

Teoria de perturbação - $T=0$,

Refs.: Secs. 8 e 9, Fetter and Walecka

Secs. 13 e 14, Landau

Caps. 8 e 9, AGD

ideia: introdução procedimento perturbativo p/ a função
de Green: análise diagramática via diagramas
de Feynman;

introdução conceito autoenergia (própria)

e " equação de Dyson.

inicial I: versão / representação de interação de H.Q.:

formulação intermediária entre versões / representações
de Schrödinger e de Heisenberg;

nesse caso: estados e observáveis: dependentes do
tempo!

considerar o hamiltoniano do sistema:

$$H(t) = H_0(t) + V(t)$$

(152.1)

onde: $H_0(t)$: sol. eq. de Schrödinger conhecida

e $V(t)$: termo de interação

Definição: op. unitário $U_0(t, t_0)$, sol. eq. de movimento:

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_0(t, t_0) = H_0(t) U_0(t, t_0) \oplus \text{c.c.}; U_0(t_0, t_0) = 1$$

(152.2)

$|\psi_I(t)\rangle = U_0^\dagger(t,0) |\psi_S(t)\rangle$: estado do sistema rep. de interaçãõ

$A_I(t) = U_0^\dagger(t,0) A_S U_0(t,0)$: observável " " " " (153.1)

: acompanha Eq. (124.2).

↳ eqs. de movimento:

$$(i) \quad i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \underbrace{i\hbar \frac{dU_0^\dagger}{dt} |\psi_S(t)\rangle}_{=-U_0^\dagger H_0} + \underbrace{U_0^\dagger \left(i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_S(t)\rangle \right)}_{H |\psi_S(t)\rangle}$$

$$\hookrightarrow i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \underbrace{U_0^\dagger (H - H_0) U_0}_{V_I(t)} U_0^\dagger |\psi_S(t)\rangle = V_I(t) |\psi_I(t)\rangle$$


↳ $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = V_I(t) |\psi_I(t)\rangle$: eq. de movimento (153.2)
 p/ estado $|\psi_I(t)\rangle$

$$(ii) \quad i\hbar \frac{d}{dt} A_I(t) = \underbrace{\left(i\hbar \frac{dU_0^\dagger}{dt} \right) A_S U_0}_{=-U_0^\dagger H_0} + \underbrace{i\hbar U_0^\dagger \frac{\partial A_S}{\partial t} U_0}_{\equiv \partial A_I / \partial t} + \underbrace{U_0^\dagger A_S \left(i\hbar \frac{dU_0}{dt} \right)}_{= H_0 U_0}$$

↳ $i\hbar \frac{d}{dt} A_I(t) = [A_I, H_0] + i\hbar \frac{\partial A_I}{\partial t}$: eq. de movimento
 p/ observável $A_I(t)$ (153.3)

notas: $|\psi_I(t)\rangle$: evoluçãõ temporal ~ termo de interaçãõ $V(t)$
 $A_I(t)$: " " " " não-interagente $H_0(t)$

• se $H_0 \neq H_0(t)$, temos que soluçãõ (152.2), veja abaixo:

$U_0(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)/\hbar}$ (153.4) 

notas Eq. (153.1):

$$\begin{aligned}
 |\psi_I(t)\rangle &= U_0^\dagger(t,0) |\psi_S(t)\rangle = U_0^\dagger(t,0) U(t,t_0) |\psi_S(t_0)\rangle \\
 &= U_0^\dagger(t,0) U(t,t_0) U(t_0,0) U^\dagger(t_0,0) |\psi_S(t_0)\rangle \\
 &\equiv U_I(t,t_0) : \quad = |\psi_I(t_0)\rangle
 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow |\psi_I(t)\rangle = U_I(t,t_0) |\psi_I(t_0)\rangle \quad (154.1)$$

↑ op. de evolução temporal
p/ a rep. de interação

Importante: notas diferença definições (153.1) e (154.1)!

verifica-se que (exercício):

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_I(t,t_0) = V_I(t) U_I(t,t_0) \quad : \text{eq. de movimento}$$

p/ op. $U_I(t,t_0)$ (154.2)

$$\oplus \text{ c. i. : } U_I(t_0, t_0) = 1$$

• propriedades $U_I(t,t_0)$ = propriedades op. evolução temporal

$U(t,t_0)$, i.e.:

$$- U_I(t,t) = 1$$

(154.3)

$$- U_I(t_2, t_0) = U_I(t_2, t_1) U_I(t_1, t_0)$$

$$\hookrightarrow U_I^{-1}(t, t_0) = U_I(t_0, t) = U^\dagger(t, t_0)$$

↑ pois $U_I(t,t_0)$: op. unitário

• solução formal Eq. (154.2):

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') U_I(t', t_0) \quad (155.1)$$

utilizando a eq. acima, temos que:

$$U_I(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 V_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V_I(t_1) V_I(t_2)$$

$$+ \dots + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) + \dots, \quad (155.2)$$

que pode ser escrito como (veja pg. 155.1):

$$U_I(t, t_0) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n T[V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n)] \quad (155.3)$$

produto cronológico

opções: Eq. (126.1)

Obs.: similitude entre eqs. de movimento (152.2) e (154.2)

↳ $U_0(t, t_0)$ assume forma (155.3) c/ $V_I(t) \rightarrow H_0(t)$;

em particular, p/ $H_0 \neq H_0(t)$, temos que:

$$U_0(t, t_0) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n H_0^n (t - t_0)^n = e^{-i H_0 (t - t_0) / \hbar} : \text{Eq. (153.4)!}$$

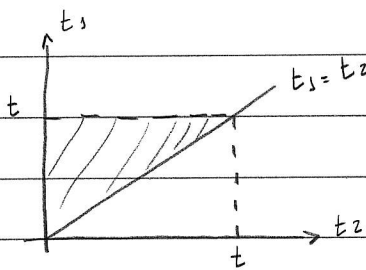
• Detalhes Eq. (155.3):

notas:

$$(J) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2)$$

veja figura



$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_2}^t dt_1 H(t_1) H(t_2)$$

$t_1 \leftrightarrow t_2$

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2) H(t_1)$$

$$\hookrightarrow (J) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 H(t_2) H(t_1)$$

$t_2 < t_1 \rightarrow t_1 - t_2 > 0$

$t_1 < t_2 \rightarrow t_2 - t_1 > 0$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1) H(t_2) \theta(t_1 - t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_2) H(t_1) \theta(t_2 - t_1)$$

$$= \frac{1}{2!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 T[H(t_1) H(t_2)]$$

inicial II: teorema de Gell-Mann e Low;

considerar: termo de interação é "ligado adiabaticamente", i.e.

$$H(t) = H_0 + e^{-2|t|} V = H_0 + V(t); \quad 0 < \eta \ll 1 \quad (156.1)$$

notar: $H \rightarrow H_0$, p/ $t \rightarrow \pm\infty$

$$\stackrel{e}{=} H = H_0 + V, \text{ p/ } t = 0$$

na representação de interação, o estado do sistema é dado pela Eq. (154.1):

$$|\psi_I(t)\rangle = U_{\eta I}(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle \quad (156.2)$$

onde $U_{\eta I}(t, t_0)$: Eq. (155.3) e/ $V_I(t) \rightarrow e^{-2|t|} V_I(t)$

$$\text{Eq. (153.1): } |\psi_I(t_0)\rangle = U_0^\dagger(t_0, 0) |\psi_S(t_0)\rangle = e^{iH_0 t_0/\hbar} |\psi_S(t_0)\rangle$$

$$\text{p/ } t_0 \rightarrow -\infty: H \rightarrow H_0 \rightarrow |\psi_S(t_0)\rangle = U(t_0, 0) |\psi_S(0)\rangle = e^{-iH_0 t_0/\hbar} |\psi_S(0)\rangle$$

em particular, se $|\psi_S(0)\rangle = |\Phi_0\rangle$: autoestado de H_0 :

$$H_0 |\Phi_0\rangle = E_0 |\Phi_0\rangle \quad (156.3)$$

$$\hookrightarrow |\psi_I(t_0)\rangle = e^{iH_0 t_0/\hbar} e^{-iH_0 t_0/\hbar} |\Phi_0\rangle \quad \text{p/ } t_0 \rightarrow -\infty$$

$$\hookrightarrow |\psi_I(t)\rangle = U_{\eta I}(t, -\infty) |\Phi_0\rangle \quad (156.4)$$

em particular, p/ $t=0$:

$$|\psi_I(0)\rangle = U_{\eta I}(0, -\infty) |\Phi_0\rangle \quad (156.5)$$

Eq. (156.5):

relaçã entre autoestado $|\Phi_0\rangle$ hamiltoniano H_0

\underline{E} " $|\Psi_I(0)\rangle$ " completo $H = H_0 + V$

ou

indice autoestado H pode ser determinado a partir autoestado de H_0 via a evoluçã adiabática: $H_0 \rightarrow H = H_0 + V!$

próxima etapa: analisar limite $\eta \rightarrow 0$;

teorema de Gellmann e Low:

se a seguinte quantidade \exists em todas as ordens de teoria de perturbaçã:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{U_{\eta I}(0, -\infty) |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | U_{\eta I}(0, -\infty) |\Phi_0\rangle} = \frac{|\psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \psi_0\rangle}$$

$$\hookrightarrow H \left(\frac{|\psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \psi_0\rangle} \right) = E \left(\frac{|\psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \psi_0\rangle} \right) : \tag{157.1}$$

$|\psi_0\rangle$: autoestado sistema interagente H determinado de $|\Phi_0\rangle$: " " não-interagente H_0 via uma evoluçã adiabática;

em geral, se $|\Phi_0\rangle$: estado fundamental H_0 !

$\hookrightarrow |\psi_0\rangle$: " " $H = H_0 + V$

notar: $\langle \Phi_0 |$ Eq. (157.1):

$$\frac{\langle \Phi_0 | H_0 + V | \psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle \Phi_0 | E_0 + V | \psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle} = E \frac{\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle}$$

$$\hookrightarrow E = E_0 + \frac{\langle \Phi_0 | V | \psi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle} : \text{autovalor sistema interagente!} \tag{157.2}$$



Demonstração teorema: veja Sec. 6, Fetter!

Obs.: a presença do denominador em (157.1) é importante.

pois cancela a fase de $U_{\eta I}(0, \infty) |\Phi_0\rangle$ que diverge c/

η^{-1} qdo $\eta \rightarrow 0$.

