

Resposta linear,

Refs.: Secs. 13-16, Fetter and Walecka

Sec. 5.5, Mahon

Secs. 14.4 e 14.5, Bruus

· vimos que: polos da função de Green de 1 partícula

↳ determinação do espectro de excitação do sistema na presença / ausência partícula adicional
w.r.t. estado fundamental: excitações do tipo quasipartículas;

· próxima etapa: determinação do espectro de excitações "neutras",
i.e. estados excitados cujo # partículas =
partículas estado fundamental: excitações do tipo modos coletivos;

· modos coletivos ~ ops. que preservam # partículas do sistema,
e.g., op. densidade de partículas;

" " " spins;

: esses ops. estão relacionados à resposta do sistema e certas perturbações externas, tais como:

campos $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{B}(\vec{r})$,

radiação EM,

deformações elásticas, etc;

em particular, p/ uma perturbação externa focada, podemos considerar a resposta do sistema em 1ª ordem (linear) no termo perturbativo.

resposta linear: formulação genl.

considerar: sistema interagente cujo hamiltoniano $H \neq H(t)$;
temos que:

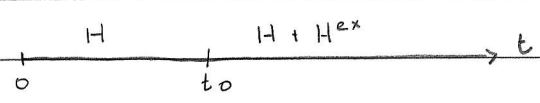
$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_s(t)\rangle = H |\psi_s(t)\rangle$$

: estado do sistema, versão

$$\hookrightarrow |\psi_s(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi_s(0)\rangle \quad \text{de Schrödinger} \quad (218.1)$$

hipótese: perturbação externa, dependente do tempo, atua sob sistema p/ $t \geq t_0$, i.e.,

$$H^{ex}(t) \neq 0, \quad p/ \quad t \geq t_0 \quad (218.2)$$



se $|\tilde{\psi}_s(t)\rangle$: estado do sistema p/ $t \geq t_0$, temos que:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}_s(t)\rangle = (H + H^{ex}(t)) |\tilde{\psi}_s(t)\rangle, \quad (218.3)$$

$$\text{hipótese: } |\tilde{\psi}_s(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} \hat{U}(t) |\psi_s(0)\rangle$$

(218.4)

$\hat{U}(t) = 1$, p/ $0 \leq t < t_0$: condição de contorno (causal)

$$\hookrightarrow i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}_s(t)\rangle = i\hbar \left(\frac{-iH}{\hbar} \right) |\tilde{\psi}_s(t)\rangle + e^{-iHt/\hbar} \left(i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} \right) |\psi_s(0)\rangle$$

$$\text{Eq. (218.3)} \quad \Downarrow \quad = (H + H^{ex}(t)) |\tilde{\psi}_s(t)\rangle$$

$$\hookrightarrow i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} |\psi_s(0)\rangle = e^{iHt/\hbar} H^{ex}(t) e^{-iHt/\hbar} \hat{U}(t) |\psi_s(0)\rangle$$

$H_H^{ex}(t)$: veja Eq. (124.3)

↳ $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = H_H^{ex}(t) \hat{U}(t)$: eq. de movimento op. $\hat{U}(t)$

(219.1)

⊕ c.c. : $\hat{U}(t) = 1$, p/ $0 \leq t \leq t_0$

notas: $H_H^{ex}(t)$: $H^{ex}(t)$ na versão de Heisenberg, considerando H p/ sistema interagente, porém na ausência de $H^{ex}(t)$.

notas: similaridade Eq. (219.1) c/ eq. de movimento (154.2)

↳ solução formal Eq. (219.1):

$$\hat{U}(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_H^{ex}(t') \hat{U}(t')$$

(219.2)

iterando a eq. acima, vemos que, veja Eq. (155.2):

$$\hat{U}(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_H^{ex}(t') + \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_H^{ex}(t_1) H_H^{ex}(t_2) + \dots$$

↳ em primeira ordem, o estado do sistema é dado por:

$$|\bar{\psi}_s(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |\psi_s(0)\rangle - \frac{i}{\hbar} e^{iHt/\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_H^{ex}(t') |\psi_s(0)\rangle$$

(219.3)

· consideramos: elementos de matriz, op. arbitrária $\hat{B}_s(t)$:

$$\langle \bar{\psi}'_s(t) | \hat{B}_s(t) | \bar{\psi}_s(t) \rangle = \langle \hat{B}_s(t) \rangle$$

$$= \langle \psi'_s(0) | \hat{U}^\dagger(t) e^{iHt/\hbar} \hat{B}_s(t) e^{-iHt/\hbar} \hat{U}(t) | \psi_s(0) \rangle$$

$$\hat{B}_H(t)$$

$$= \langle \psi'_S(0) | \left(1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_H^{ex}(t') \right) \hat{B}_H(t) \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_H^{ex}(t') \right) | \psi_S(0) \rangle$$

$$= \langle \psi'_S(0) | \hat{B}_H(t) | \psi_S(0) \rangle +$$

$$\underbrace{\langle \psi'_H |}_{\langle \psi'_H |} \underbrace{| \psi_H \rangle}_{| \psi_H \rangle} : \text{Eq. (124.2)}$$

$$+ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \langle \psi'_H | [H_H^{ex}(t'); \hat{B}_H(t)] | \psi_H \rangle + O((H^{ex})^2) \quad (220.1)$$

· hipótese: $|\psi_H\rangle = |\psi'_H\rangle = |\psi_0\rangle$: estado fundamental sistema interagente, descrito pelo hamiltoniano H ;

$$\hookrightarrow \delta \langle \hat{B}(t) \rangle \equiv \underbrace{\langle \psi_S(t) | \hat{B}_S(t) | \psi_S(t) \rangle}_{\langle \hat{B}_S(t) \rangle} - \underbrace{\langle \psi_0 | \hat{B}_H(t) | \psi_0 \rangle}_{\langle \hat{B}_H(t) \rangle_0}$$

$$= \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \langle \psi_0 | [H_H^{ex}(t'); \hat{B}_H(t)] | \psi_0 \rangle : \quad (220.2)$$

: resposta linear do (estado fundamental) sistema à perturbação externa $H^{ex}(t)$!

$$\cdot \text{ hipótese: } H^{ex}(t) = \varphi(t) \hat{A} \rightarrow H_H^{ex}(t) = \varphi(t) \hat{A}_H(t), \quad (220.3)$$

$$\text{onde } \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \neq 0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \delta \langle \hat{B}(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \varphi(t') \langle \psi_0 | [\hat{A}_H(t'); \hat{B}_H(t)] | \psi_0 \rangle; \quad (220.4)$$

como $\varphi(t) = 0$ p/ $t < t_0$, podemos reescrever a eq. acima

como:

$$\delta \langle \hat{B}(t) \rangle = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{1}{\hbar} \varphi(t') \theta(t-t') \langle \psi_0 | [\hat{B}_H(t); \hat{A}_H(t')] | \psi_0 \rangle \quad (221.1)$$

Definiç o : funç o de correlaç o retardada (veja pg. 148) :

$$i \mathcal{D}_{BA}^R(t, t') = \theta(t-t') \langle \psi_0 | [\hat{B}_H(t); \hat{A}_H(t')] | \psi_0 \rangle \quad (221.2)$$

$$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$$

$$\hookrightarrow \delta \langle \hat{B}(t) \rangle = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{D}_{BA}^R(t, t') \varphi(t') \quad (221.3)$$

notar Eqs. (221.1) - (221.3) :

acção perturbação \hat{A} no instante t'

\hookrightarrow resposta do sistema \sim op. \hat{B} no instante $t > t'$:

ou a causalidade !

