

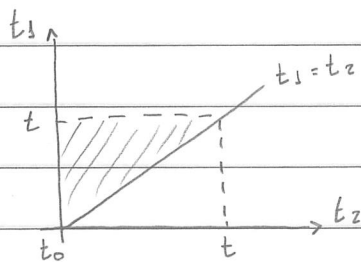
sobre o produto cronológico de operadores,

notas:

$$(I) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$

veja figura $\rightarrow \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H(t_1) H(t_2)$



$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2) H(t_1)$$

$$\hookrightarrow (I) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2) H(t_1)$$

$$t_2 < t_1 \rightarrow t_1 - t_2 > 0$$

$$t_1 < t_2 \rightarrow t_2 - t_1 > 0$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) \theta(t_1 - t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_2) H(t_1) \theta(t_2 - t_1)$$

$$= \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T[H(t_1) H(t_2)]$$

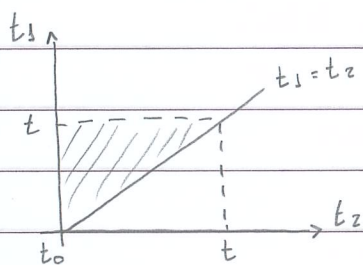
sobre o produto cronológico de operadores,

notas:

$$(I) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$

veja figura $\rightarrow \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H(t_1) H(t_2)$



$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2) H(t_1)$$

$$\hookrightarrow (I) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2) H(t_1)$$

$$t_2 < t_1 \rightarrow t_1 - t_2 > 0$$

$$t_1 < t_2 \rightarrow t_2 - t_1 > 0$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) \theta(t_1 - t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_2) H(t_1) \theta(t_2 - t_1)$$

$$= \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T[H(t_1) H(t_2)]$$

- sobre o limite semiclássico de uma teoria quântica
(p/ detalhes, veja Sec. VI.1, Messiah)

Lembrar: princípio de correspondência (59.1):

$$\langle \text{observável } A \rangle \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \text{valor clássico correspondente,}$$

i.e., limite semiclássico $\sim \lim_{\hbar \rightarrow 0}$!

- notas: consequência $\hbar$ finito: $\exists$ observáveis c/ espectro discreto;

Ex.: hamiltoniano H oscilador harmônico:

$$\Delta E \sim \hbar;$$

p/ O.H. clássico: $E \sim p^2 + x^2$: função contínua;

p/ " " quântico: $\Delta E \rightarrow 0$ p/ $\hbar \rightarrow 0$.

- considerar: partícula, movimento 3-D, descrição via observáveis posição x e momento p ;

nesse caso: $[x, p] = i\hbar$ e $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$:

: x e p não podem ser simultaneamente determinados
 $\neq$ descrição clássica;

notas: $[x, p] = i\hbar \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0$: x e p podem ser simult.
determinados!

- Em detalhes: considerar partícula descrita por um pacote de ondas planas de incerteza mínima:

$$\psi(x) = \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \bar{\psi}(p) e^{ipx/\hbar}$$

tal que $\Delta x \Delta p = \hbar/2$;

nesse caso: Δx e $\Delta p \sim \hbar$

↳ $\lim \hbar \rightarrow 0$:

variância / flutuação Δx w.r.t. $\langle x \rangle \rightarrow 0$

" / " Δp " $\langle p \rangle \rightarrow 0$

↳ condições p/ análise limite semiclassico:

(1) $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$ devem seguir eqs. clássicas de movimento

e

(2) $\Delta x \ll \ell$: comprimento característico do sistema.

• Sobre Eq. (63.5),

consideram: variáveis clássicas x e p_x relacionados

c/ " " q e p via uma transf.
canônica infinitesimal:

$$q = x + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_x} ; \quad p = p_x - \epsilon \frac{\partial G}{\partial x} ; \quad G = G(x, p_x) \quad (77.5)$$

$$\hookrightarrow H(p, q) = H(x, p_x) + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial x}(q-x)}_{\epsilon \partial G / \partial p_x} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_x}(p-p_x)}_{-\epsilon \partial G / \partial x} + O(\epsilon^2)$$

$$\epsilon \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial p_x} - \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial G}{\partial x} \right) = \epsilon \{H, G\}$$

$$\hookrightarrow H(p, q) = H(x, p_x) + \epsilon \{H, G\} + O(\epsilon^2) \quad (77.6)$$

↑ parênteses de Poisson

• Eq. (77.5) $\oplus$ princípio de correspondência (53.1)

$\stackrel{e}{=} \text{Eq. (77.1)} :$

$$\hat{q} = \hat{x} - \frac{i\epsilon}{\hbar} [\hat{x}, \hat{G}] ; \quad \hat{p} = \hat{p}_x - \frac{i\epsilon}{\hbar} [\hat{p}_x, \hat{G}] \quad (77.7)$$

$\hat{G} = \hat{G}(\hat{x}, \hat{p}_x) : \text{operador}$

Similar, Eq. (77.6):

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = H(\hat{x}, \hat{p}_x) - \frac{i\epsilon}{\hbar} [\hat{H}, \hat{G}] ; \quad (77.8)$$

de fato, podemos considerar um op. $F = F(x, p_x)$ arbitrário
(notas: mudança notação: op. $\hat{x} \rightarrow \text{op. } x$)

$$F(p, q) = F(x, p_x) - \frac{i\epsilon}{\hbar} [F, G] \quad (77.9)$$

notar:

$$F(p, q) = F(x, p_x) - \frac{i\epsilon}{\hbar} (FG - GF)$$

$$= \left(1 + \frac{i\epsilon}{\hbar} G \right) F \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} G \right) = U(\epsilon) F U^\dagger(\epsilon) \quad (77.10)$$

$\equiv U(\epsilon)$: op. unitário

$\hookrightarrow G$: gerador transf. : veja Eq. (52.1)
infinitesimal (77.7)

$\hookrightarrow$ Eqs. (77.7) e (77.8) podem ser escritas como:

$$q = U(\epsilon) x U^\dagger(\epsilon); \quad p = U(\epsilon) p_x U^\dagger(\epsilon); \quad H(q, p) = U(\epsilon) H(x, p_x) U^\dagger(\epsilon) \quad (77.11)$$

$$H(p, q) = U(\epsilon) H(x, p_x) U^\dagger(\epsilon)$$

notar:

$$[q, p] = [U x U^\dagger, U p_x U^\dagger] = U x U^\dagger U p_x U^\dagger - U p_x U^\dagger U x U^\dagger$$

$$= U (x p_x - p_x x) U^\dagger = U [x, p_x] U^\dagger = i\hbar :$$

: transf. unitário $x, p_x \xrightarrow{U(\epsilon)} q, p$ preserva relações de comutação

• se transf. canônica $x, p_x \longrightarrow q, p$ = conjunto transf. canônicas infinitesimais

$\hookrightarrow$ procedimento acima pode ser generalizado

$\hookrightarrow$ Eq. (61.1)!

resumo:

relação entre transf. canônica infinitesimal (77.5) e
 " unitária " (77.11):