(158.1)

similar Eq. (157.1), verifica-se que se

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{U_{\eta I}(0, +\infty) |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | U_{\eta I}(0, +\infty) |\Phi_0\rangle} = \frac{|\Psi'_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi'_0\rangle} \quad \exists \text{ em todas as ordens de teo. de perturbação}$$

$$\hookrightarrow H \left(\frac{|\Psi'_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi'_0\rangle} \right) = E \left(\frac{|\Psi'_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi'_0\rangle} \right) \quad (158.2)$$

em particular, p/ autoestado não-degenerado H , temos que:

$$\frac{|\Psi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Psi_0\rangle} = \frac{|\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | \Phi_0\rangle} \quad (158.3)$$

próxima etapa: desenvolvimentos método perturbativo p/ a função de Green;

Eq. (127.3):

$$\text{forma da } G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \sim \langle \Psi_0 | T(\hat{O}_H(t) \hat{O}_H(t')) | \Psi_0 \rangle = (I)$$

\uparrow op. rep. Heisenberg

\hookrightarrow ideia: determinar (I) em termos:

$$\langle \Psi_0 | T(\dots \hat{O}_I(t) \hat{O}_I(t')) | \Psi_0 \rangle;$$

vamos, inicialmente, considerar:

$$\frac{\langle \Psi_0 | \hat{O}_H(t) | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle}, \quad \text{onde } |\Psi_0\rangle: \text{ estado fundamental sistema interagente} \quad (158.4)$$

• Lembrando Eq. (124.2): $A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A_S U(t, t_0)$,
em particular, p/ $t_0 = 0$, temos que:

$$A_H(t) = U^\dagger(t, 0) A_S U(t, 0)$$

$$= U^\dagger(t, 0) U_0^\dagger(t, 0) U_0^\dagger(t, 0) A_S U_0(t, 0) U_0^\dagger(t, 0) U(t, 0)$$

$$U_I^\dagger(t, 0)$$

$$A_I(t) : \text{Eq. (153.1)}$$

$$U_I(t, 0) : \text{Eq. (154.1)}$$

$$\hookrightarrow A_H(t) = U_I^\dagger(t, 0) A_I(t) U_I(t, 0)$$

(159.1)

• Eqs. (157.1) e (158.2):

$$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle \xrightarrow[\text{obs. (158.1)}]{\text{lembrando}} \frac{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle}{|\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle|^2} = \frac{\langle \Phi_0 | U_{\eta_I}^\dagger(0, +\infty) U_{\eta_I}(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle}{|\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle|^2}$$

$$\text{como } U_{\eta_I}^\dagger(0, +\infty) U_{\eta_I}(0, -\infty) = U_{\eta_I}(+\infty, 0) U_{\eta_I}(0, -\infty)$$

veja Eq. (154.3)

$$= U_{\eta_I}(+\infty, -\infty) \equiv \hat{S}$$

(159.2)

$$\hookrightarrow \frac{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle}{|\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle|^2} = \frac{\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle}{|\langle \Phi_0 | \psi_0 \rangle|^2}$$

(159.3)

• similar:

$$\langle \psi_0 | \hat{O}_H(t) | \psi_0 \rangle \stackrel{\text{Eq. (159.1)}}{=} \langle \psi_0 | U_{\eta_I}^\dagger(t, 0) \hat{O}_I(t) U_{\eta_I}(t, 0) | \psi_0 \rangle$$

$$= \langle \Phi_0 | U_{\eta_I}^\dagger(0, +\infty) U_{\eta_I}^\dagger(t, 0) \hat{O}_I(t) U_{\eta_I}(t, 0) U_{\eta_I}(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle$$

$$U_{\eta_I}(+\infty, 0) U_{\eta_I}(0, t)$$

$$U_{\eta_I}(t, -\infty)$$

$$U_{\eta_I}(+\infty, t)$$

$$L, \quad \frac{\langle \psi_0 | \hat{O}_H(t) | \psi_0 \rangle}{|\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle|^2} = \frac{\langle \Phi_0 | U_{\eta_I}(+\infty, 0) \hat{O}_I(t) U_{\eta_I}(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle}{|\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle|^2} \quad (160.1)$$

L> Eqs. (159.3) e (160.1):

$$\frac{\langle \psi_0 | \hat{O}_H(t) | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle \Phi_0 | U_{\eta_I}(+\infty, 0) \hat{O}_I(t) U_{\eta_I}(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle}{\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle} \quad (160.2)$$

• O numerador RHS Eq. (160.2) pode ser determinado via Eq. (155.3);
verifique-se que (veja Eqs. (8.6) e (8.7), Fetter):

$$\frac{\langle \psi_0 | \hat{O}_H(t) | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{1}{\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle} \langle \Phi_0 | \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} * \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_n|)} \mathcal{T} [V_I(t_1) \dots V_I(t_n) O_I(t)] | \Phi_0 \rangle :$$

: $\langle O_H(t) \rangle$ p/ estado fundamental intercalante $|\psi_0\rangle$ em termos
 $\langle \dots \rangle$ " " não-intercalante $|\Phi_0\rangle$,
 sênic potências p/ termo de intercalação \hat{V}
 e op. $\hat{O}_I(t)$. (160.3)

• similar, verifique-se que:

$$\frac{\langle \psi_0 | \mathcal{T} (O_H(t) O_H(t')) | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{1}{\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle} \langle \Phi_0 | \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} *$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n e^{-\eta(|t_1| + \dots + |t_n|)} \mathcal{T} [V_I(t_1) \dots V_I(t_n) O_I(t) O_I(t')] | \Phi_0 \rangle$$

(160.4)

Obs: como Eqs. (160.3) e (160.4) consiste de noções de acordo com o teorema de Gellmann e Low, o limite $\eta \rightarrow 0$ pode ser considerado!

Eq. (160.4) permite escrever a função de Green (127.1) como:

$$iG_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1}{\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n +$$

$$* \langle \Phi_0 | T [V_I(t_1) \dots V_I(t_n) \hat{\Psi}_{I\alpha}(x) \hat{\Psi}_{I\beta}^+(y)] | \Phi_0 \rangle$$

onde $x = (\vec{n}_1, t)$ e $y = (\vec{n}_2, t')$: (161.1)

: $G_{\alpha\beta}(x,y)$ em serie de potências do termo interagente \hat{V} e $\langle \dots \rangle$ w.r.t. estado fundamental não-interagente $|\Phi_0\rangle$

notas numeradas RHS Eq. (161.1):

$n=0$: $\langle \Phi_0 | T (\hat{\Psi}_{I\alpha}(x) \hat{\Psi}_{I\beta}^+(y)) | \Phi_0 \rangle = iG_{\alpha\beta}^0(x,y)$ (161.2)

$n=1$: $\frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \langle \Phi_0 | T (V_I(t_1) \hat{\Psi}_{I\alpha}(x) \hat{\Psi}_{I\beta}^+(y)) | \Phi_0 \rangle = (I)$

Eq. (43.3) : $\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \int d^3n_1 d^3n_2 \hat{\Psi}_{\mu}^+(\vec{n}_1) \hat{\Psi}_{\nu}^+(\vec{n}_2) V(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \hat{\Psi}_{\nu}(\vec{n}_2) \hat{\Psi}_{\mu}(\vec{n}_1)$

⊕ Eq. (153.1):

$$\hat{V}_I(t_1) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \int d^3n_1 d^3n_2 U_0^\dagger(t_1, 0) \hat{\Psi}_{\mu}^+(n_1) U_0(t_1, 0) U_0^\dagger(t_1, 0) \hat{\Psi}_{\nu}^+(\vec{n}_2) U_0(t_1, 0) +$$

$$* V(\vec{n}_1, \vec{n}_2) U_0^\dagger(t_1, 0) \hat{\Psi}_{\nu}(\vec{n}_2) U_0(t_1, 0) U_0^\dagger(t_1, 0) \hat{\Psi}_{\mu}(\vec{n}_1) U_0(t_1, 0)$$

$$\underbrace{\hat{\Psi}_{I\nu}(\vec{n}_2, t_1)} \quad \underbrace{\hat{\Psi}_{I\mu}(\vec{n}_1, t_1)}$$

$$\hookrightarrow V_T(t_1) = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \int d^3\vec{n}_1 d^3\vec{n}_2 \int dt_2 *$$

$$* \hat{\Psi}_\mu^\dagger(\vec{n}_1, t_1) \hat{\Psi}_\nu^\dagger(\vec{n}_2, t_2) V(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \delta(t_1 - t_2) \hat{\Psi}_\nu(\vec{n}_2, t_2) \hat{\Psi}_\mu(\vec{n}_1, t_1)$$

$$\equiv U(x_1, x_2)$$

$$\hookrightarrow (I) = \frac{-i}{2\hbar} \sum_{\mu\nu} \int d^4x_1 d^4x_2 U(x_1, x_2) *$$

$$* \langle \Phi_0 | T \left(\hat{\Psi}_\mu^\dagger(x_1) \hat{\Psi}_\nu^\dagger(x_2) \hat{\Psi}_\nu(x_2) \hat{\Psi}_\mu(x_1) \hat{\Psi}_\alpha(x) \hat{\Psi}_\beta^\dagger(y) \right) | \Phi_0 \rangle$$

(162.2)

$$\text{onde } \int d^4x = \int d^3\vec{n} \int dt \quad (\text{II})$$

$$\hat{\Psi}_{I\alpha}(x) \rightarrow \hat{\Psi}_\alpha(x) : \text{índice } I : \text{omitido}$$

Eq. (162.2) : termos de série (162.2) ~ determinação $\langle \dots \rangle$ da forma (II);

procedimento : via teorema de Wick!

• Considerações iniciais antes de introdução do teorema;

(1) Lembra Eq. (126.1) : produto cronológico operadores, e.g.,

$$T(A(t_1) B(t_2) C(t_3) D(t_4)) = (-1)^P A(t_1) D(t_4) B(t_2) C(t_3),$$

$$\text{se } t_1 > t_4 > t_2 > t_3 \quad (162.3)$$

• A, B, C, D : ops. bosônicos : $(-1)^P = +1$

• A, B, C, D : " fermiônicos : # permutações p/ sequência original ops. \rightarrow sequência temporalmente ordenada

(2) Definição: ordem normal ops. criação e destruição:

(ops. criação) * (ops. destruição); ...

notação: : op.:

Exemplo: : $a(\vec{x}_1) a^\dagger(\vec{x}_2) a(\vec{x}_3) a^\dagger(\vec{x}_4)$:

(bósons/

férmions) = $\pm a^\dagger(\vec{x}_2) a^\dagger(\vec{x}_4) a(\vec{x}_3) a(\vec{x}_1)$ (163.1)

$$= (-1)^P a^\dagger(\vec{x}_2) a^\dagger(\vec{x}_4) a(\vec{x}_1) a(\vec{x}_3)$$

(3) Definição: contração entre operadores A e B:

$$\overline{AB} = T(AB) - :AB: \quad (163.2)$$

Obs.: notações: $\overline{AB} = A \cdot B \cdot = A^c B^c = \underline{AB}$

verifica-se que (veja abaixo): \overline{AB} : número not operador

$$\text{se } \langle \Phi_0 | :AB: | \Phi_0 \rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \langle \Phi_0 | \overline{AB} | \Phi_0 \rangle = \overline{AB} \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | T(AB) | \Phi_0 \rangle$$

$$- \langle \Phi_0 | :AB: | \Phi_0 \rangle$$

$$= 0$$

$$\hookrightarrow \overline{AB} = \langle \Phi_0 | T(AB) | \Phi_0 \rangle \quad (163.3)$$

O teorema de Wick é dado pela seguinte identidade entre operações:

$$T(A_1 A_2 \dots A_n) = : A_1 A_2 \dots A_n :$$

$$+ : \overline{A_1 A_2} A_3 \dots A_n : + : \overline{A_1 A_2 A_3} \dots A_n : + \dots \quad (1 \text{ par contração})$$

$$+ : \overline{A_1 A_2} \overline{A_3 A_4} A_5 \dots A_n : + : \overline{A_1 A_2 A_3 A_4} A_5 \dots A_n : + \dots \quad (2 \text{ pares})$$

$$+ \dots +$$

(164.1)

+ soma todos os possíveis pares de contração.

Demonstração: veja Sec. 8, Fetter.

notar: p/ n=1 : Eq.(164.1) = Eq.(163.2) !

como \overline{AB} : número, temos que, e.g.:

$$: \overline{A_1 A_2} A_3 \dots A_n : = \overline{A_1 A_2} : A_3 \dots A_n : ;$$

$$: \overline{A_1 A_2 A_3} \dots A_n : = (-1)^p : \overline{A_1 A_3} A_2 \dots A_n : \\ = (-1)^p \overline{A_1 A_3} : A_2 \dots A_n :$$

se, p, temos em ordem normal:

$$\langle \Phi_0 | : A_i A_j \dots A_k : | \Phi_0 \rangle = 0$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (164.1)} : \langle \Phi_0 | T(A_1 A_2 \dots A_n) | \Phi_0 \rangle =$$

(164.2)

= soma todos os possíveis pares de contração !