caso geral :

$$H^{ex}(t) = \int d^3\vec{n} \varphi(\vec{n}, t) \hat{A}(\vec{n}) \rightarrow H_H^{ex}(t) = \int d^3\vec{n} \varphi(\vec{n}, t) \hat{A}_H(\vec{n}, t) \quad (221.4)$$

onde $\varphi(\vec{n}, t) = 0$ p/ $t < t_0$;

nesse caso, Eq. (221.1) assume a forma :

$$\begin{aligned} \delta \langle \hat{B}(\vec{n}, t) \rangle &= -i \int d^3\vec{n}' dt' \frac{1}{\hbar} \varphi(\vec{n}', t') \theta(t-t') \langle \psi_0 | [\hat{B}_H(\vec{n}, t); \hat{A}_H(\vec{n}', t')] | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{\hbar} \int d^3\vec{n}' dt' \mathcal{D}_{BA}^R(\vec{n}, t; \vec{n}', t') \varphi(\vec{n}', t') \end{aligned} \quad (221.5)$$

onde

$$i \mathcal{D}_{BA}^R(x, x') = \theta(t-t') \langle \psi_0 | [\hat{B}_H(x); \hat{A}_H(x')] | \psi_0 \rangle ; \quad x = (\vec{n}, t) \quad (221.6)$$

$x' = (\vec{n}', t')$

· hipótese: sistema homogêneo;

$$\hookrightarrow \mathcal{D}_{BA}^R(x, x') = \mathcal{D}_{BA}^R(x - x');$$

temos que:

$$\int d^3n dt e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{n} - \omega t)} \delta \langle \hat{B}(\vec{n}, t) \rangle = \frac{1}{\hbar} \int d^3n d^3n' dt dt' +$$

$$\delta \langle \hat{B}(\vec{k}, \omega) \rangle$$

$$+ e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{n} - \vec{n}')} e^{i\omega(t - t')} \mathcal{D}_{BA}^R(\vec{n} - \vec{n}', t - t') e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{n}' - \omega t')} \phi(\vec{n}', t')$$

$$\hookrightarrow \delta \langle \hat{B}(\vec{k}, \omega) \rangle = \frac{1}{\hbar} \mathcal{D}_{BA}^R(\vec{k}, \omega) \phi(\vec{k}, \omega) \quad (222.1)$$

· Eq. (222.1): permite definição susceptibilidade generalizada:

$$\chi_{BA}(\vec{k}, \omega) = \frac{\delta \langle B(\vec{k}, \omega) \rangle}{\phi(\vec{k}, \omega)} = \frac{1}{\hbar} \mathcal{D}_{BA}^R(\vec{k}, \omega) \quad (222.2)$$

· em resumo: Eq. (221.5) \rightarrow resposta linear sistema \sim

função de correlação retardada (221.6);

\hookrightarrow dificuldade: como $\mathcal{D}_{BA}^R(x, x')$ não é um produto de ops. no versô de Heisenberg temporalmente ordenados \rightarrow não é possível aplicar o teorema de Wick (164.2) p/ determinação $\mathcal{D}_{BA}^R(x, x')$;

\hookrightarrow solução: definição função de correlação:

$$i \mathcal{D}_{AB}(x, x') = \langle \psi_0 | T(\hat{B}_H(x) \hat{A}_H(x')) | \psi_0 \rangle, \quad \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1: \quad (222.3)$$

: acompanha Eq. (160.4)

hipótese: ops. \hat{A} e \hat{B} conservam # partículas, i.e.,

$$[\hat{A}, \hat{N}] = [\hat{B}, \hat{N}] = 0; \tag{223.1}$$

nesse caso, verifica-se que a representação de Lehmann de (222.3) assume a forma, veja Eqs. (142.3) e (143.1) e Prob. 3.8, Fetter:

$$D_{BA}(\vec{x}, \omega) = \hbar v \sum_n \frac{\langle \psi_0 | \hat{B}(0) | n, \vec{x} \rangle \langle n, \vec{x} | \hat{A}(0) | \psi_0 \rangle}{\hbar \omega - (E_n - E_0) + i\eta}$$

$$- \frac{\langle \psi_0 | \hat{A}(0) | n, -\vec{x} \rangle \langle n, -\vec{x} | \hat{B}(0) | \psi_0 \rangle}{\hbar \omega + (E_n - E_0) - i\eta} \tag{223.2}$$

notar sinal \nearrow
e ausência
potencial químico μ !

nesse caso: Eq. (223.1) \rightarrow estados $|\psi_0\rangle, |n, \vec{x}\rangle$ e $|n, -\vec{x}\rangle$:

" c/ N partículas

e $E_n - E_0 = E_n(\omega) - E_0(\omega) \geq 0$: energia excitação "neutra"
do sistema: comparar c/
obs. 2, pg. 143.

como $D_{BA}(\vec{x}, \omega)$ e $D_{BA}^R(\vec{x}, \omega)$ estão relacionados via Eq. (148.1)

p/ $\mu = 0$, i.e.,

$$\text{Re } D_{BA}(\vec{x}, \omega) = \text{Re } D_{BA}^R(\vec{x}, \omega) \tag{223.3}$$

$$\text{e } \text{sgn}(\omega) \text{Im } D_{BA}(\vec{x}, \omega) = \text{Im } D_{BA}^R(\vec{x}, \omega)$$

temos que, veja pg. 223.1

• Detolhes Eq. (224.1):

Eq. (223.2) e identidade (146.2):

$$\text{Re } D_{BA}(\vec{k}, \omega) = \hbar v \sum_n \frac{\langle \psi_0 | \hat{B}(0) | n, \vec{k} \rangle \langle n, \vec{k} | \hat{A}(0) | \psi_0 \rangle}{\hbar \omega - (E_n - E_0)}$$

$$- \frac{\langle \psi_0 | \hat{A}(0) | n, -\vec{k} \rangle \langle n, -\vec{k} | \hat{B}(0) | \psi_0 \rangle}{\hbar \omega + (E_n - E_0)}$$

$$\underline{\underline{e}} \text{Im } D_{BA}(\vec{k}, \omega) = -\pi \langle \psi_0 | \hat{B}(0) | n, \vec{k} \rangle \langle n, \vec{k} | \hat{A}(0) | \psi_0 \rangle \delta(\hbar \omega - (E_n - E_0))$$

$$\text{sgn}(\omega) > 0$$

$$- (+\pi) \langle \psi_0 | \hat{A}(0) | n, -\vec{k} \rangle \langle n, -\vec{k} | \hat{B}(0) | \psi_0 \rangle \delta(\hbar \omega + (E_n - E_0))$$

$$\text{sgn}(\omega) < 0$$

Eq. (223.3):

$$\text{Im } D_{BA}^R(\vec{k}, \omega) = -\pi \langle \psi_0 | \hat{B}(0) | n, \vec{k} \rangle \langle n, \vec{k} | \hat{A}(0) | \psi_0 \rangle \delta(\hbar \omega - (E_n - E_0))$$

$$- (-\pi) \langle \psi_0 | \hat{A}(0) | n, -\vec{k} \rangle \langle n, -\vec{k} | \hat{B}(0) | \psi_0 \rangle \delta(\hbar \omega + (E_n - E_0))$$

↳ Eq. (224.1)

$$D_{BA}^R(\vec{x}, \omega) = \hbar v \sum_n \frac{\langle \psi_0 | \hat{B}(0) | n, \vec{x} \rangle \langle n, \vec{x} | \hat{A}(0) | \psi_0 \rangle}{\hbar \omega - (E_n - E_0) + i\eta}$$

$$- \frac{\langle \psi_0 | \hat{A}(0) | n, -\vec{x} \rangle \langle n, -\vec{x} | \hat{B}(0) | \psi_0 \rangle}{\hbar \omega + (E_n - E_0) + i\eta} \quad (224.1)$$

