vec{r}(t)\,U^{+}(\vec{v}) = \vec{r}(t) - \vec{v}\,t \qquad (270.1)$$

$\frac{d}{dt}$:
$$U(\vec{v})\,\vec{V}(t)\,U^{+}(\vec{v}) = \vec{V}(t) - \vec{v} \qquad (270.2)$$

$m\frac{d}{dt}$:
$$U(\vec{v})\,\vec{p}(t)\,U^{+}(\vec{v}) = \vec{p}(t) - m\vec{v} \qquad (270.3)$$

nesse caso :

· $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}(t), H_H\right]$: eq. de Heisenberg (80.1)

e

· $\vec{p}(t) = m\,\vec{V}(t)$ (270.4)

· considerar, caso particular, $t=0$: transf. instântanea de Galileu,

nesse caso : $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_H(t=0) = \vec{r}_S = \vec{r}$

$\vec{V}(t=0) = \vec{V}_H(t=0) = \vec{V}_S = \vec{V}$

Eqs. (270.1) - (270.3) :

$U(\vec{v})\,\vec{r}\,U^{+}(\vec{v}) = \vec{r}$

$U(\vec{v})\,\vec{V}\,U^{+}(\vec{v}) = \vec{V} + \vec{v}$ (271.1)

$U(\vec{v})\,\vec{p}\,U^{+}(\vec{v}) = \vec{p} - m\vec{v}$

considerar uma tranf. infinitesimal, i.e., $v \ll 1$;
podemos escrever,

$$U(\vec{v}) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{v}\cdot\vec{G} + O(v^2) \quad (271.2)$$

$\vec{G}$ ← op. hermitiano, gerador de boost

notar:

$$U(\vec{v})\,\vec{p}\,U^{+}(\vec{v}) = \vec{p} - m\vec{v}$$

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar}v_k G_k\right) p_j \left(1 + \frac{i}{\hbar}v_k G_k\right) \simeq p_j - m v_j$$

$$p_j - \frac{i}{\hbar}[v_k G_k, p_j] + O(v^2) \simeq p_j - m v_j$$

$$\hookrightarrow \sum_k v_k [G_k, p_j] = -i\hbar m v_j$$

$$\hookrightarrow [G_k, p_j] = -i\hbar m \delta_{kj} \quad \text{ou} \quad [G_i, p_j] = -i\hbar m \delta_{ij} \quad (271.3)$$

similar (verificar): $[G_i, r_j] = 0$ e $[G_i, V_j] = -i\hbar\delta_{ij}$ (271.4)

. como $U(\vec{v}_1)U(\vec{v}_2) = U(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \to [G_i, G_j] = 0$ (271.5)

. p/ momento angular orbital,

$$[G_i, L_j] = \epsilon_{jkm}[G_i, r_k p_m] = \epsilon_{jkm}\underbrace{[G_i, r_k]}_{=0} p_m + \epsilon_{jkm} r_k \underbrace{[G_i, p_m]}_{-i\hbar m \delta_{im}}$$

$$= +i\hbar\,\epsilon_{jki}(-m r_k) = i\hbar\,\epsilon_{ijk}(-m r_k)$$

(271.6)

Resumo: álgebra gerador $\vec{G}$, Eqs. (271.3) - (271.6)

$$[G_i, G_j] = 0$$
$$[G_i, r_j] = 0 \qquad (t=0)$$
$$[G_i, v_j] = -i\hbar\,\delta_{ij} \qquad (272.1)$$
$$[G_i, p_j] = -i\hbar\, m\,\delta_{ij}$$

massa partícula e $\vec{p} = m\vec{v}$

$$[G_i, L_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}(-m r_k)$$

· notar Eq. (271.1): op. $\vec{G}$ é um gerador de translações de velocidade;
comparar c/ Eq. (231.2) p/ translações espaciais!

· p/ uma transf. finita $\vec{v}$,

$$\xrightarrow{\text{Eq. (271.2)}} \quad U(\vec{v}) = e^{-i\vec{v}\cdot\vec{G}/\hbar}, \quad \text{p/ } t=0 \qquad (272.2)$$

· próxima etapa: determinação $\vec{G}$;
verifica-se que (p/ detalhes, veja Sec. 3.4, Ballentine)

$$\vec{G} = -m\vec{r} \qquad (272.3)$$

notar:

(1) Eq. (272.3): ok c/ álgebra (272.1);

(2) $[G_i, L_j] = [-m r_i, L_j + S_j] = [-m r_i, L_j] = [-m r_i, J_i] =$

$$= i\hbar\,\epsilon_{ijk} G_k$$

$\hookrightarrow [G_i, J_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} G_k$
: $\vec{G}$ op. vetorial, veja Eq. (165.2)
ou $[J_i, G_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} G_k$

· sobre a forma do hamiltoniano H, invariante sob transf. de Galileu.