• sobre a contração entre ops. de campo fermiônicos;

Lembrar Eq. (132.5):

$$\hat{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} C_{\vec{k}\alpha}$$

na rep. de interaçã, considerando $H_0 =$ hamiltoniano fermions livres (132.4), temos que:

$$\hat{\psi}_\alpha(x) = \psi_{\alpha I}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} C_{\vec{k}\alpha} ; \hbar\omega_{\vec{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m \quad (165.1)$$

é interessante escrever o op. fermiônico $C_{\vec{k}\alpha}$ como:

$$C_{\vec{k}\alpha} = \begin{cases} C_{\vec{k}\alpha}, & k > k_F : \text{partícula} \\ b_{-\vec{k}\alpha}^\dagger, & k < k_F : \text{buraco w.r.t. estado fundamental} \end{cases} \quad (165.2)$$

|FS> : Eq. (135.2)

↳ Eq. (165.1):

$$\hat{\psi}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{|\vec{k}| < k_F} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} C_{\vec{k}\alpha} + \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{|\vec{k}| > k_F} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)} C_{\vec{k}\alpha}$$

$$\equiv \hat{\psi}_h^\dagger(x) \quad \equiv \hat{\psi}_p(x) \quad (165.3)$$

$$\hat{\psi}_\alpha(x) = \hat{\psi}_h^\dagger(x) + \hat{\psi}_p(x)$$

$$\hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) = \hat{\psi}_h(x) + \hat{\psi}_p^\dagger(x)$$

↳ p/ estado fundamental não-interagente |FS> = |Φ₀>, temos que

$$\hat{\psi}_p(x) |\Phi_0\rangle = \hat{\psi}_h(x) |\Phi_0\rangle = 0 \quad (165.4)$$

• consideren a contracció entre ops. $\hat{\Psi}_{h\alpha}^+(x)$ e $\hat{\Psi}_{h\beta}(x')$:

$$\hat{\Psi}_{h\alpha}^+(x) \hat{\Psi}_{h\beta}(x') = \mathcal{T}(\hat{\Psi}_{h\alpha}^+(x) \hat{\Psi}_{h\beta}(x')) - : \hat{\Psi}_{h\alpha}^+(x) \hat{\Psi}_{h\beta}(x') : = (I)$$

- p/ $t > t'$:

$$(I) = \hat{\Psi}_{h\alpha}^+(x) \hat{\Psi}_{h\beta}(x') - \hat{\Psi}_{h\alpha}^+(x) \hat{\Psi}_{h\beta}(x') = 0$$

- p/ $t' > t$:

$$(I) = - \hat{\Psi}_{h\beta}(x') \hat{\Psi}_{h\alpha}^+(x) - \hat{\Psi}_{h\alpha}^+(x) \hat{\Psi}_{h\beta}(x')$$

$$= \frac{-1}{v} \sum_{|\vec{k}'| < k_F} \sum_{|\vec{p}'| < p_F} e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}'} t)} e^{-i(\vec{p}' \cdot \vec{r}' - \omega_{\vec{p}'} t')}$$

$$* (b_{-\vec{p}'\beta} b_{-\vec{k}'\alpha}^+ + b_{-\vec{k}'\alpha}^+ b_{-\vec{p}'\beta})$$

$$\delta_{\vec{k}', \vec{p}'} \delta_{\alpha\beta}$$

$$\hookrightarrow (I) = (-1) \delta_{\alpha\beta} \Theta(t' - t) \frac{1}{v} \sum_{\vec{k}'} \Theta(k_F - k) e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega_{\vec{k}'}(t - t')} \quad (166.1)$$

: número : veje pg. 163

• similar, contracció entre ops. $\hat{\Psi}_{p\alpha}(x)$ e $\hat{\Psi}_{p\beta}^+(x')$:

$$\hat{\Psi}_{p\alpha}(x) \hat{\Psi}_{p\beta}^+(x') = \mathcal{T}(\hat{\Psi}_{p\alpha}(x) \hat{\Psi}_{p\beta}^+(x')) - : \hat{\Psi}_{p\alpha}(x) \hat{\Psi}_{p\beta}^+(x') : = (I)$$

- p/ $t' > t$:

$$(I) = - \hat{\Psi}_{p\beta}^+(x') \hat{\Psi}_{p\alpha}(x) + \hat{\Psi}_{p\beta}^+(x') \hat{\Psi}_{p\alpha}(x) = 0$$

- p/ t > t' :

$$\begin{aligned}
(I) &= \hat{\psi}_{p\alpha}(x) \hat{\psi}_{p\beta}^+(x') + \hat{\psi}_{p\beta}^+(x') \hat{\psi}_{p\alpha}(x) \\
&= \frac{1}{V} \sum_{|\vec{k}| > k_F} \sum_{|\vec{p}'| > p_F} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \vec{k} t)} e^{-i(\vec{p}' \cdot \vec{r}' - \omega \vec{p}' t)} \\
&\quad + (C_{\vec{k}\alpha} C_{\vec{p}\beta}^+ + C_{\vec{p}\beta}^+ C_{\vec{k}\alpha}) \\
&\quad \delta_{\alpha\beta} \delta_{\vec{k}, \vec{p}}
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow (I) = \delta_{\alpha\beta} \theta(t-t') \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \theta(k-k_F) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega \vec{k} (t-t')} \quad (167.1)$$

• similar, verifico-se que (exercício):

$$\hat{\psi}_{h\alpha}^+(x) \hat{\psi}_{h\beta}^+(x') = \hat{\psi}_{p\alpha}^+(x) \hat{\psi}_{p\beta}^+(x') = 0 \quad (167.2)$$

$$\hat{\psi}_{h\alpha}^+(x) \hat{\psi}_{p\beta}^+(x') = \hat{\psi}_{p\alpha}^+(x) \hat{\psi}_{h\beta}^+(x') = 0$$

• Eq. (165.3) ⊕ propriedade distributiva T(...) e ... :

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^+(x') &= (\psi_{h\alpha}^+(x) + \psi_{p\alpha}(x)) (\psi_{h\beta}^+(x') + \psi_{p\beta}^+(x')) = \\
&= \psi_{h\alpha}^+(x) \psi_{h\beta}^+(x') + \psi_{p\alpha}(x) \psi_{p\beta}^+(x') \\
&\quad + \underbrace{\psi_{h\alpha}^+(x) \psi_{p\beta}^+(x')}_{=0} + \underbrace{\psi_{p\alpha}(x) \psi_{h\beta}^+(x')}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^+(x') = i G_{\alpha\beta}^0(x, x') \quad (167.3)$$

↑ veja Eqs. (133.1), (166.1) e (167.1)



Eq. (167.3): a contração entre ops. $\psi_{\alpha}(x) = \psi_{\alpha}(x)$ e $\psi_{\beta}^{\dagger}(x') = \psi_{\beta}^{\dagger}(x')$ = função de Green não-interagente $iG_{\alpha\beta}^0(x, x')$

• como (verificar) $T(A(t)B(t')) = -T(B(t')A(t))$, temos que (exercício):

$$\psi_{\beta}^{\dagger}(x') \psi_{\alpha}(x) = -iG_{\alpha\beta}^0(x, x')$$

(168.1)

$$\psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^{\dagger}(x') = \psi_{\alpha}^{\dagger}(x) \psi_{\beta}^{\dagger}(x') = 0$$

Obs. 1: veja pg. 168.1 p/ cálculo energia estado fundamental do gás de elétrons degenerado, pg. 49.

Obs. 2: p/ aplicações do teorema de Wick, veja Eqs. (2.79) -- (2.93), Mahan

próxima etapa: teoria de perturbação $T=0$: análise diagramática;

2 etapas: (1) Diagramas de Feynman no espaço coordenadas
 = (2) " " " " " momentos.

(1) espaço de coordenadas;

Eq. (162.2) e teorema de Wick (164.2):

$$\langle \Phi_0 | T(\psi_{\mu}^{\dagger}(x_1) \psi_{\nu}^{\dagger}(x_2) \psi_{\nu}(x_2) \psi_{\mu}(x_1) \psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^{\dagger}(y)) | \Phi_0 \rangle =$$

$$= \psi_{\mu}^{\dagger}(x_1) \psi_{\nu}^{\dagger}(x_2) \psi_{\nu}(x_2) \psi_{\mu}(x_1) \psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^{\dagger}(y) +$$

Ex.: gás de elétrons degenerado, pg. 49;

nesse caso, a determinação da energia do estado fundamental em 1ª ordem de teoria de perturbação ~ cálculo valor esperado:

$$\langle FS | C_{\vec{k}+\vec{q}\alpha}^\dagger C_{\vec{p}-\vec{q}\beta}^\dagger C_{\vec{p}\beta} C_{\vec{k}\alpha} | FS \rangle = (I)$$

utilizando o teorema de Wick (164.2):

$$(I) = \overbrace{C_{\vec{k}+\vec{q}\alpha}^\dagger C_{\vec{p}-\vec{q}\beta}^\dagger} + \overbrace{C_{\vec{p}\beta} C_{\vec{k}\alpha}}$$

$$= \langle FS | C_{\vec{k}+\vec{q}\alpha}^\dagger C_{\vec{p}-\vec{q}\beta}^\dagger | FS \rangle = 0$$

$$+ (-1)^P \overbrace{C_{\vec{k}+\vec{q}\alpha}^\dagger C_{\vec{k}\alpha}} \overbrace{C_{\vec{p}\beta} C_{\vec{p}-\vec{q}\beta}^\dagger} : \text{ termo direto (52.2)}$$

$$(-1)^2 \langle FS | C_{\vec{k}+\vec{q}\alpha}^\dagger C_{\vec{k}\alpha} | FS \rangle = \delta_{\vec{q},0} \langle FS | \hat{n}_{\vec{k}\alpha} | FS \rangle$$

$$+ (-1)^P \overbrace{C_{\vec{k}+\vec{q}\alpha}^\dagger C_{\vec{p}\beta}^\dagger} \overbrace{C_{\vec{p}\beta} C_{\vec{k}\alpha}} : \text{ termo de troca (56.1)}$$

$$(-1)^1 \langle FS | C_{\vec{k}+\vec{q}\alpha}^\dagger C_{\vec{p}\beta}^\dagger | FS \rangle \langle FS | C_{\vec{p}\beta} C_{\vec{k}\alpha} | FS \rangle$$

$$\delta_{\alpha\beta} \delta_{\vec{p}, \vec{k}+\vec{q}} \langle FS | \hat{n}_{\vec{k}+\vec{q},\alpha} | FS \rangle \langle FS | \hat{n}_{\vec{k}\alpha} | FS \rangle$$

$$+ (-1)^3 \psi_\mu^+(x_1) \psi_\alpha(x) \psi_\nu^+(x_2) \psi_\nu(x_2) \psi_\mu(x_1) \psi_\beta^+(y)$$

$$+ (-1)^4 \psi_\nu^+(x_2) \psi_\alpha(x) \psi_\mu^+(x_1) \psi_\nu(x_2) \psi_\mu(x_1) \psi_\beta^+(y)$$

$$= \left((-1)^4 \psi_\mu(x_1) \psi_\mu^+(x_1) \psi_\nu(x_2) \psi_\nu^+(x_2) + \right.$$

$$\left. + (-1)^3 \psi_\nu(x_2) \psi_\mu^+(x_1) \psi_\mu(x_1) \psi_\nu^+(x_2) \right) \psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(y) +$$

$$+ (-1)^4 \psi_\alpha(x) \psi_\mu^+(x_1) \left((-1)^2 \psi_\mu(x_1) \psi_\nu^+(x_2) \psi_\nu(x_2) \psi_\beta^+(y) + \right.$$

$$\left. + (-1)^4 \psi_\nu(x_2) \psi_\nu^+(x_2) \psi_\mu(x_1) \psi_\beta^+(y) \right) +$$

$$+ (-1)^5 \psi_\alpha(x) \psi_\nu^+(x_2) \left((-1)^4 \psi_\nu(x_2) \psi_\mu^+(x_1) \psi_\mu(x_1) \psi_\beta^+(y) + \right.$$

$$\left. + (-1)^2 \psi_\mu(x_1) \psi_\mu^+(x_1) \psi_\nu(x_2) \psi_\beta^+(y) \right)$$

$$= i G_{\alpha\beta}^0(x,y) \left(i G_{\mu\mu}^0(x_1,x_1) i G_{\nu\nu}^0(x_2,x_2) - i G_{\nu\mu}^0(x_2,x_1) i G_{\mu\nu}^0(x_1,x_2) \right)$$

$$+ i G_{\alpha\mu}^0(x,x_1) \left(i G_{\mu\nu}^0(x_1,x_2) i G_{\nu\beta}^0(x_2,y) - i G_{\nu\nu}^0(x_2,x_2) i G_{\mu\beta}^0(x_1,y) \right)$$

$$+ i G_{\alpha\nu}^0(x,x_2) \left(i G_{\nu\mu}^0(x_2,x_1) i G_{\mu\beta}^0(x_1,y) - i G_{\mu\mu}^0(x_1,x_1) i G_{\nu\beta}^0(x_2,y) \right)$$