Ex. 1: gás de elétrons degenerado - blindagem,

ideia: determinar resposta do sistema ao campo elétrico
estático associado a uma impureza (estática)
carga $Ze > 0$ na origem;

nesse caso, Eq. (221.4): $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) = -\frac{Ze^2}{r}$

$$\hat{A}(\vec{r}) = \hat{\rho}(\vec{r}) = -\sum_{\alpha} \hat{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) \hat{\psi}_{\alpha}(\vec{r}); \text{ Eq. (43.2)}$$

$$\hookrightarrow H^{\text{ex}} = -\int d^3n \frac{Ze^2}{r} \hat{\rho}(\vec{r}) \quad (224.1)$$

$$\hat{\rho}(\vec{q}, \omega) = \int d^3n e^{-i\vec{q}\cdot\vec{n}} \frac{Ze}{r} \int dt e^{i\omega t} = \frac{4\pi Ze}{q^2} \cdot 2\pi \delta(\omega) = \frac{8\pi^2 Ze}{q^2} \delta(\omega);$$

como a impureza \rightarrow modificação distribuição de cargas do sistema \rightarrow é interessante considerar $\hat{B}(\vec{r}) = \hat{\rho}(\vec{r})$;

Eqs (221.5) e (221.6):

$$\delta \langle \hat{\rho}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{\hbar} \int d^3n' dt \mathcal{D}_{\rho\rho}^R(\vec{r}, t; \vec{n}', t') \rho(\vec{n}', t') \quad (224.2)$$

$$\hat{\rho} = i\mathcal{D}_{\rho\rho}^R(x, x') = i\mathcal{D}^R(x, x') = \theta(t-t') \langle \psi_0 | [\hat{\rho}_H(x); \hat{\rho}_H(x')] | \psi_0 \rangle$$

• é interessante escrever $\mathcal{D}^R(x, x')$ em termos de $\tilde{p}(\vec{n})$:

Definição: $\tilde{p}(\vec{n}) = \hat{p}(\vec{n}) - \langle \psi_0 | \hat{p}(\vec{n}) | \psi_0 \rangle$

$$= \hat{p}(\vec{n}) - \langle p(\vec{n}) \rangle \tag{224.3}$$

↳ (verificam): $i\mathcal{D}^R(x, x') = \theta(t-t') \langle \psi_0 | [\tilde{p}_H(x); \tilde{p}_H(x')] | \psi_0 \rangle$

onde (veja Eq. (124.2)): (224.4)

$$\tilde{p}_H(x) = \tilde{p}_H(\vec{n}, t) = e^{iHt/\hbar} \tilde{p}(\vec{n}) e^{-iHt/\hbar}$$

• similar Eq (222.3), é interessante introduzir a função de correlação densidade-densidade:

$$i\mathcal{D}(x, x') = \frac{\langle \psi_0 | T(\tilde{p}_H(x) \tilde{p}_H(x')) | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} \tag{224.5}$$

Obs. Eq. (224.5): exemplo função de Green de 2 partículas, veja, e.g., Sec. 15, Landau.

• como a resposta (224.2) do gás de elétrons é determinada por $\mathcal{D}(x, x')$

↳ próximo etapa: propriedades de $\mathcal{D}(x, x')$:

• verifico-se que: $\mathcal{D}(x, x') = \mathcal{D}(x', x)$ (224.6)

• vamos considerar (224.5) p/ o sistema não-interagente:

nesse caso: $\psi_{H\alpha}(x) = e^{iH_0 t/\hbar} \psi_{S\alpha}(\vec{n}) e^{-iH_0 t/\hbar} = \psi_{S\alpha}(x) = \psi_{\alpha}(x)$:

: veja Eqs. (124.2) e (153.1)

$$\hat{\rho}_H(x) = e^{iH_0 t/\hbar} \hat{\rho}(\vec{n}) e^{-iH_0 t/\hbar} = \tilde{\rho}_I(x)$$

$$\hookrightarrow iD^0(x, x') = \langle \Phi_0 | T(\tilde{\rho}_I(x) \tilde{\rho}_I(x')) | \Phi_0 \rangle ; \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle = 1$$

(224.7)

como (verifican):

$$\langle \tilde{\rho}_I(x) \tilde{\rho}_I(x') \rangle = \langle \hat{\rho}_I(x) \hat{\rho}_I(x') \rangle - \langle \hat{\rho}_I(x) \rangle \langle \hat{\rho}_I(x') \rangle, \text{ temos que:}$$

$$iD^0(x, x') = \sum_{\alpha\beta} \langle \Phi_0 | T(\psi_\alpha^+(x) \psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(x') \psi_\beta(x')) | \Phi_0 \rangle$$

$$- \sum_{\alpha\beta} \langle \Phi_0 | \psi_\alpha^+(x) \psi_\alpha(x) | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0 | \psi_\beta^+(x') \psi_\beta(x') | \Phi_0 \rangle$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\langle \hat{\rho}(\vec{n}) \rangle \langle \hat{\rho}(\vec{n}') \rangle}$$

utilizando o teorema de Wick (164.2) p/ o 1º termo:

$$iD^0(x, x') = \sum_{\alpha\beta} \langle \Phi_0 | T(\psi_\alpha(x) \psi_\alpha^+(x')) | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0 | T(\psi_\beta(x') \psi_\beta^+(x)) | \Phi_0 \rangle$$

$$- \langle \Phi_0 | T(\psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(x')) | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0 | T(\psi_\beta(x') \psi_\alpha^+(x)) | \Phi_0 \rangle$$

$$- \langle \hat{\rho}(\vec{n}) \rangle \langle \hat{\rho}(\vec{n}') \rangle$$

$$= \sum_{\alpha} i G_{\alpha\alpha}^0(x, x') \sum_{\beta} i G_{\beta\beta}^0(x', x')$$

$$= (-1) \langle \hat{\rho}(\vec{n}) \rangle \quad (-1) \langle \hat{\rho}(\vec{n}') \rangle : \text{ Eq. (171.2)}$$

$$- \sum_{\alpha\beta} i G_{\alpha\beta}^0(x, x') i G_{\beta\alpha}^0(x', x) - \langle \hat{\rho}(\vec{n}) \rangle \langle \hat{\rho}(\vec{n}') \rangle$$

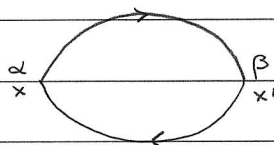
(224.8)

$$\hookrightarrow iD^0(x, x') = \sum_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^0(x, x') G_{\beta\alpha}^0(x', x)$$

se $G_{\alpha\beta}^0(x, x') = \int \alpha\beta G^0(x, x')$, temos que:

$$iD^0(x, x') = (2S+1) G^0(x, x') G^0(x', x) \quad (224.9)$$

notas: diagrama (224.8):



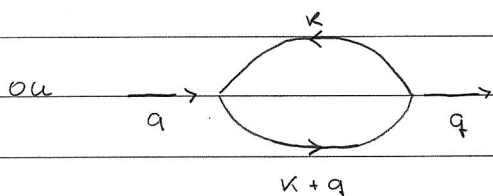
(224.10)

pr um sistema homogêneo:

$$G^0(x, x') = G^0(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (x-x')} G^0(k) \quad \text{Eq. (131.3)}$$

verificc-se que (exercício):