Eqs. (270.1) e (270.4):

$$U(\vec{v})\vec{V}(t)U^{+}(\vec{v}) = \vec{V}(t) - \vec{v}$$

↳ $U(\vec{v})[\vec{r}(t), H_H]U^{+}(\vec{v}) = [\vec{r}(t), H_H] - i\hbar\vec{v}$

$$[U(\vec{v})\vec{r}(t)U^{+}(\vec{v}), U(\vec{v})H_H U^{+}(\vec{v})] = [\vec{r}(t), H_H] - i\hbar\vec{v}$$

em $t=0$: $[\underbrace{U(\vec{v})\vec{r}U^{+}(\vec{v})}_{=\vec{r}}, U(\vec{v})HU^{+}(\vec{v})] = [\vec{r}, H] - i\hbar\vec{v}$

Eq. (271.1)

↳ $[U(\vec{v})HU^{+}(\vec{v}) - H, \vec{r}] = i\hbar\vec{v}$ (273.1)

notar: $U(\vec{v})HU^{+}(\vec{v}) - H = -\vec{p}\cdot\vec{v} + F(\vec{r})$: ok c/ comutador (273.1)!

em particular, podemos considerar:

$$-\vec{p}\cdot\vec{v} + F(\vec{r}) = -(\vec{p} - \vec{A}(\vec{r}))\cdot\vec{v}$$

↳ $U(\vec{v})HU^{+}(\vec{v}) - H = -(\vec{p} - \vec{A}(\vec{r}))\cdot\vec{v}$ (273.2)

· Eq. (273.2) p/ transf. infinitesimal (271.2),

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{v}\cdot\vec{G}\right)H\left(1 + \frac{i}{\hbar}\vec{v}\cdot\vec{G}\right) - H = -(\vec{p} - \vec{A}(\vec{r}))\cdot\vec{v}$$

$$-\frac{i}{\hbar}[\vec{v}\cdot\vec{G}, H] = -(\vec{p} - \vec{A}(\vec{r}))\cdot\vec{v}$$

ou $\sum_j v_j [G_j, H] = -i\hbar (p_j - A_j(\vec{r})) v_j$

↳ $[G_j, H] = -i\hbar (p_j - A_j(\vec{r}))$

(274.1)

ou $[\vec{G}, H] = -i\hbar (\vec{p} - \vec{A}(\vec{r}))$, i.e.

se Eq. (274.1) OK → H invariante sob transf. de Galileu!

Ex.: considerar: partícula massa m descrita por hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{A}(\vec{r}))^2 + \phi(\vec{r}) \qquad (274.2)$$

Eqs. (272.3) e (274.2) $\xrightarrow{\text{VERIFICAR!}}$ Eq. (274.1) OK

· notar Eq. (273.2):

$$H' \equiv U(\vec{v}) H U^\dagger(\vec{v}) = H - (\vec{p} - \vec{A}(\vec{r})) \cdot \vec{v}$$

$$= \frac{1}{2m} \left((\vec{p} - \vec{A})^2 - 2m (\vec{p} - \vec{A}) \cdot \vec{v} + \phi(\vec{r}) + m^2 v^2 - m^2 v^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2m} \Big(\underbrace{\vec{p} - m\vec{v}}_{\vec{p}'} - \underbrace{\vec{A}(\vec{r})}_{\vec{A}(\vec{r}')} \Big)^2 + \underbrace{\phi(\vec{r})}_{\phi(\vec{r}')} - \frac{1}{2} m v^2, \quad : \text{Eq. } (271.1)$$

i.e. H invariante sob transf. $U(\vec{v})$!

notar: hamiltoniano (264.1): partícula massa m e carga q sob campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$: invariante sob transf. de gauge e Galileu.

· notar Eq. (274.1) : $[\vec{G}, H] \neq 0$, porém H invariante sob $U(\vec{v})$;
comparar: sistema invariante translação espacial : $[H, \vec{P}] = 0$;
" " rotação $[H, \vec{L}] = 0$.

· Resumo: Eqs. (272.2) e (272.3).

$$U(\vec{v}) = e^{i\vec{v}\cdot(m\vec{r})/\hbar} \quad : \text{op. unitário} \sim \text{transf. instantânea } (t=0) \text{ de Galileu} \tag{275.2}$$

verifica-se que, caso geral (veja P15.7, Messiah),

$$U(\vec{v},t) = \exp\left(i\vec{v}\cdot(m\vec{r} - \vec{p}t)/\hbar\right) \tag{275.3}$$

· Obs.: p/ sistema invariante sob transformação de Lorentz:

$[\vec{G}, \vec{p}] \propto H$
$[G_i, G_j] \propto \vec{J}$: comparar Eqs. (272.1)