(169.3)

↳ o numerador (162.2) do termo 1ª ordem de expansão

(161.1) assume a forma:

notas feitas!

$$i(I) = \sum_{\mu\nu} \int d^4x_1 d^4x_2 +$$

$$- \frac{i}{2\hbar} U(x_1, x_2) i G_{\alpha\beta}^{\circ}(x, y) i G_{\mu\nu}^{\circ}(x_1, x_2) i G_{\nu\nu}^{\circ}(x_2, x_2) \quad (A)$$

$$+ \frac{i}{2\hbar} U(x_1, x_2) i G_{\alpha\beta}^{\circ}(x, y) i G_{\nu\mu}^{\circ}(x_2, x_1) i G_{\mu\nu}^{\circ}(x_1, x_2) \quad (B)$$

$$- \frac{i}{2\hbar} U(x_1, x_2) i G_{\alpha\mu}^{\circ}(x, x_1) i G_{\mu\nu}^{\circ}(x_1, x_2) i G_{\nu\beta}^{\circ}(x_2, y) \quad (C)$$

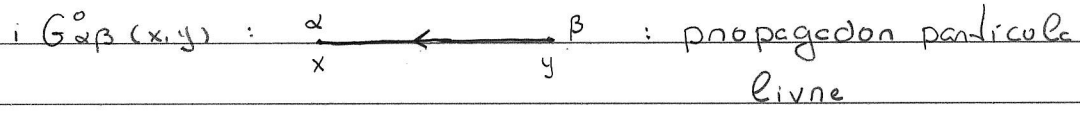
$$+ \frac{i}{2\hbar} U(x_1, x_2) i G_{\nu\nu}^{\circ}(x_2, x_2) i G_{\alpha\mu}^{\circ}(x, x_1) i G_{\mu\beta}^{\circ}(x_1, y) \quad (D)$$

$$- \frac{i}{2\hbar} U(x_1, x_2) i G_{\alpha\nu}^{\circ}(x, x_2) i G_{\nu\mu}^{\circ}(x_2, x_1) i G_{\mu\beta}^{\circ}(x_1, y) \quad (E)$$

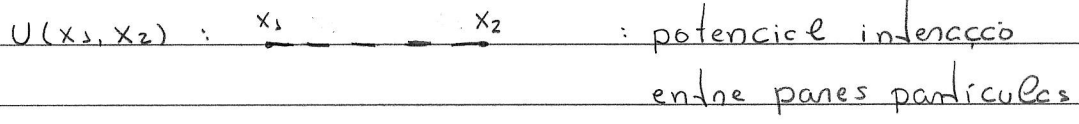
$$+ \frac{i}{2\hbar} U(x_1, x_2) i G_{\mu\mu}^{\circ}(x_1, x_1) i G_{\alpha\nu}^{\circ}(x, x_2) i G_{\nu\beta}^{\circ}(x_2, y) \quad (F)$$

(170.1)

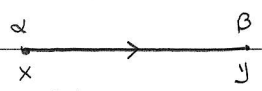
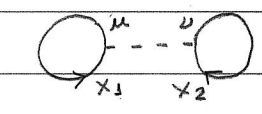
os termos Eq. (170.1) podem ser representados diagramaticamente se considerarmos (notação veja pg. 170.1):



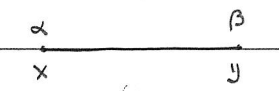
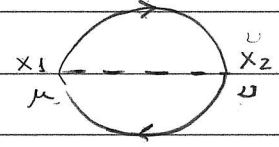
(170.2)



temos que:



(A)



(B)

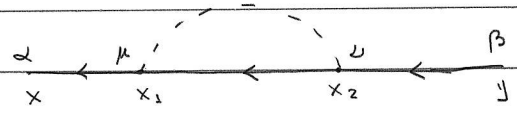
(170.3)

· Obs.: diferentes notações são utilizadas para o propagador partícula livre:

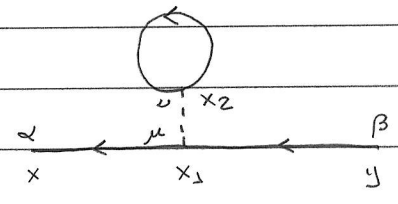
$$iG_{\alpha\beta}^0(x,y) : \begin{array}{c} \alpha \\ \hline \xrightarrow{\hspace{2cm}} \\ \hline \beta \\ \hline x \hspace{10em} y \end{array} : \text{AGD,} \\ \text{Coleman;}$$

ou

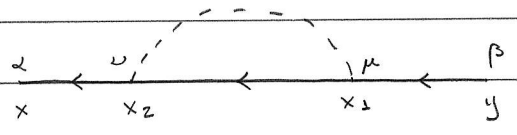
$$iG_{\alpha\beta}^0(x,y) : \begin{array}{c} \alpha \\ \hline \xleftarrow{\hspace{2cm}} \\ \hline \beta \\ \hline x \hspace{10em} y \end{array} : \text{Fetter,} \\ \text{Landau,} \\ \text{Bruus;}$$



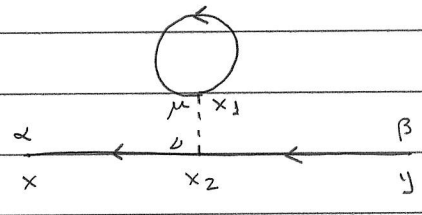
(C)



(D)



(E)



(171.1)

(E)

características da expansão diagramática (170.3) - (171.1):

(i) termos A, D e F apresentam a estrutura:

$$\mu \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ x \end{array} : i G_{\mu\mu}^{\circ}(x, x) : = \text{instantes } t \text{ e } t'$$

associados a contrações entre ops. campo do termo de interação V , i.e.:

$$\overbrace{\psi_{\mu}^{\dagger}(x_1) \psi_{\mu}(x_1)} \quad \underline{=} \quad \overbrace{\psi_{\nu}^{\dagger}(x_2) \psi_{\nu}(x_2)} : \text{veja Eq. (162.2);}$$

dada a ordem dos ops. de campo acima, considere-se

$$\begin{aligned} i G_{\alpha\beta}^{\circ}(x, x) &= \lim_{t' \rightarrow t^+} \langle \Phi_0 | T(\psi_{\alpha}(\vec{n}, t) \psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{n}, t')) | \Phi_0 \rangle \\ &= - \langle \Phi_0 | \psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{n}, t) \psi_{\alpha}(\vec{n}, t) | \Phi_0 \rangle = - \delta_{\alpha\beta} \langle \hat{p}_{\alpha}^{\circ}(\vec{n}) \rangle \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \sum_{\mu} i G_{\mu\mu}(x_1, x_1) = \sum_{\mu} (-1) \langle \hat{p}_{\mu}^{\circ}(\vec{n}_1) \rangle = \frac{N}{V} : \text{veja Eq. (48.2)}$$

///

Blank lined writing area with horizontal lines and three binder holes on the right side.

(ii) os termos C e E são iguais:

como $U(x_1, x_2) = U(x_2, x_1)$

e μ, ν, x_1, x_2 são índices de soma/integração,

a substituição $(\mu, x_1) \rightleftharpoons (\nu, x_2)$ não altera o resultado de soma/integração;

além disso, os termos C e E apresentam o mesmo sinal

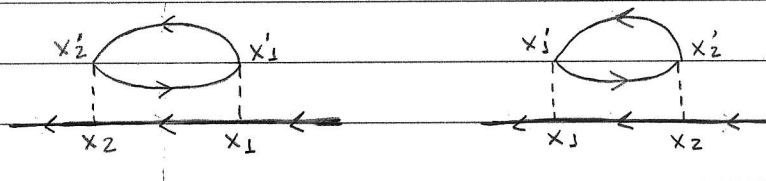
↳ fator $1/2$ em (170.3) é cancelado!

similar p/ termos D e F .

(iii) sobre o fator $1/n!$ na expansão (161.3);

esse fator está presente apenas em termos ordem $n \geq 2$;

considerar, e.g., os diagramas (conectados) de 2ª ordem:



os dois diagramas são iguais as substituições dos seguintes pares de variáveis de integração:

$$x_1 \rightleftharpoons x_2 \quad \text{e} \quad x_1' \rightleftharpoons x_2'$$

não altera o resultado;

p/ termo ordem n , há $n!$ pares de variáveis:

$$U(x_1, x_1') U(x_2, x_2') \dots U(x_n, x_n')$$

↳ $n!$ permutações possíveis dos pares de variáveis;

além disso, $T(\dots)$ permite a mudança ops. de campo

↳ $\frac{1}{n!} \cdot n! = 1.$

(172.3)

(iv) sobre o sinal global e fátos (i/h) :

• Eq. (170.1), termo C :

$$i(\text{II.C}) = \frac{-i}{h} \cdot (i)^3 \rightarrow (\text{II.C}) = \frac{(-i)(-i)(i)^3}{h} = \frac{i}{h} = (-1)^F \left(\frac{i}{h}\right)^1$$

• Eq. (170.1), termo D :

$$i(\text{II.D}) = \frac{+i}{h} \cdot (i)^3 \rightarrow (\text{II.D}) = \frac{(-i)(i)(i)^3}{h} = \frac{-i}{h} = (-1)^F \left(\frac{i}{h}\right)^1$$

onde: F : # propagações livres fechadas ("loops")

tenmos C e E : $F=0$

" D e F : $F=1$

pt diagrama ordem n , excluindo fator $(-1)^F$, temos que:

$$(-i) \left(\frac{-i}{h}\right)^n (i)^{2n+1} = \left(\frac{i}{h}\right)^n \quad (173.1)$$

conexões

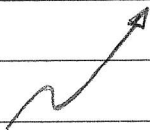
(v) sobre os diagramas conectados e desconectados;

termos A e B : diagramas desconectados

termos C, D, E e F : " conectados

em 1ª ordem, o numerador da expansão (161.1) pode ser escrito como (lembrar termo n=0, Eq. (161.2)) :

$$\left(\uparrow + \uparrow \text{---} \uparrow + \uparrow \text{---} \bigcirc + \uparrow \text{---} \uparrow + \uparrow \text{---} \bigcirc + \dots \right) *$$



$$* \left(1 + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \dots \right)$$

(174.1)

apenas

diagramas

conectados!

$$= \langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle$$

↑ veja pg. 174.1

de fato, Eq. (174.1) é válida p/ todas as ordens de teoria de perturbação (veja pg. 174.1)