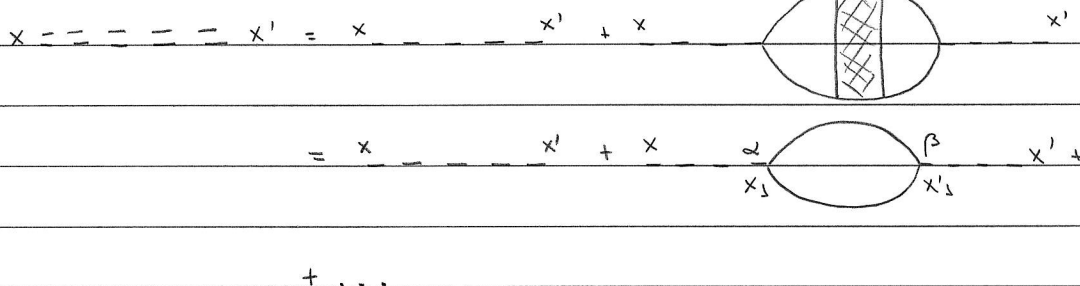
$$iD^0(x, x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq \cdot (x-x')} \underbrace{(2S+1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G^0(k+q) G^0(k)}_{= iD^0(q) = iD^0(q', \nu)}$$



(224.11)

notas: similaridade de Eqs. (224.10)/(224.11) e a inserção de polarização total $\tilde{\pi}(x, x')$: veja Eq. (190.1);

de fato, Eq. (190.1):



ou

$$U^R(x, x') = U(x, x') + \frac{(-i)}{\hbar} \int_{\alpha\beta} d^4x_2 d^4x'_2 U(x, x_2) G_{\alpha\beta}^0(x_2, x'_2) +$$

notas fclon \rightarrow $* G_{\beta\alpha}^0(x'_2, x_1) U(x'_2, x_1) + \dots$

$$= U(x, x') + \int d^4x_2 d^4x'_2 U(x, x_2) \underbrace{\frac{(-i)}{\hbar} \int_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^0(x_2, x'_2) G_{\beta\alpha}^0(x'_2, x_1) U(x'_2, x_1)}_{\tilde{\pi}^0(x, x')} + \dots$$

(224.12)

comparando Eqs. (224.8) e (224.12), temos que

$$D^0(x, x') = \hbar \tilde{\pi}^0(x, x') = \hbar \pi^0(x, x') \tag{224.13}$$

\uparrow
válida apenas em menor ordem!

como a relação acima pode ser estabelecida por diagramas de ordem superior, temos que:

$$D(x, x') = \hbar \tilde{\pi}(x, x') \tag{224.14}$$

: relação entre a função de correlação densidade-densidade e a inserção de polarização total!

lembrando Eq. (195.4), temos que:

$$D(q) = \hbar \tilde{\pi}(q) = \frac{\hbar \pi(q)}{1 - \pi(q) U(q)} \tag{224.15}$$

- considerar (224.15) como uma série em potências de e^2 ;
- pr $\vec{q} \rightarrow 0$, temos que os termos mais importantes ~
maior potência $V(\vec{q}) \sim 1/q^2$;

↳ proposta: considerar $\Pi(q) \approx \Pi^0(q)$ em (224.15)

↳ $D(q)$: soma "ring diagrams", veja Eq. (190.1):

(224.16)

$$D(q) = \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \\ + \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \end{array}$$

- de fato, proposta (224.16): random phase approximation (RPA)
pr o gás de elétrons!

• sobre a polarização $\Pi^0(q)$;

verifica-se que: veja Eq. (211.1):

$$\Pi^0(\vec{q}, \omega) = \frac{2}{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F) \theta(k_F - k) +$$

$$* \left(\frac{1}{\omega + \omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k} + \vec{q}} + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_{\vec{k} + \vec{q}} - \omega_{\vec{k}} - i\eta} \right) \quad (224.17)$$

↳ é possível determinar $\text{Re} \Pi^0(\vec{q}, \omega)$ e $\text{Im} \Pi^0(\vec{q}, \omega)$;
: veja Eqs. (212.1) e (212.2);

pr detalhes $\Pi^0(\vec{q}, \omega)$, incluindo comportamento nos limites
estático ($\omega=0$) e pr $q \rightarrow 0$, veja pgs. 210 - 214.

Lembran Eq. (19.2):

$$U^R(q) = \frac{U(q)}{1 - U(q)\tilde{\pi}(q)} = \frac{U(q)}{\epsilon(q)} \quad \epsilon(q) = 1 - U(q)\tilde{\pi}(q)$$

na RPA, temos que:

$$U^R(q) = U_{\text{eff}}(q) = \frac{U(q)}{1 - U(q)\tilde{\pi}^0(q)} \quad (224.18)$$

$$\epsilon \quad \epsilon_{\text{RPA}}(q) = 1 - U(q)\tilde{\pi}^0(q) : \text{função dielétrica na RPA} \quad (224.19)$$

Obs. 1: p/ detalhes sobre o potencial efetivo (224.18),
veja pg. 216;

Obs. 2: p/ determinação de energia do estado fundamental
do gás de elétrons na RPA: Eq. (54.2),
veja pgs. 204 - 209 e Cap. 7;
de fato, considerando as contribuições dos
ring diagrams \rightarrow determinação de energia de
correlação!

• $\mathcal{D}^R(x, x')$ pode ser escrito em termos de $\tilde{p}(\vec{n}) = \hat{p}(\vec{n}) - \langle \hat{p}(\vec{n}) \rangle$:
 : Eq. (200.2); i.e. :

$$i\mathcal{D}^R(x, x') = \theta(t-t') \langle \psi_0 | [\tilde{p}_H(x); \tilde{p}_H(x')] | \psi_0 \rangle, \quad (225.1)$$

i.e., $\mathcal{D}^R(x, x')$ é a função de correlação na ordem correspondente à função de correlação densidade-densidade (200.4);

• Vimos que :

$$\mathcal{D}_{pp}(x, x') = \mathcal{D}(x, x') = \hbar \tilde{\pi}(x, x') : \text{Eq. (203.3)}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{D}^R(x, x') = \hbar \tilde{\pi}^R(x, x'), \quad (225.2)$$

• hipótese: $\mathcal{D}^R(x, x') = \mathcal{D}^R(x-x')$;

\hookrightarrow Eq. (224.2) pode ser escrito como:

$$\delta \langle \hat{p}(\vec{n}, t) \rangle = \delta \langle \hat{p}(\vec{n}) \rangle =$$

$$= \frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3\vec{k} d\omega d^3\vec{q} d\nu}{(2\pi)^8} \underbrace{\int d^3n' e^{-i(\vec{x}-\vec{q}) \cdot \vec{n}'}}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{x}-\vec{q})} \underbrace{\int dt' e^{i(\omega-\nu)t'}}_{(2\pi) \delta(\omega-\nu)} *$$

$$* e^{i\vec{x} \cdot \vec{n} - i\omega t} \mathcal{D}^R(\vec{x}, \omega) \varphi(\vec{q}, \nu)$$

$$= \frac{8\pi^2 Z e^2}{q^2} \delta(\nu)$$

$$= -\frac{1}{\hbar} Z \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \mathcal{D}^R(\vec{q}, 0) \frac{4\pi e^2}{q^2} \quad (225.3)$$

$$\mathcal{D}^R(\vec{q}, 0) U(\vec{q}, 0)$$

similares Eqs. (206.1) e (206.2), temos que:

$$\frac{1}{\hbar} \mathcal{D}^R(\vec{q}, 0) U(\vec{q}, 0) = \tilde{\pi}^R(\vec{q}, 0) U(\vec{q}, 0) = \pi^R(\vec{q}, 0) U^R(\vec{q}, 0) =$$

CUIDADO:

$R = \text{nenormalizado}$

$$= \frac{1 - \epsilon^R(\vec{q}, 0)}{\epsilon^R(\vec{q}, 0)} \quad (226.1)$$

onde $\pi^R(\vec{q}, \nu) = \text{Re} \pi(\vec{q}, \nu) + i \text{sgn}(\nu) \text{Im} \pi(\vec{q}, \nu)$ (226.2)

$$\epsilon^R(\vec{q}, \nu) = \text{Re} \epsilon(\vec{q}, \nu) + i \text{sgn}(\nu) \text{Im} \epsilon(\vec{q}, \nu)$$

↳ Eq. (225.3):

$$\delta \langle \hat{p}(\vec{n}) \rangle = -Z \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} \frac{1 - \epsilon^R(\vec{q}, 0)}{\epsilon^R(\vec{q}, 0)} \quad (226.3)$$

: resposta linear do sistema à presença de impureza
estática em termos da função dielétrica retardada!