↳ Eq. (161.3) assume a forma:

$$i G_{\alpha\beta}(x,y) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n +$$

$$+ \langle \Phi_0 | T [V_I(t_1) \dots V_I(t_n) \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta^+(y)] | \Phi_0 \rangle_{\text{conectados}}$$

(174.2)

↳ diagramas de Feynman de 1ª ordem p/

$G_{\alpha\beta}(x,y)$: diagramas C e D : Eq. (171.1)

• Detalhes Eq. (174.2):

$$\langle \Phi_0 | \hat{S} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | U_I(\infty, 0) U_I(0, -\infty) | \Phi_0 \rangle$$

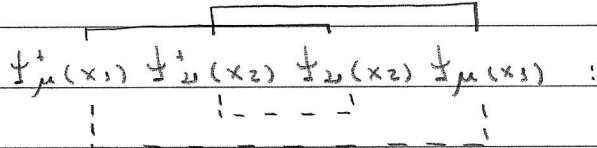
$$= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_n \langle \Phi_0 | T [V_I(t_1) \dots V_I(t_n)] | \Phi_0 \rangle$$

(174.3)

↳ n=0 : $\langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = 1$

n=1 : $-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \langle \Phi_0 | V_I(t_1) | \Phi_0 \rangle$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \Phi_0 | T (\hat{\psi}_\mu^+(x_1) \hat{\psi}_\nu^+(x_2) \psi_\nu(x_2) \psi_\mu(x_1)) | \Phi_0 \rangle$$



: termos A e B Eq. (170.3), excluindo $\begin{matrix} \alpha & \leftarrow & \beta \\ x & & y \end{matrix}$

• caso geral: consideramos termo ordem n numerado Eq. (161.1):
 teorema de Wick → $\langle \Phi_0 | \dots | \Phi_0 \rangle$ pode ser escrito
 como:

$$\langle \Phi_0 | T (V_I(t_1) \dots V_I(t_m) \psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(y)) | \Phi_0 \rangle_{\text{conectados}}^*$$

m termos

$$+ \langle \Phi_0 | T (V_I(t_{m+1}) \dots V_I(t_n)) | \Phi_0 \rangle$$

n - m ≡ p termos

↖ nota ausência "ops. externos" $\psi_\alpha(x)$ e $\psi_\beta^+(y)$

↳ termo ordem n :

$$\sum_{p \geq 0} \sum_{m \geq 0} \delta_{n, p+m} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^{p+m} \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{p!m!}}_{(*)} *$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_m \langle \Phi_0 | T(V_I(t_1) \dots V_I(t_m) \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(y)) | \Phi_0 \rangle_{\text{conec.}}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt_{m+1} \dots dt_n \langle \Phi_0 | T(V_I(t_{m+1}) \dots V_I(t_n)) | \Phi_0 \rangle \quad (174.4)$$

folha (*): # partições entre os termos $V_I(t_i)$ p/ m e p fixos
 c/ $m+p = n$; verificam p/ casos $n=2$ e $n=3$;

↳ numeração Eq. (163.1) = $\sum_{n \geq 0}$ Eq. (174.4):

$$\sum_{m \geq 0} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^m \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots dt_m *$$

$$+ \langle \Phi_0 | T(V_I(t_1) \dots V_I(t_m) \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(y)) | \Phi_0 \rangle_{\text{conectados}} +$$

$$+ \sum_{p \geq 0} \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^p \frac{1}{p!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_{m+1} \dots dt_{m+p} *$$

p termos $\hookrightarrow dt_1 \dots dt_p$

$$+ \langle \Phi_0 | T(V_I(t_1) \dots V_I(t_p)) | \Phi_0 \rangle \quad (174.5)$$

Regras para determinação de diagramas de Feynman de ordem n no espaço de coordenadas:

(1) desenhar todos os diagramas conectados e topologicamente distintos com n linhas de interação

e $2n+1$ propagações livres \leftarrow ;

(2) associar ao polo inicial as variáveis $y, \beta,$

" " " final " " x, α

e " aos $2n$ vértices (internos) " " $(x_1, \mu), (x_2, \nu), \dots$;

(3) cada linha contínua $\begin{array}{c} \alpha \\ \leftarrow \\ x \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ \leftarrow \\ y \end{array}$ corresponde ao

propagador livre $G_{\alpha\beta}^0(x, y)$;

(4) cada linha tracejada $\begin{array}{c} \text{---} \\ x_1 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ x_2 \end{array}$ corresponde ao

potencial $V(x_1, x_2) = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$; veja Eq. (162.2);

(5) integrar sob os índices (internos) x_1, x_2, \dots, x_{2n}

e somar " " " " μ, ν, \dots ;

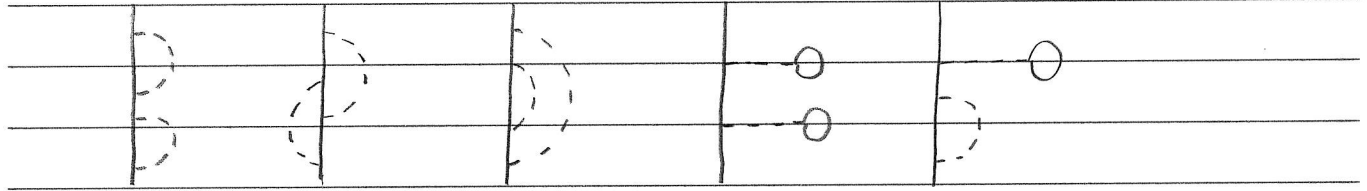
(6) multiplicar pelo fator $(-1)^F (i/\hbar)^n$,

onde F : # propagações livres fechadas e

(7) funções de Green com variáveis temporais iguais devem ser interpretadas como:

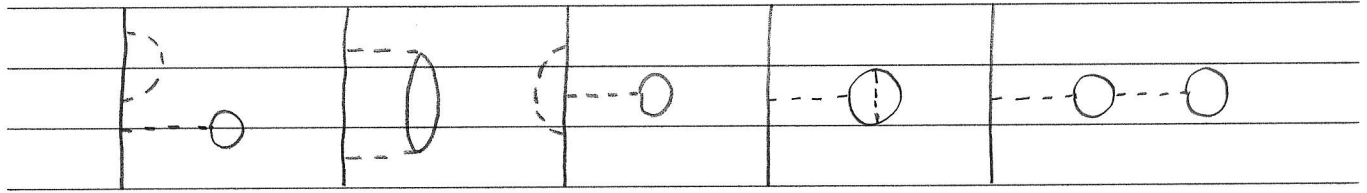
$$G_{\alpha\beta}^0(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$$

Exercício: verifique que os 10 diagramas de 2ª ordem são dados por:



(1) (2) (3) (4) (5)

(176.1)



(6) (7) (8) (9) (10)

Obs.:

• diagramas : 5, 6, 7, 8, 9 : presença 1 loop : $(-1)^F = -1$;

• " : 4 e 10 : " 2 loops : $(-1)^F = +1$

• " : 3 e 6 : topologicamente distintos!

(2) Diagramas de Feynman no espaço de momentos;

pt sistemas homogêneos, é interessante considerar os diagramas de Feynman no espaço de momentos; nesse caso:

$$G_{\alpha\beta}(x, y) = G_{\alpha\beta}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G_{\alpha\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = G_{\alpha\beta}(x - y);$$

: Eq. (127.1)

além disso, pt sistemas isotrópicos w.r.t. índice spin, podemos considerar:

$$G_{\alpha\beta}(x - y) = \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}(x - y); \text{ Eq. (128.1)}$$

é interessante escrever a Eq. (131.1) como:

$$G_{\alpha\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \int \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')} G_{\alpha\beta}(\vec{k}, \omega)$$

$$\hookrightarrow G_{\alpha\beta}(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i\vec{k} \cdot (x - y)} G_{\alpha\beta}(k)$$

$$\text{onde } k = (\vec{k}, \omega) \text{ e } k \cdot x = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \quad (177.1)$$

$$\text{e } G_{\alpha\beta}(k) = \int d^4x e^{-i\vec{k} \cdot x} G_{\alpha\beta}(x)$$

hipótese: potencial interação $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$;

$$\hookrightarrow \text{Eq. (162.2)}: U(x_1, x_2) = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2)$$

$$\hookrightarrow U(x_1 - x_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(t_1 - t_2); \quad (177.2)$$

temos que:

$$U(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} U(k) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} v(\vec{k}) \underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}}_{\delta(t)}$$

(178.1)

$$\underline{=} U(k) = \int d^4 x e^{-ik \cdot x} U(x) = \underbrace{\int d^3 \vec{n} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{n}} v(\vec{n})}_{v(\vec{k})} \underbrace{\int dt \delta(t)}_1 = v(\vec{k})$$

considerar, e.g., a transformação para o espaço de momentos do termo \underline{c} , Eq. (170.1):

$$G_{\alpha\beta}^{(1,c)}(x,y) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\mu\nu} \int d^4 x_1 d^4 x_2 U(x_1 - x_2) +$$

$$+ G_{\alpha\mu}^0(x-x_1) G_{\mu\nu}^0(x_1-x_2) G_{\nu\beta}^0(x_2-y)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \sum_{\mu\nu} \int \frac{d^4 q d^4 p d^4 p' d^4 k}{(2\pi)^{16}} +$$

$$\underbrace{* \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{iq \cdot (x_1 - x_2)} e^{ip \cdot (x - x_1)} e^{ip' \cdot (x_1 - x_2)} e^{ik \cdot (x_2 - y)} +}_{(I)}$$

$$* U(q) G_{\alpha\mu}^0(p) G_{\mu\nu}^0(p') G_{\nu\beta}^0(k)$$

como:

$$(I) = e^{ip \cdot x - ik \cdot y} \underbrace{\int d^4 x_1 e^{ix_1 \cdot (q - p + p')}}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p + p')} \underbrace{\int d^4 x_2 e^{-ix_2 \cdot (q + p' - k)}}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + p' - k)}$$

$$\hookrightarrow G_{\alpha\beta}^{(1.c)}(x-y) = \frac{i}{\hbar} \int_{\mu\nu} \int \frac{d^4 q d^4 k}{(2\pi)^8} e^{iK \cdot (x-y)} U(q) G_{\alpha\mu}^0(k) G_{\mu\nu}^0(k-q) G_{\nu\beta}^0(k)$$

$$q \rightarrow -q + k$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{iK \cdot (x-y)} \left(\frac{i}{\hbar} \int_{\mu\nu} G_{\alpha\mu}^0(k) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} U(k-q) G_{\mu\nu}^0(q) G_{\nu\beta}^0(k) \right) \equiv G_{\alpha\beta}(k) \quad (179.1)$$

em particular, se $G_{\alpha\beta}^0(k) = \delta_{\alpha\beta} G^0(k)$

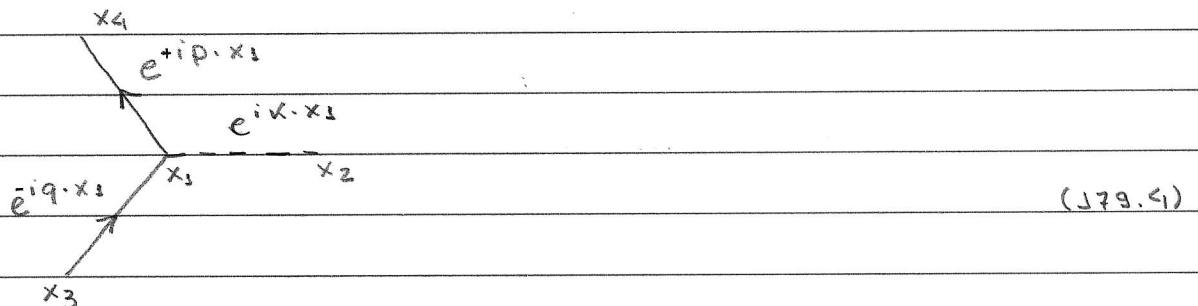
$$\hookrightarrow G_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta} \frac{i}{\hbar} (G^0(k))^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} U(k-q) G^0(q) \quad (179.2)$$

caso geral: diagrama ordem n;

nesse caso, é interessante introduzir um sentido pr a linha de interação:

$$U(x_1 - x_2) = \text{---} \quad (179.3)$$

um vértice interno de um diagrama aninhado apresenta a forma:



notas: $\text{---} : U(x_1 - x_2) \sim e^{ik \cdot (x_1 - x_2)}$

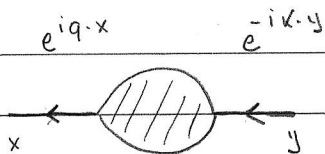
$\leftarrow : G^0(x_1 - x_3) \sim e^{iq \cdot (x_1 - x_3)}$

$\leftarrow : G^0(x_4 - x_1) \sim e^{ip \cdot (x_4 - x_1)}$

Como x_3 : pto interno digrama, há uma integração sob essa variável

$$\hookrightarrow \int d^4 x_3 e^{i x_3 \cdot (k+q-p)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+q-p) : \text{conservação momento no vértice!} \quad (180.1)$$

• pto's externos x e y : como a estrutura de um digrama arbitrário é dada por:



(180.2)

⊕ invariância translacional $\rightarrow k=q$: veja, e.g., presença foton $e^{iK \cdot (x-y)}$ na Eq. (179.1)

\hookrightarrow as considerações acima permitem estabelecer o equivalente das regras (175.1) p/ o espaço de momentos:

Regras pr determinação diagramas de Feynman de ordem n no espaço de momentos:

(1) desenhar todos os diagramas conectados e topologicamente distintos c/ n linhas de interação \dashrightarrow

$\underline{=}$ " $2n+1$ propagações livres \longrightarrow ;

(2) associar um sentido a cada linha;

" " quônto-momento (e índice de spin) a cada propagação;

" " quônto-momento a cada linha de interação;

observar a conservação do 4-momento em cada vértice;

(3) cada linha contínua $\xleftarrow{\beta}$ $\xrightarrow{\alpha}$ corresponde ao propagador livre $G_{\alpha\beta}^0(k) = G_{\alpha\beta}^0(\vec{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} G^0(\vec{k}, \omega)$: Eq. (134.3)

(4) cada linha tracejada \dashrightarrow^q corresponde ao potencial $U(q) = V(\vec{q})$: Eq. (178.1);

(5) integrar sob os momentos (internos) q_1, q_2, \dots, q_n

$\underline{=}$ somar " " " " " " μ, ν, \dots

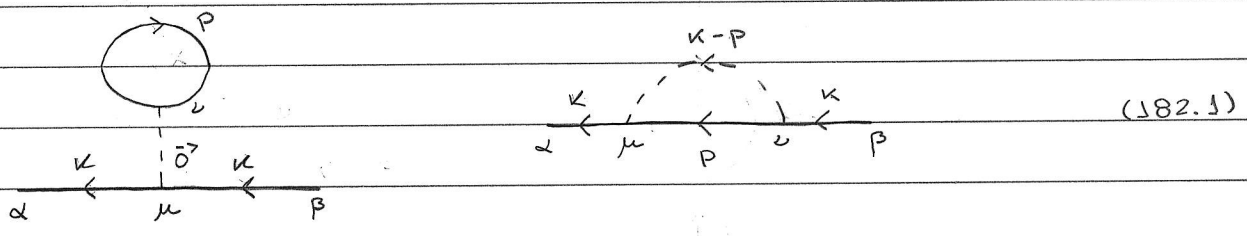
(6) multiplicar pelo fator $\frac{1}{(2\pi)^{4n}} (-i)^F \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n$,

onde F : # propagações livres fechadas $\underline{=}$

(7) pr propagações livres associados a índices temporais iguais (loops ou aqueles c/ pontos inicial e final conectados por uma linha de interação) multiplicar pelo fator $e^{i\omega\eta}$, $\eta \rightarrow 0^+$: veja Eq. (133.4)

(181.1)

Ex.: termos 1ª ordem p/ a função de Green;
os diagramas conectados e topologicamente distintos
são similares aos diagramas C e D, Eq. (171.1):



negros (181.1):

$$G_{\alpha\beta}^{(1)}(k) = \frac{-i}{\hbar} \sum_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} U(0) G_{\alpha\mu}^0(k) G_{\nu\nu}^0(p) G_{\mu\beta}^0(k)$$

$$+ \frac{i}{\hbar} \sum_{\mu\nu} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} U(k-p) G_{\alpha\mu}^0(k) G_{\mu\nu}^0(p) G_{\nu\beta}^0(k)$$

considerando: $k = (\vec{k}, \omega)$, $p = (\vec{p}, \omega)$ e $G_{\alpha\beta}^0(k) = \delta_{\alpha\beta} G^0(k)$

$$\hookrightarrow G_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{k}, \omega) = \frac{-i}{\hbar} \delta_{\alpha\beta} (G^0(\vec{k}, \omega))^2 \underbrace{\int \frac{d^3 p d\omega'}{(2\pi)^4} 2U(0) G^0(\vec{p}, \omega') e^{i\omega'\tau}}_{(1)}$$

$$+ \frac{i}{\hbar} \delta_{\alpha\beta} (G^0(\vec{k}, \omega))^2 \int \frac{d^3 p d\omega'}{(2\pi)^4} v(\vec{k}-\vec{p}) G^0(\vec{p}, \omega') e^{i\omega'\tau} \quad (182.2)$$

Como:

$$N = \langle \hat{N} \rangle = -2i\sqrt{v} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega'}{2\pi} G^0(\vec{p}, \omega') e^{i\omega'\tau} \quad ; \text{Eq. (135.1)}$$

$$\text{Eq. (135.2)} \quad \stackrel{?}{=} i\theta(k_F - p)$$

$$\hookrightarrow (1) = U(0) \frac{iN}{v} = iN U(0)$$

$$\hookrightarrow G_{\alpha\beta}^{(1)}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\hbar} \delta_{\alpha\beta} \left(G^0(\vec{k}, \omega) \right)^2 + \left(nU(0) - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} v(\vec{k}-\vec{p}) \theta(k_F - p) \right)$$

(183.1)

Obs.: p/ gás de elétrons degenerado (Ex. 2, pg. 49), o primeiro termo Eq. (183.1) deve ser desconsiderado devido ao "background" de cargas positivas.


• Autoenergia e equação de Dyson:

Eq. (180.2): indica que a função de Green exata pode ser escrita como:

$$G(k) = G^0(k) + G^0(k) \bar{\Sigma}(k) G^0(k) \tag{183.2}$$

↑ autoenergia
 ↑ contribuição ordem-zero: função de Green não-interagente

ou diagramaticamente:

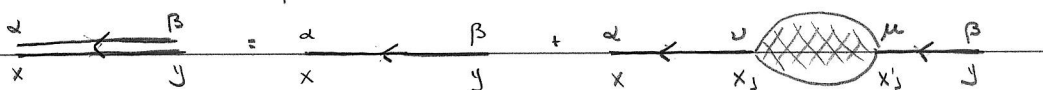


$$\text{---} \leftarrow \text{---} = \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \tag{183.3}$$

comparando Eqs. (183.1) e (183.2), temos que:

$$\hbar \bar{\Sigma}^{(1)}(k) = \hbar \bar{\Sigma}^{(1)}(\vec{k}) = nU(0) - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} v(\vec{k}-\vec{p}) \theta(k_F - p) \tag{183.4}$$

• Em detalhes: no espaço de coordenadas, Eq. (183.3) assume a forma:



$$\text{---} \leftarrow \text{---} = \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \tag{184.4}$$

ou $G_{\alpha\beta}(x,y) = G_{\alpha\beta}^{\circ}(x,y) +$ autoenergia

$$+ \int d^4x_s d^4x'_s G_{\alpha\nu}^{\circ}(x,x_s) \tilde{\Sigma}_{\nu\mu}(x_s,x'_s) G_{\mu\beta}^{\circ}(x'_s,y) \quad (184.1)$$

Obs.: notação: soma sob índices repetidos μ e ν

Definição: inserção de autoenergia: parte de um diagrama de Feynman que é conectada ao resto do diagrama via 2 propagadores;

2 tipos: (184.2)

(i) própria: inserção de autoenergia que não pode ser separada em duas partes via cont um dos propagadores;

Ex.: Eq. (182.1):

Eq. (176.1):

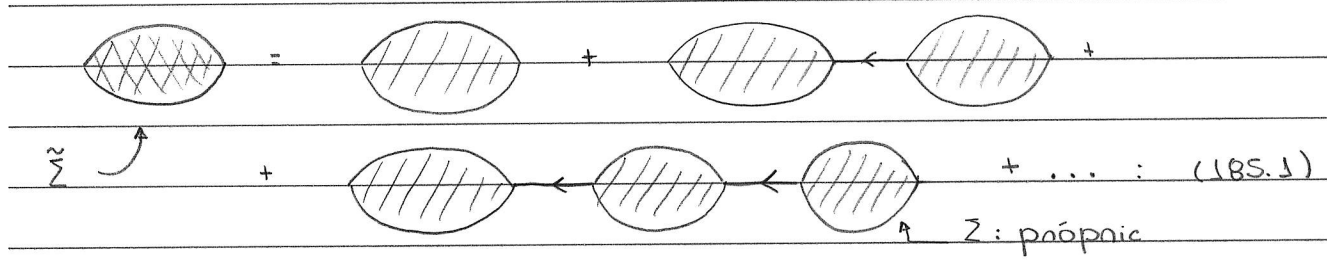
(ii) imprópria: " " " " pode " " " " via cont " " " ;

Ex.: Eq. (176.1):

Eq. (184.1): autoenergia $\tilde{\Sigma}$ = soma todas inserções de autoenergia (próprias e impróprias);