• p/ o gás de elétrons c/ $n_s \ll 1$ (altas densidades), podemos
considerar a aproximação:

$$\epsilon^R(\vec{q}, 0) \approx \epsilon_{\text{RPA}}^R(\vec{q}, 0) \quad (226.4)$$

Como $\epsilon_{\text{RPA}}^R(\vec{q}, 0) = \text{Re} \epsilon_{\text{RPA}}(\vec{q}, 0)$, Eq. (214.3), temos que:

$$\epsilon_{\text{RPA}}^R(\vec{q}, 0) = 1 + \frac{4\alpha n_s k_F^2}{\pi q^2} g\left(\frac{q}{k_F}\right)$$

onde $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \ln \left| \frac{1-x/2}{1+x/2} \right|$

↳ Eq. (226.3):

$$\delta \langle \hat{\rho}(\vec{r}) \rangle = Z \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{4\alpha n_s v_F^2 / \pi}{(q/v_F)^2 + \frac{4\alpha n_s v_F^2}{\pi} g(q/v_F)} \quad ; \quad (227.1)$$

: resposta gás de elétrons degenerado a uma impureza
estática em RPA;

(-e) $\delta \langle \hat{\rho}(\vec{r}) \rangle$: densidade de carga induzida devido presença
impureza!

• notar Eq. (227.1):

(i) $\delta Q = \int d^3 r (-e) \delta \langle \hat{\rho}(\vec{r}) \rangle$: carga total induzida ~
presença impureza

$$\hookrightarrow \delta Q = -eZ \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \underbrace{\int d^3 r e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{q})} \frac{4\alpha n_s v_F^2 / \pi}{(q/v_F)^2 + \frac{4\alpha n_s v_F^2}{\pi} g(q/v_F)}$$

como $g(0) = 1$

↳ $\delta Q = -Ze$: blindagem impureza; na origem completa
p/ $r \rightarrow +\infty$ (227.2)

(ii) como $g(x) = 1 + O(x^2)$ p/ $x \ll 1$, a possível divergência
do integrando $\sim \frac{1}{q^2}$ p/ $q \ll 1$ é regularizada pelo
cut off:

$$q_{\min} = \left(\frac{4\alpha n_s}{\pi} \right)^{1/2} v_F = \left(\frac{4v_F}{\pi a_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{6\pi n e^2}{E_F} \right)^{1/2} = q_{TF} : \text{vetor de onda} \\ \text{de Thomas-Fermi} \\ \text{verifican!} \quad \uparrow \quad (226.2)$$

(227.3)

(iii) sobre a densidade de carga induzida:

$$-e \delta \langle \hat{\rho}(\vec{n}) \rangle = -Ze \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} \frac{q_{TF}^2}{q^2 + q_{TF}^2} g(q/k_F)$$

hipótese: $g(x) = 1$;

verificasse que:

$$-e \delta \langle \hat{\rho}(\vec{n}) \rangle \sim \delta \rho_{TF}(\vec{n}) = \frac{-Ze q_{TF}^2 e^{-q_{TF} n}}{4\pi n} : \text{densidade}$$

de carga induzida na aproximação de Thomas-Fermi

pr a determinação da função dielétrica $\epsilon(\vec{q})$ do

gás de elétrons (pr detalhes, veja Sec. 5.5.1, Mahan)

entretanto, um cálculo mais detalhado indica que

(veja Eqs. (14.24) - (14.26), Fetter):

$$-e \delta \langle \hat{\rho}(\vec{n}) \rangle \sim \frac{Ze}{\pi} \frac{4\pi}{(4+\pi)^2} \frac{\cos(2k_F n)}{n^3}, \quad n \gg 1 \quad (228.1)$$

notar Eq. (228.1): densidade de carga induzida:

- componente oscilatório c/ $\lambda = \frac{2\pi}{2k_F} = \frac{\pi}{k_F}$

$\hat{=}$ envelope $\sim \frac{1}{n^3}$ pr $n \gg 1$;

- componente oscilatório $\sim \exists$ superfície de Fermi

bem definida, mesmo pr sistema interagente:

: oscilações de Friedel.

(228.2)

Ex. 2: gás de elétrons degenerado - oscilações de plasma,

ideia: similar Ex. 1, porém vamos considerar a resposta do sistema a perturbação externa dependente do tempo;
 ≠ Ex. 1, foco não é determinação de $\delta \langle \hat{\rho}(\vec{n}, t) \rangle$,
 mas energia excitações (coletivas) neutras.

similar Ex. 1, consideramos o gás de elétrons sob perturbação externa, onde

$$\psi(\vec{n}, t) = \phi_0 e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} \delta(t); \quad \phi_0 = cte$$
$$\hat{A}(\vec{n}) = \hat{\rho}(\vec{n})$$

(229.1)

$$\hookrightarrow \text{Eq. (221.4)} : H^{ex}(t) = \phi_0 \int d^3n e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} \hat{\rho}(\vec{n}) \delta(t)$$

$$\hookrightarrow \psi(\vec{p}, \omega) = \int d^3n dt e^{-i(\vec{p} \cdot \vec{n} - \omega t)} \phi_0 e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} \delta(t) = (2\pi)^3 \phi_0 \delta(\vec{p} - \vec{q})$$

notas $\psi(\vec{n}, t)$: oscilações espaciais
 e dependência temporal!

novamente: resposta (linear) sistema ~ densidade de carga induzida;

similar Eqs. (224.2) - (225.3), temos que:

$$\delta \langle \hat{\rho}(\vec{n}, t) \rangle = \frac{1}{\hbar} \int d^3n' dt' \mathcal{D}^R(\vec{n} - \vec{n}', t - t') \psi(\vec{n}', t')$$
$$= \frac{1}{\hbar} \int \frac{d^3k d\omega d^3p d\nu}{(2\pi)^8} \int d^3n' e^{-i(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{n}'} \int dt' e^{i(\omega - \nu)t'} *$$
$$+ e^{i(\vec{k} \cdot \vec{n} - \omega t)} \mathcal{D}^R(\vec{k}, \omega) \psi(\vec{p}, \nu)$$
$$(2\pi)^3 \phi_0 \delta(\vec{p} - \vec{q})$$
$$= \frac{1}{\hbar} \int \frac{d\nu}{2\pi} e^{i(\vec{q} \cdot \vec{n} - \nu t)} \mathcal{D}^R(\vec{q}, \nu) \phi_0$$

Como $D^R(\vec{q}, \omega) = \hbar \tilde{\pi}^R(\vec{q}, \omega)$, temos que:

$$\delta \langle \hat{p}(\vec{n}, t) \rangle = \varphi_0 e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{\pi}^R(\vec{q}, \omega) \quad (230.1)$$

Como:

$$U^R(q) = U(q) + U(q) \tilde{\pi}(q) U(q) \quad : \text{ Eq. (190.1)}, \quad q = (\vec{q}, \omega)$$

$$\frac{U^R(q)}{U(q)} = \frac{U(q)}{1 - U(q) \tilde{\pi}(q)} = U(q) \quad : \text{ Eq. (191.2)}$$

$$\hookrightarrow \frac{U^R(q)}{U(q)} = 1 + \frac{\tilde{\pi}(q) U(q)}{1 - U(q) \tilde{\pi}(q)} = \frac{1}{E(q)} \rightarrow \tilde{\pi}(q) = \frac{1}{U(q)} \left(\frac{1}{E(q)} - 1 \right) \quad (230.2)$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (230.1)}: \delta \langle \hat{p}(\vec{n}, t) \rangle = -\varphi_0 e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{V(\vec{q})} \frac{(E^R(\vec{q}, \omega) - 1)}{E^R(\vec{q}, \omega)} :$$

(230.3)

: resposta linear do sistema (densidade de carga induzida) devido perturbação dependente do tempo (229.1) em termos função dielétrica retardada; nota dependência a frequência ω ; compare com Eq. (226.3).