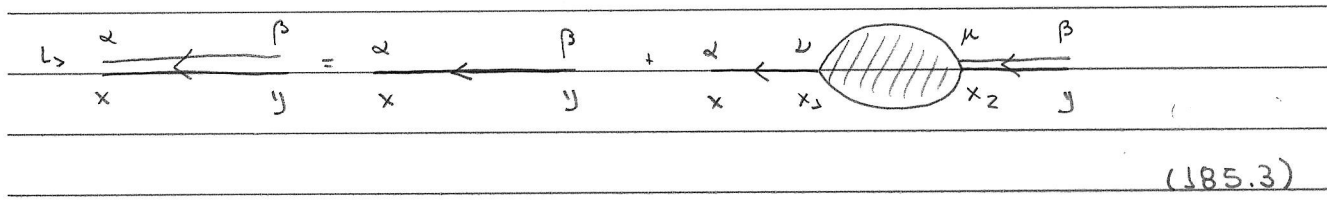
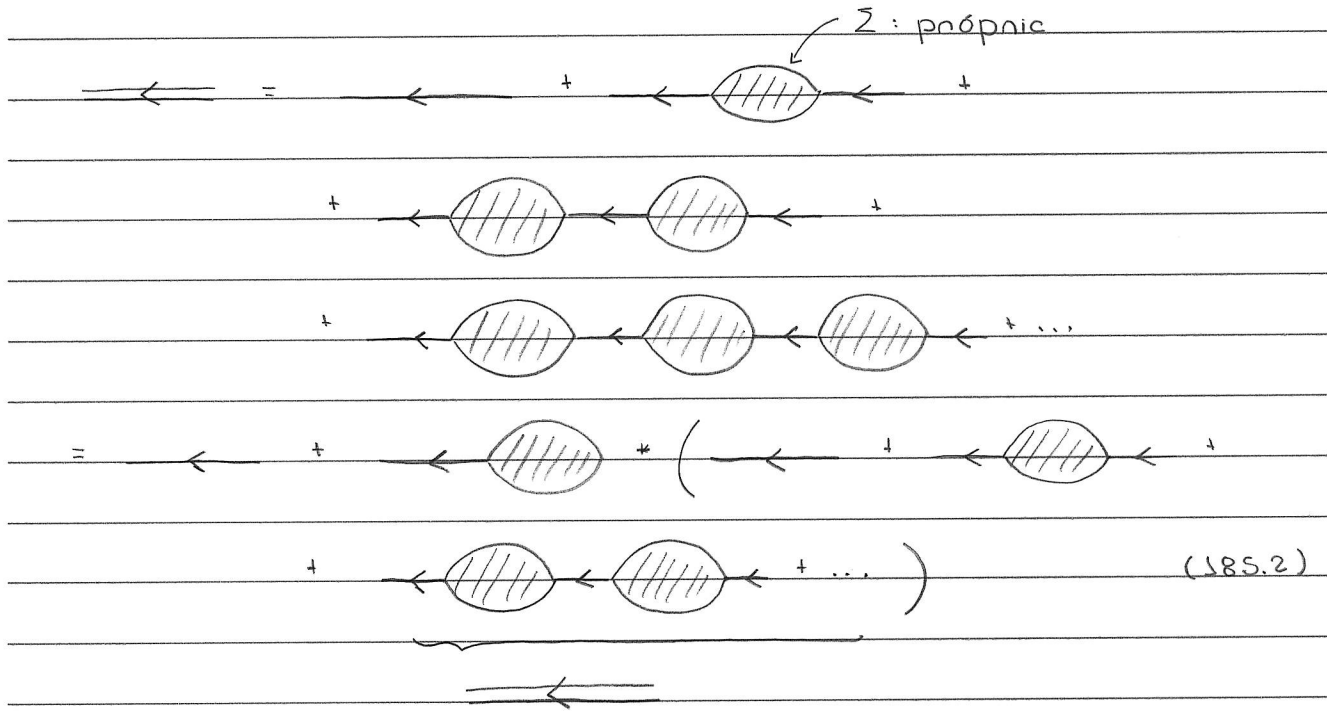
Definição: $\tilde{\Sigma}_{\alpha\beta}(x,y)$: autoenergia (própria): soma todas as autoenergias próprias (184.3)

temos que:



: relação entre autoenergia $\tilde{\Sigma}_{\mu\nu}(x,y)$
 e " próprio $\tilde{\Sigma}_{\mu\nu}(x,y)$

• Eqs. (183.4) e (185.1):



ou $G_{\alpha\beta}(x,y) = G_{\alpha\beta}^0(x,y) +$

$\int d^4x_1 d^4x_2 G_{\alpha\mu}^0(x,x_1) \tilde{\Sigma}_{\nu\mu}(x_1,x_2) G_{\mu\beta}(x_2,y) ;$

: Eq. de Dyson

o sistema homogêneo, é interessante considerarmos a Eq. de Dyson no espaço de momento;

Como:

$$\Sigma_{\alpha\beta}(x,y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i k \cdot (x-y)} \Sigma_{\alpha\beta}(k) \quad (186.1)$$

e Eq. (177.1), temos que:

$$G_{\alpha\beta}(k) = G_{\alpha\beta}^0(k) + G_{\alpha\nu}^0(k) \Sigma_{\nu\mu}(k) G_{\mu\beta}(k) \quad (186.2)$$

ou $\alpha \leftarrow \beta = \alpha \leftarrow \beta + \alpha \leftarrow \nu \text{ (circulo hachurado)} \leftarrow \mu \leftarrow \beta$: Eq. de Dyson

em particular, se $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} G$; $G_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta} G^0$ e $\Sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \Sigma$, temos que:

$$G(k) = G^0(k) + G^0(k) \Sigma(k) G(k) \quad (186.3)$$

como (186.3) é uma eq. algébrica, temos que:

$$G(k) = \frac{1}{(G^0(k))^{-1} - \Sigma(k)} \quad (186.4)$$

como: $(G^0(k))^{-1} = (G^0(\vec{x}, \omega))^{-1} = \omega - E_{\vec{x}}^0 / \hbar$: Eq. (134.3)

$$\hookrightarrow G(k) = G(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\omega - E_{\vec{x}}^0 / \hbar - \Sigma(\vec{x}, \omega)} \quad (186.5)$$

: função de Green exata em termos autoenergias (próprias)

\hookrightarrow se autoenergia $\Sigma(\vec{x}, \omega)$ for determinada

\hookrightarrow função de Green exata " !

Ex. 1: autoenergia (própria) em 1ª ordem:

Eq. (182.1): $\Sigma^{(1)}(\kappa) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$ (187.1)

Ex. 2: autoenergia (própria) em 2ª ordem:

Eq. (176.1): $\Sigma^{(2)}(\kappa) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6}$ (187.2)

hipótese: $\Sigma(\kappa) \approx \Sigma^{(1)}(\kappa)$;

↳ Eq. (186.2): $\text{diagram 1} = \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \text{diagram 9} + \text{diagram 10}$ (187.3)

+ ... : série p/ função de Green determinada via aproximação $\Sigma(\kappa) \approx \Sigma^{(1)}(\kappa)$!

nesse caso, os polos da função de Green independente são dados por:

$$E^{(1)}(\vec{k}) = \hbar\omega = E^0_{\vec{k}} + \hbar Z^{(1)}(\vec{k})$$

$$\stackrel{\text{Eq. (183.4)}}{=} E^0_{\vec{k}} + nU(0) - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} V(\vec{k}-\vec{p}) \Theta(k_F - p) \in \mathbb{R} : \quad (188.1)$$

i energia quasipartícula:

veja pg. 150.

· caso geral:

lembrar pg. 150: polos da função de Green: energia estados excitados do sistema;

$$\text{considerar: } Z(\vec{k}, \omega) = Z'(\vec{k}, \omega) + i\Gamma(\vec{k}, \omega) ; \quad Z'(\vec{k}, \omega) \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma(\vec{k}, \omega) \in \mathbb{R} \quad (188.2)$$

$$\text{Eq. (186.5): } (\hbar = 1):$$

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - E^0_{\vec{k}} - Z'(\vec{k}, \omega) - i\Gamma(\vec{k}, \omega)} \quad (188.3)$$

$$\text{se polo: } \omega = \tilde{E}(\vec{k}) - i\Gamma_{\vec{k}}$$

$$\hookrightarrow \tilde{E}(\vec{k}) - E^0_{\vec{k}} - Z'(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k}) - i\Gamma_{\vec{k}}) = 0$$

$$(188.4)$$

$$\stackrel{e}{=} \Gamma_{\vec{k}} = -\Gamma(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k}) - i\Gamma_{\vec{k}})$$

· hipótese: $\Gamma_{\vec{k}} \ll \tilde{E}(\vec{k})$

$$\hookrightarrow \tilde{E}(\vec{k}) - E^0_{\vec{k}} - Z'(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k})) = 0$$

$$(188.5)$$

$$\stackrel{e}{=} \Gamma_{\vec{k}} = -\Gamma(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k}))$$

• consideramos: expansão $G(\vec{k}, \omega)$ p/ $\omega \sim \tilde{E}(\vec{k})$;

como $Z'(\vec{k}, \omega) = Z'(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k})) + (\omega - \tilde{E}(\vec{k})) \partial_{\omega} Z'(\vec{k}, \omega) \Big|_{\omega = \tilde{E}(\vec{k})}$

$\hookrightarrow \omega - E_{\vec{k}}^0 - Z'(\vec{k}, \omega) \approx \omega - (E_{\vec{k}}^0 + Z'(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k})))$

$\underbrace{\tilde{E}(\vec{k})}_{\tilde{E}(\vec{k})} - (\omega - \tilde{E}(\vec{k})) \partial_{\omega} Z'(\vec{k}, \omega) \Big|_{\omega = \tilde{E}(\vec{k})}$

$= (\omega - \tilde{E}(\vec{k})) \underbrace{\left(1 - \partial_{\omega} Z'(\vec{k}, \omega) \Big|_{\omega = \tilde{E}(\vec{k})} \right)}_{\equiv Z_{\vec{k}}^{-1}} \tag{189.1}$

\hookrightarrow Eq. (188.3) :

$G(\vec{k}, \omega) \approx \frac{1}{(\omega - \tilde{E}(\vec{k})) Z_{\vec{k}}^{-1} - i \Gamma(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k}))}$

$= \frac{Z_{\vec{k}}}{\omega - \tilde{E}(\vec{k}) - i Z_{\vec{k}} \Gamma(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k}))} \tag{189.2}$

: $\tilde{E}(\vec{k}) = E_{\vec{k}}^0 + Z'(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k}))$: energia (nenormalizada) quasipartícula

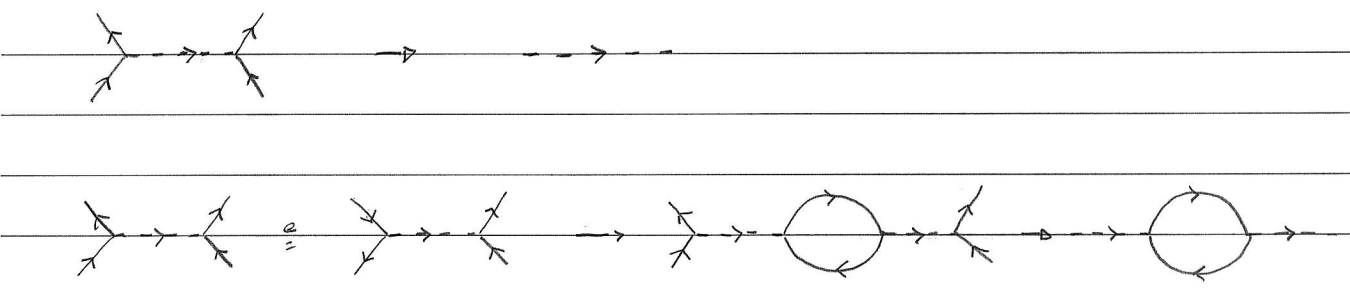
$\Gamma_{\vec{k}} = -Z_{\vec{k}} \Gamma(\vec{k}, \tilde{E}(\vec{k}))$: amortecimento

$Z_{\vec{k}}$: peso quasipartícula : veja pgs. 150 e 151 !

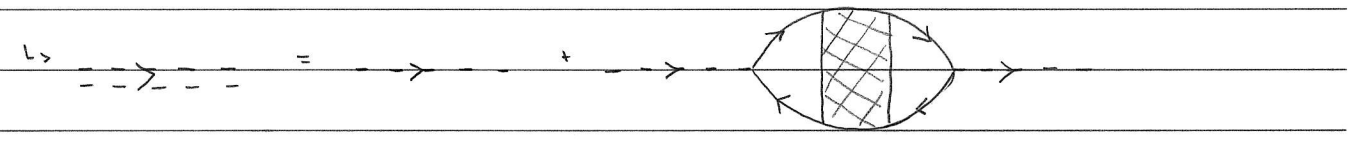
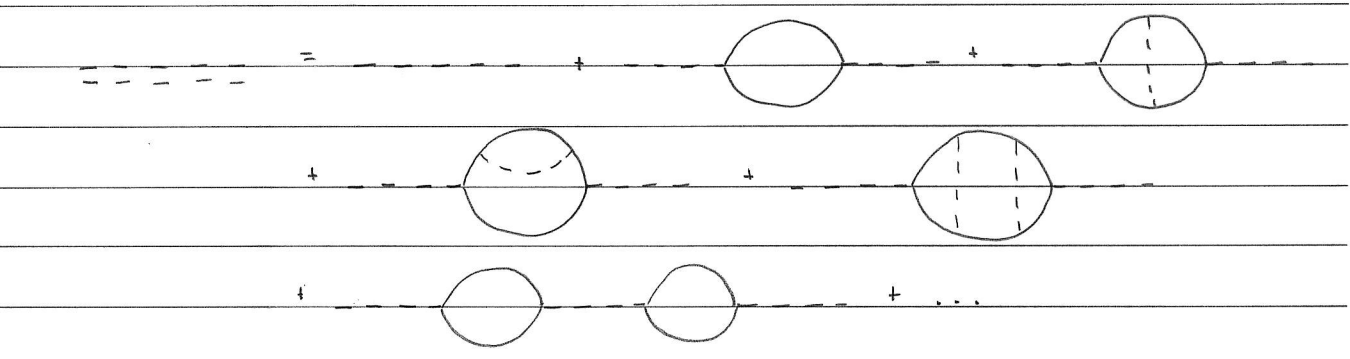
• Inserção de polarização;

ideia: analisar o termo de interação entre duas partículas de modo análogo ao procedimento utilizado p/ a função de Green exacta/autoenergia;

notas:



↳ similar à Eq. (183.3), temos que:



$$\text{ou } U^R(q) = U(q) + U(q) \tilde{\Pi}(q) U(q) \tag{190.1}$$

onde: $U^R(q)$: potencial interação renormalizado;

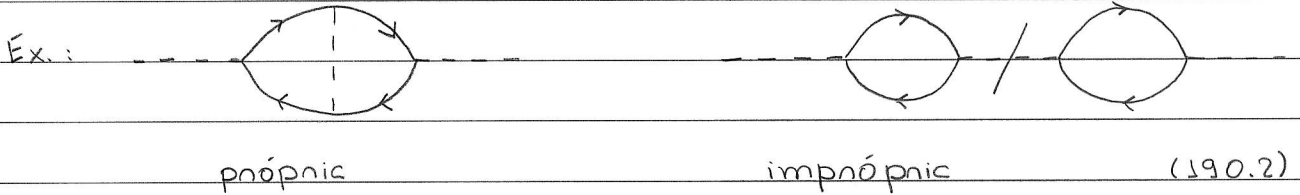
$U(q)$: " " original ("bare")

$\tilde{\Pi}(q)$: inserção de polarização: equivalente $\tilde{\Sigma}(k)$ p/ $G(k)$

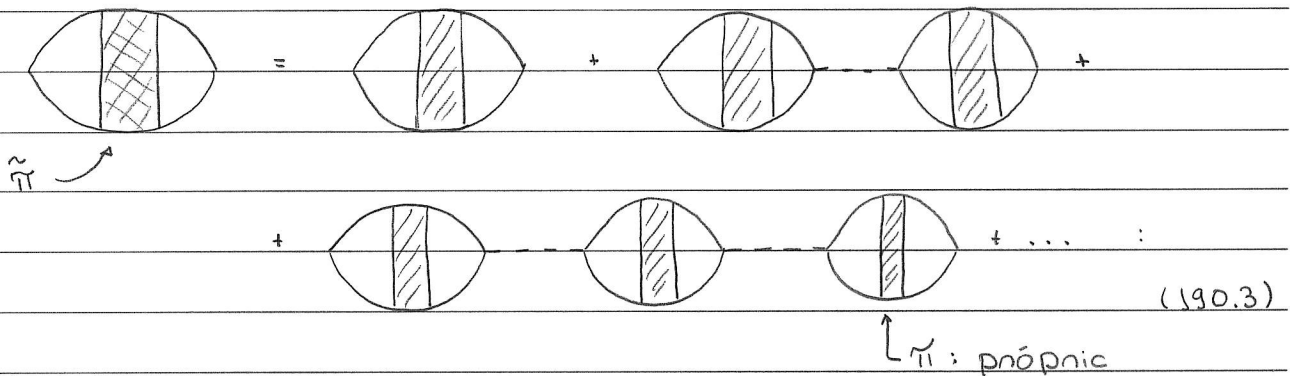
• similar autenergic, podemos considerar 2 tipos de inserção de polarização:

(i) própria: inserção de polarização que não pode ser separada em duas partes via corte de uma linha de interação e

(ii) imprópria: " " " " pode " "
" " " " via corte " "
" " " ;

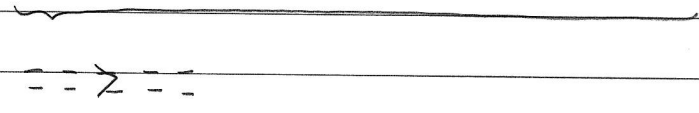
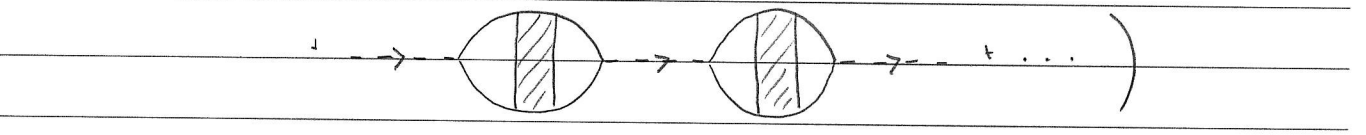
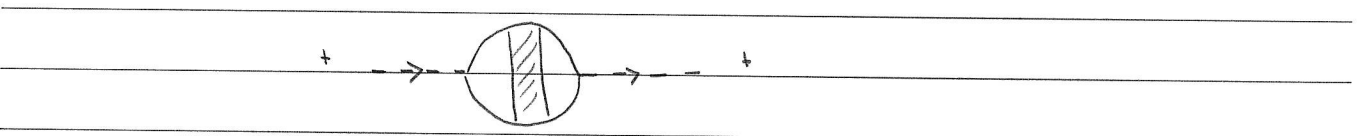
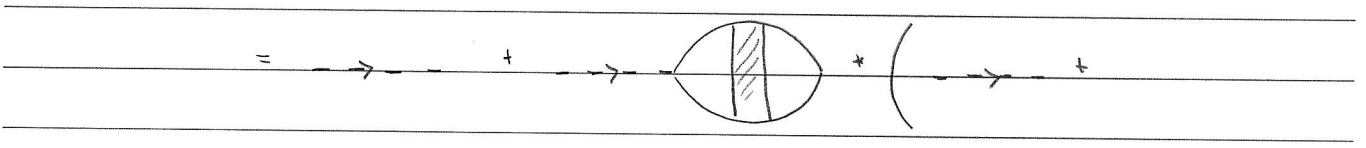
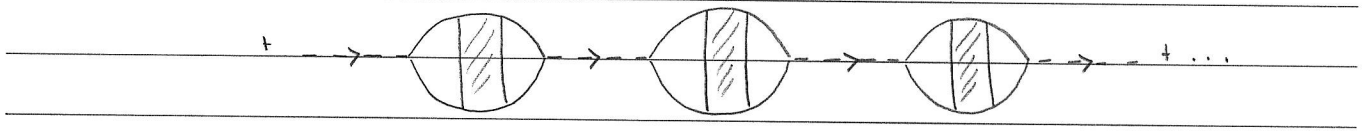
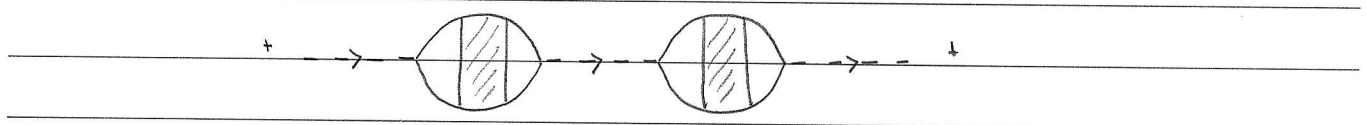
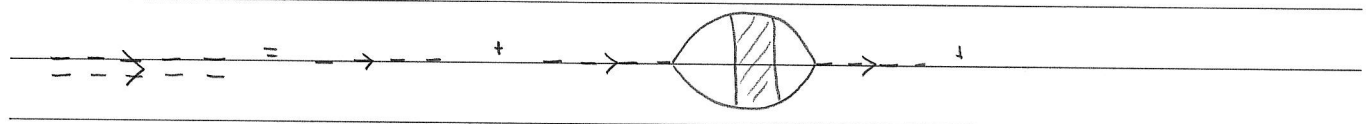


↳ similar Eq. (185.1):



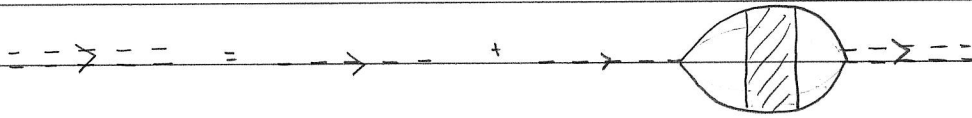
: relação entre inserção de polarização (total) $\tilde{\pi}(q)$
e " " " própria $\pi(q)$

• Eqs. (190.1) e (190.3): similar Eq. (185.2), temos que:



(190,4)

↳ equivalente Eq. (185.3):



$$U^R(q) = U(q) + U(q)\pi(q)U^R(q) \quad (191.1)$$

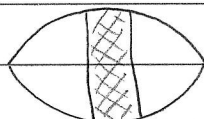
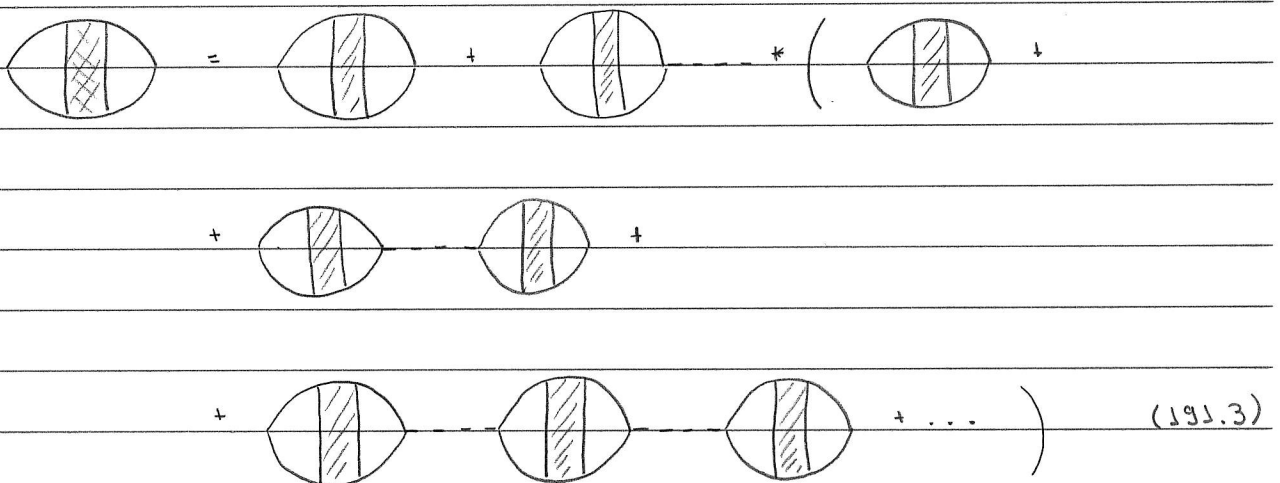
onde: $\pi(q)$: polarização (total) própria

como Eq. (191.1): eq. algébrica, temos que:

$$U^R(q) = \frac{U(q)}{1 - U(q)\pi(q)} = \frac{U(q)}{E(q)} \quad (191.2)$$

onde $E(q) = 1 - U(q)\pi(q)$: função dieletrica generalizada

· notas: similar Eq. (190.4), Eq. (190.3) pode ser escrita como:



$$\underline{0u} \quad \tilde{\pi}(q) = \pi(q) + \pi(q) U(q) \tilde{\pi}(q)$$

$$\hookrightarrow \tilde{\pi}(q) = \frac{\pi(q)}{1 - \pi(q) U(q)} \quad (191.4)$$