• Eqs. (230.2) e (230.3): singularidades integrando \sim singularidades de $\tilde{\pi}^R(\vec{q}, \omega)$ no plano ω -complexo = zeros de $E^R(\vec{q}, \omega)$!

Lembrar Eq. (223.2): polos $\tilde{\pi}(q) \sim$ energias excitações neutras do sistema;

* \neq Ex. 1, ao invés de determinar $\delta \langle \hat{p}(\vec{n}, t) \rangle$, vamos determinar a energia dos modos coletivos em RPA e no limite $\vec{q} \rightarrow 0$ e $\hbar\omega \sim E_F$ (altas frequências)

novamente: p/ o gás de elétrons c/ $n_s \ll 1$ (altas densidades), podemos considerar:

$$\epsilon^R(\vec{q}, \omega) \approx \epsilon_{RPA}^R(\vec{q}, \omega) \quad (231.1)$$

$$\text{Como: } \epsilon_{RPA}^R(\vec{q}, \omega) = 1 - V(\vec{q}) \Pi^{OR}(\vec{q}, \omega), \quad (231.2)$$

podemos, em princípio, considerar Eqs. (212.1) - (213.2) e (226.2) e determinar $\omega(\vec{q}) = \Omega(\vec{q}) - i\Gamma(\vec{q})$ tal que $\epsilon_{RPA}^R(\vec{q}, \omega) = 0$; nesse caso, somente via procedimento numérico;

L> considerar procedimento alternativo em 2 etapas:

(1) $\vec{q} = 0$ e ω finito:

Eqs. (214.4) e (226.2):

$$\epsilon_{RPA}^R(0, \omega) = \text{Re} \epsilon_{RPA}(0, \omega) + i \text{sgn}(\omega) \text{Im} \epsilon_{RPA}(0, \omega) = 1 - \frac{4\alpha n_s}{3\pi\omega^2} = 0$$

$$\text{L> } \omega^2 = \frac{4\alpha n_s}{3\pi}$$

ou em termos variáveis dimensionais (212.3):

$$\omega^2 \rightarrow \omega^2 \cdot \frac{m^2}{\hbar^2 k_F^4} = \frac{4\alpha n_s}{3\pi}$$

$$\text{L> } \omega^2 \equiv \Omega_p^2 = \frac{4}{3\pi} \cdot \alpha n_s k_F \cdot \frac{\hbar^2}{m^2} \cdot k_F^3 = \frac{4\pi n e^2}{m} \quad (231.3)$$

$\frac{1}{a_0} = me^2/\hbar^2 \quad 3\pi^2 n: \text{Eq. (47.1)}$

: frequência (clássica) de plasma!

Obs.: Como Ω_p independe $\hbar \rightarrow \Omega_p$ pode ser determinada via uma análise clássica do gás de elétrons, veja, e.g., sec. 15, Fetter.

(2) $\vec{q}/k_F \ll 1$ e ν finito:

como

$$\pi^{OR}(\vec{q}, \nu) = \text{Re}\pi^O(\vec{q}, \nu) + i \text{sgn}(\nu) \text{Im}\pi^O(\vec{q}, \nu)$$

\hookrightarrow Eq. (210.3) e procedimento similar utilizado p/ determinar Eq. (224.1) \rightarrow determinação $\pi^{OR}(\vec{q}, \nu)$; verifica-se que (exercício):

$$\pi^{OR}(\vec{q}, \nu) = \frac{2}{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(I) - (II)}{\nu + \omega_k - \omega_{\vec{k}+\vec{q}} + i\eta}$$

onde:

$$(I) = \theta(|\vec{k} + \vec{q}| - k_F) \theta(k_F - k) = (1 - \theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|)) \theta(k_F - k)$$

$$\text{e } (II) = \theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|) \theta(k - k_F) = \theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|) (1 - \theta(k_F - k))$$

$$\hookrightarrow \pi^{OR}(\vec{q}, \nu) = -\frac{2}{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\theta(k_F - |\vec{k} + \vec{q}|) - \theta(k_F - k)}{\nu + \omega_k - \omega_{\vec{k}+\vec{q}} + i\eta}$$

se $\vec{k} \rightarrow -\vec{k} - \vec{q}$ apenas no 1º termo, temos que:

$$\pi^{OR}(\vec{q}, \nu) = -\frac{2}{\hbar} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \theta(k_F - k) +$$

$$* \left(\frac{1}{\nu + \omega_{-\vec{k}-\vec{q}} - \omega_k + i\eta} - \frac{1}{\nu + \omega_k - \omega_{\vec{k}+\vec{q}} + i\eta} \right) \quad (232.1)$$

se polos $\pi^{OR}(\vec{q}, \nu) : \nu = \Omega(\vec{q}) - i\Gamma(\vec{q})$

$$\hookrightarrow \epsilon_{RPA}^R(\vec{q}, \Omega(\vec{q}) - i\Gamma(\vec{q})) = 1 - \nu(\vec{q}) \pi^{OR}(\vec{q}, \Omega(\vec{q}) - i\Gamma(\vec{q})) = 0$$

(233.1)

hipótese: $\Gamma(\vec{q}) \ll \Omega(\vec{q}) : 0 < \nu \ll \vec{q} \rightarrow 0$, veja abaixo

$$\hookrightarrow 1 = \nu(\vec{q}) \left(\text{Re} \pi^{OR}(\vec{q}, \Omega(\vec{q}) - i\Gamma(\vec{q})) + i \text{Im} \pi^{OR}(\vec{q}, \Omega(\vec{q}) - i\Gamma(\vec{q})) \right)$$

$$\approx \text{Re} \pi^{OR}(\vec{q}, \Omega(\vec{q})) + (\nu - \Omega(\vec{q})) \left. \frac{\partial \text{Re} \pi^{OR}(\vec{q}, \nu)}{\partial \nu} \right|_{\nu = \Omega(\vec{q})}$$

$$= -i\Gamma(\vec{q})$$

$$+ i \text{Im} \pi^{OR}(\vec{q}, \Omega(\vec{q}))$$

$\hookrightarrow 1 = \nu(\vec{q}) \text{Re} \pi^{OR}(\vec{q}, \Omega(\vec{q}))$: permite determinação
energia $\Omega(\vec{q})$ do modo
coletivo

(233.2)

$$\epsilon_{\Gamma} \Gamma(\vec{q}) = \frac{\text{Im} \pi^{OR}(\vec{q}, \Omega(\vec{q}))}{\left. \frac{\partial \text{Re} \pi^{OR}(\vec{q}, \nu)}{\partial \nu} \right|_{\nu = \Omega(\vec{q})}} ; \text{ " " } \text{ amortecimento } \Gamma(\vec{q}) \text{ " "}$$

• $p \ll q < 2k_F$, $\omega q \ll \nu$ e $q v_F \ll \nu$,

$$\text{Eq. (232.2)} \rightarrow \text{Im} \pi^O(\vec{q}, \nu) = 0 \oplus \text{Eq. (233.2)}$$

$\hookrightarrow \Gamma(\vec{q}) = 0$: ok c/ hipótese $\Gamma(\vec{q}) \ll \Omega(\vec{q})$!

• como $\pi^{OR}(\vec{q}, \nu) \in \mathbb{R}$, Eq. (232.1) pode ser escrita como:

$$\text{Re} \pi^{OR}(\vec{q}, \nu) = -\frac{2}{\hbar \nu} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \theta(k_F - x) \left(\frac{1}{1 - \Lambda(\vec{q}, \vec{x})/\nu} - \frac{1}{1 + \Lambda(\vec{q}, \vec{x})/\nu} \right)$$

$$\text{onde } \Lambda(\vec{q}, \vec{x}) = \frac{\hbar q^2}{2m} + \frac{\hbar \vec{x} \cdot \vec{q}}{m} \quad (I)$$

pr $q \ll k_F$, demos que:

$$(I) = 2 \left(\frac{\Lambda(\vec{q}, \vec{k})}{v} + \left(\frac{\Lambda(\vec{q}, \vec{k})}{v} \right)^3 + \dots \right)$$

$$\approx 2 \cdot \frac{\hbar q^2}{2m v} \left(1 + \frac{2 \vec{k} \cdot \vec{q}}{q^2} + 3 \left(\frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{q}}{m v} \right)^2 + \dots \right)$$

$$\hookrightarrow \text{Re } \pi^{\text{OR}}(\vec{q}, v) = \frac{2q^2}{m v^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Theta(k_F - k) \left(1 + \frac{2 \vec{k} \cdot \vec{q}}{q^2} + 3 \left(\frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{q}}{m v} \right)^2 + \dots \right)$$

Eq. (47.1)

$$\stackrel{?}{=} \frac{k_F^3}{3\pi^2} \cdot \frac{q^2}{m v^2} \left(1 + \frac{3}{5} \left(\frac{\hbar k_F q}{m v} \right)^2 + \dots \right) \quad (234.1)$$

• Eqs. (233.2) e (234.1) \oplus solução idêntica, verifica-se que:

$$\Omega(\vec{q}) = \Omega_p \left(1 + \frac{q}{10} \left(\frac{q}{q_{TF}} \right)^2 + \dots \right) ; \Omega_p : \text{Eq. (231.3)}$$

(234.2)

$$V(\vec{q}) = 0 \quad \text{e} \quad q \ll k_F$$

Obs. 1: $\hbar \Omega_p$ pr meios, veja tabela 5.5, Mehan

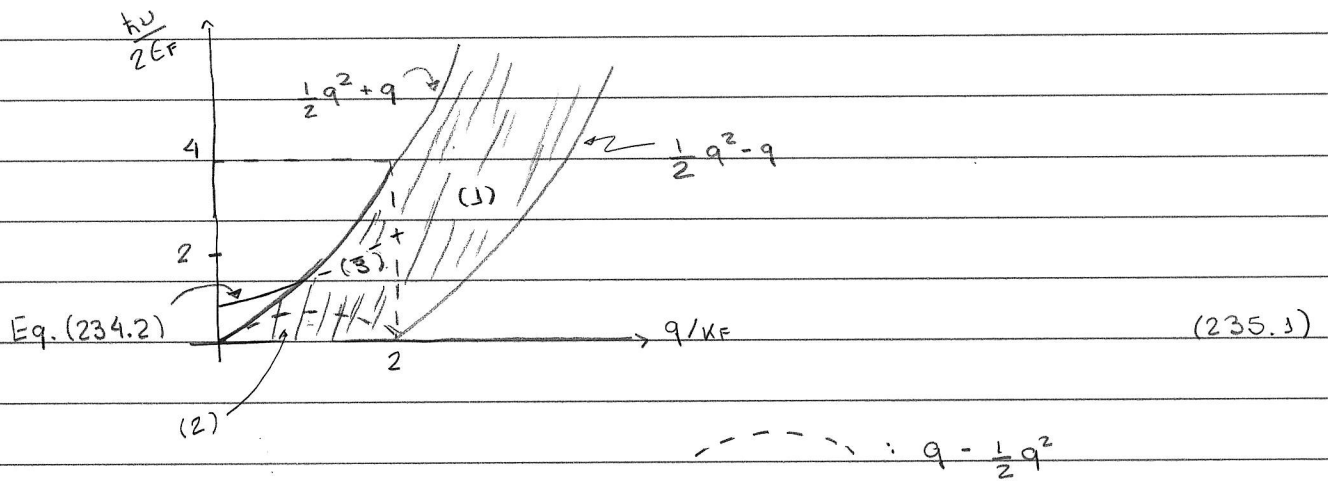
Obs. 2: oscilações de plasma não-amortecidas apenas pr $q < k_F$;

à medida momento q aumenta, verifica-se que

curva $\Omega(\vec{q}) \in$ continuo excitações pares partícula-buraco

\hookrightarrow nesse caso, $V(\vec{q}) \neq 0$: veja Fig. 5.12, Mehan

Fig. 14.2, Bruus



• região hachurada: contínuo excitações pares partícula-buraco onde $\text{Im}\Pi^{\text{R}}(\vec{q}, \omega) \neq 0$: veja Eq. (213.2)

• regiões (1), (2), (3): definidos Eq. (213.2)

• Eq. (231.3):
$$\hbar^2 \Omega_p^2 = \frac{4\alpha n_s}{3\pi} \cdot \left(\frac{\hbar^2 v_F^2}{2m}\right)^2 \cdot 4$$

$$\hookrightarrow \frac{\hbar \Omega_p}{E_F} = \left(\frac{16}{3\pi} \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3}\right)^{1/2} n_s^{1/2} \approx 0,94 n_s^{1/2}$$
 (235.2)

$$\hookrightarrow p / n_s = 4 \rightarrow \frac{\hbar \Omega_p}{2E_F} \approx 0,94$$

Ex. 3: gás de férmions neutros - som zero,

ideia: similar Ex. 2, vamos determinar a energia modos coletivos do sistema a $T=0$;

nesse caso, verifique-se Eq. (233.1) admite soluções de forma:

$$\Omega(\vec{q}) = C_0 q \quad (236.1)$$

· Considerar limite $q \rightarrow 0$;

Eqs. (212.3), (214.5) e (233.1) \rightarrow determinação $\pi^{0R}(q, \omega)$ p/ $q \rightarrow 0$;

temos que:

$$E_1(q, \omega) + i \operatorname{sgn}(\omega) E_2(q, \omega) = 1 - V(\vec{q}) \pi^{0R}(q, \omega) =$$

$$= 1 + \underbrace{4\pi e^2}_{V(\vec{q})} \cdot \frac{m k_F}{\pi^2 \hbar^2} \left(1 - \frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + \frac{i\pi}{2} x \Theta(1-x) \right)$$

$$\hookrightarrow \pi^{0R}(q, \omega) = \frac{m k_F}{\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{2} x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{2} - \frac{i\pi}{2} x \Theta(1-x) \right)$$

(236.2)

$$\text{onde } x = \frac{\omega}{q} \rightarrow x = \frac{\omega m}{\hbar k_F^2} = \frac{\omega}{q} \cdot \frac{m}{\hbar k_F} = \frac{\omega}{v_F q} > 0$$

notas: condição p/ \exists modo coletivo não-amortecido:

$$x > 1 \rightarrow x = \frac{\omega}{v_F q} = \frac{C_0}{v_F} > 1 \rightarrow C_0 > v_F \quad (236.3)$$

· Eq. (233.1): $1 = V(\vec{q}) \pi^{0R}(\vec{q}, \Omega(\vec{q}))$;

(236.4)

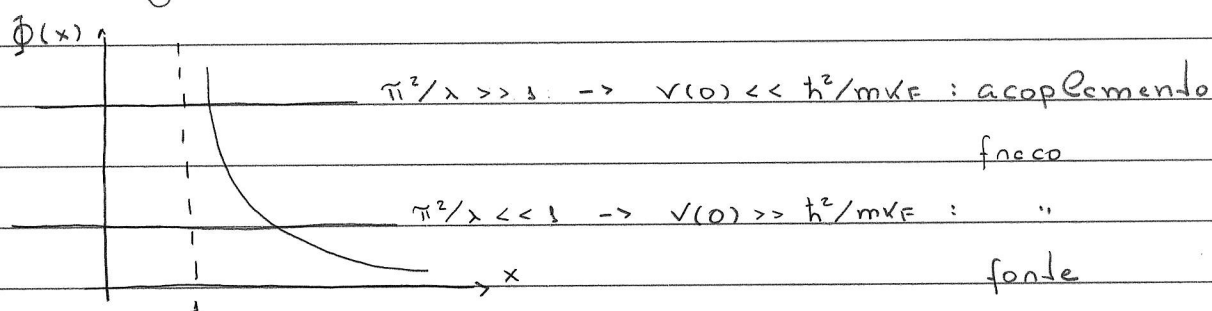
hipótese: $V(\vec{q} \rightarrow 0) = V(0) > 0$

↳ Eqs. (236.2) e (236.4):

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \hbar^2}{m v_F} \cdot \frac{1}{v(q)} = \frac{1}{2} \times \ln \left| \frac{1+x}{x-1} \right| - 1 \equiv \Phi(x) \quad (237.1)$$

$$= \frac{\pi^2 \hbar^2}{m v_F V(0)} \equiv \frac{\pi^2}{\lambda}$$

solução gráfica:



(237.2)

notas: soluções Eq. (237.1) apenas p/ $v(0) > 0$;

como $v(0) = \int d^3 \vec{n} v(\vec{n}) \rightarrow v(\vec{n}) > 0$: interação repulsiva entre férmions

(i) acoplamento fraco:

p/ $x = 1 + \epsilon$; $0 < \epsilon \ll 1$, temos que:

$$\frac{\pi^2}{\lambda} + 1 = \frac{1}{2} (1+\epsilon) \ln(2+\epsilon) - \frac{1}{2} (1+\epsilon) \ln \epsilon \approx -\frac{1}{2} \ln \epsilon$$

$$\hookrightarrow \epsilon \approx \exp(-2\pi^2/\lambda - 2)$$

$$\hookrightarrow c_0 \approx v_F \left(1 + \exp(-2\pi^2/\lambda - 2) \right) \quad (237.3)$$

(ii) acoplamento forte:

como:

$$x \ln \frac{1+x}{x-1} = x \ln x \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x \ln x \left(1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$= x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\approx x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} \right) - x \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} \right) \approx 2 + \frac{2}{3x^2}$$

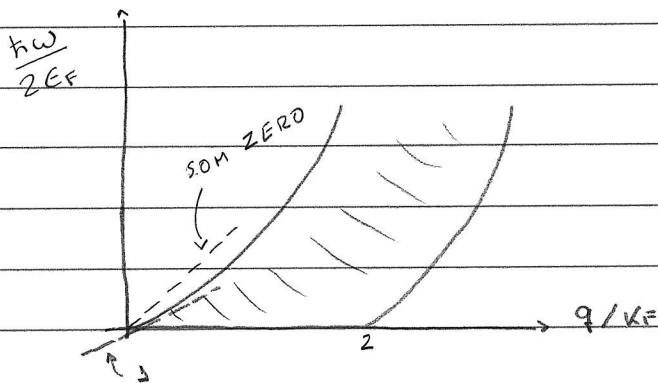
$$\hookrightarrow \frac{\pi^2}{\lambda} \approx 1 + \frac{1}{3x^2} - 1 \rightarrow x^2 = \frac{\lambda}{3\pi^2} \rightarrow C_0 \approx \sqrt{F} \left(\frac{\lambda}{3\pi^2} \right)^{1/2} \quad (238.1)$$

similar Eq. (235.1):

$$\hbar \Omega(\vec{q}) = \hbar C_0 q = \hbar C_0 v_F \frac{q}{v_F} \rightarrow \hbar \Omega(\vec{q}) = \hbar C_0 v_F \cdot \frac{2m}{\hbar^2 v_F^2} \cdot q / v_F$$

$$\frac{2C_0 \cdot m}{\hbar v_F} = \frac{2C_0}{v_F} > 1$$

$$\hookrightarrow \frac{\hbar \Omega(\vec{q})}{2\epsilon_F} = \frac{2C_0}{v_F} \left(\frac{q}{v_F} \right)$$



Obs.:

(1) Eqs. (237.3) e (238.1) \rightarrow C_0 em termos $v(0)$: não-concluído

\hookrightarrow p/ potencial repulsivo de curto-alcance: RPA NOT OK!

veja Prob. 5.8, Fetter p/ aproximação alternativa;

(2) Apesar forma Eq. (236.1), som-zero \neq som usual

· som usual (1ª som):

- atenuado p/ $T \rightarrow 0$;

- condição: $\Omega(q)\bar{v} \ll 1$, onde \bar{v} : ΔT entre colisões partícula;

· som zero:

- observado p/ $T \rightarrow 0$;

- condição: $\Omega(q)\bar{v} \gg 1$: ausência colisões

(3) Obs. experimento: ${}^3\text{He}$ líquido;

medidas espelhamento de nêutrons: veja Fig. 11.13, Mahan.

Sobre as regras de soma (veja Sec. 5.7, Mehon):

verifica-se que:

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} E(\vec{q}, \omega) = \frac{\pi}{2} \omega_p^2 \quad (240.1)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} E(\vec{q}, \omega) = \frac{\pi}{2} v(q) n k_T \quad (240.2)$$

↑ compressibilidade
isotérmica

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} \frac{1}{E(\vec{q}, \omega)} = -\frac{\pi}{2} \omega_p^2; \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} \quad (240.3)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \frac{1}{E(\vec{q}, \omega)} = -\frac{\pi}{2} \quad (240.4)$$

Eqs. (240.1) - (240.4): regras de soma; em particular, Eqs. (240.3) e (240.4): exatas!

ideia: considerar Eqs. (240.3) e (240.4) em RPA p/ $q \rightarrow 0$;

Lembrar Eqs. (234.4), (235.3) e/ou (234.1):

$$\lim_{q \rightarrow 0} E(q, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + O(q^2) \quad (240.5)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{E(q, \omega)} - 1 = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2} = \frac{1}{2} \omega_p \left(\frac{1}{\omega - \omega_p} - \frac{1}{\omega + \omega_p} \right)$$

p/ a corresponde função retardada, podemos considerar:

$\omega \rightarrow \omega + i\eta$: veja Eq. (224.1):

$$\hookrightarrow \frac{1}{\epsilon(q, \omega)} - \frac{1}{\epsilon(q, \omega_p)} = \frac{1}{2} \omega_p \left(\frac{1}{\omega - \omega_p + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_p + i\eta} \right)$$

$$\hookrightarrow \text{Im} \left(\frac{1}{\epsilon(q, \omega)} - \frac{1}{\epsilon(q, \omega_p)} \right) = \text{Im} \frac{1}{\epsilon(q, \omega)} = \frac{-1}{2} \pi \omega_p \left(\delta(\omega - \omega_p) - \delta(\omega + \omega_p) \right)$$

(24.1)

temos que:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^{\infty} d\omega \omega \text{Im} \frac{1}{\epsilon(q, \omega)} = -\frac{\pi}{2} \omega_p^2 \quad ; \quad \text{Eq. (24.3)}$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \int_0^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega} \text{Im} \frac{1}{\epsilon(q, \omega)} = -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad \text{Eq. (24.4)}$$

\hookrightarrow no limite $q \rightarrow 0$, temos que RPA p/ gás eletrons é exata

ou " " " , as excitações de plasmons são as únicas possíveis e as "esgotam" as regras de soma!