Força central.

Refs.: Cap. 8 e Secs. 9.8 e 9.10, Marion
Cap. 3, Goldstein
Secs. 13.13 - 13.16, Symon
Secs. 3-5, Fetter

· inicial: revisão formalismo lagrangiano:

considerar: sistema N-partículas massas m_i e descritas pelas coordenadas generalizadas

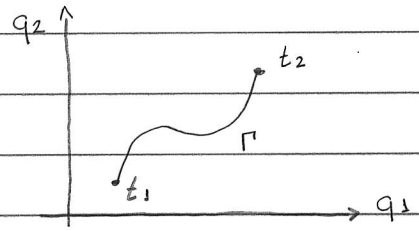
$q_1, q_2, \ldots, q_s$, $s = 3N - k$

k # vínculos!

estado do sistema = pto no espaço de configurações (espaço dimensão = s e definido pelas coordenadas generalizadas)

↳ p/ intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$: movimento sistema = trajetória (curva Γ) no espaço de configurações

Ex.: sistema descrito pelas coordenadas generalizadas q_1 e q_2:



mecânica lagrangiana: baseada no princípio de Hamilton:

o movimento de um sistema no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é tal que a acção S,

tilibra

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_j, \dot{q}_j, t) \qquad (2.1)$$

é estacionário ($\delta S = 0$) para a trajetória do sistema.

Aqui, $L = T - U$: função Lagrangiana (2.2)

$q_j = q_j(t)$

e $\dot{q}_j = \dot{q}_j(t)$: velocidades generalizadas

em particular, p/ sistemas conservativos, temos que

$$L = T - U(q_1, q_2, \ldots, q_s) \qquad (2.3)$$

verifica-se que (veja abaixo)

$$\delta S = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \quad : \text{Eq. de Lagrange} \qquad (2.4)$$

$j = 1, 2, \ldots, S = 3N - K$

· consideram: coord. generalizadas = coord. cartesianas

↳ Eq. (2.3): $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N)$

↳ $\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$

Eq (2.4): $-\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i \ddot{x}_i = 0 \rightarrow m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$: eqs. de movimento:

e similar: $m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$; $m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}$ 2ª Lei Newton!

tilibra

· vamos verificar Eq. (2.4):

considerar: variação $q_j(t) \to q_j(t) + \delta q_j(t)$ da trajetória do sistema w.r.t. trajetória $q_j(t)$ que corresponde extremo ação S c/ condições: $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ (*)

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L = \int dt \left[L\left[q_j(t) + \delta q_j(t);\ \dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t);\ t \right] - L\left[q_j(t);\ \dot{q}_j(t);\ t \right] \right]$$

como, em 1ª ordem em δq_j,

$$L(q_j + \delta q_j;\ \dot{q}_j + \delta \dot{q}_j;\ t) \simeq L(q_j;\ \dot{q}_j;\ t) + \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j,$$

temos que,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right]$$

como $\delta \dot{q}_j = \delta\left(\frac{dq_j}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta q_j)$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}(\delta q_j)}_{= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j(t)\right|_{t_1}^{t_2}} \right]$$

$= 0$, pois (*)

$$\Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \right)\delta q_j$$

como $\delta q_j(t)$ é arbitrário, a condição $\delta S = 0 \to$ Eq. (2.4)!

tilibra

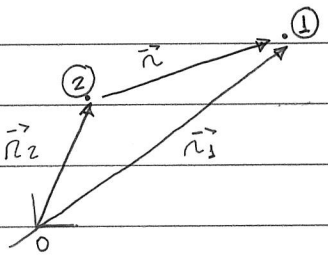
notan: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{x,i}$: componente x, momento linear partícula m_i (3.1)

↳ generalização (3.1) p/ $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$:

$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$: momento generalizado ou momento canonicamente conjugado (3.2)

: sobre o problema de força central:

considerar: sistema: 2 corpos ⊕ interação via força central $\vec{F}$



$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}$

(3.3)

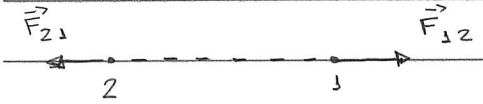
↳ $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Definição: força central: $\vec{F} = F(r)\,\hat{r}$

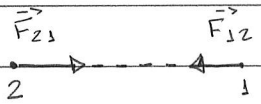
(3.4)

onde $\hat{r} = \vec{r}/r$

em princípio, dois tipos:



: repulsiva



: atrativa

onde $\vec{F}_{ij}$: força sob i devido j

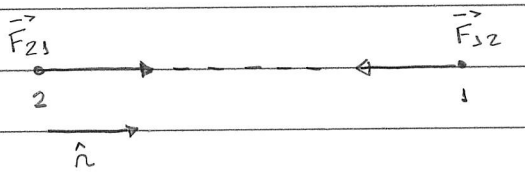
Ex. 1: força gravitacional:

p/ partículas massas m_1 e m_2, temos que:

$$\vec{F}_{12} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \qquad (4.1)$$

e $\vec{F}_{21} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N m^2/kg^2$ (S.I.)

como $G m_1 m_2 > 0$, temos que



: atrativa

Ex. 2: interação eletrostática: Lei de Coulomb:

p/ partículas cargas elétricas q_1 e q_2, temos que

$$\vec{F}_{12} = K q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \qquad (4.2)$$

e $\vec{F}_{21} = K q_1 q_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$

onde a de proporcionalidade $K \sim$ sistema de unidades

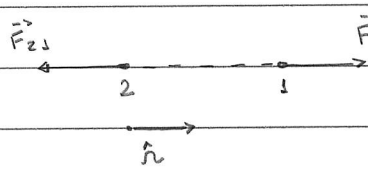
- S.I. : $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7} c^2 \frac{N m^2}{C^2}$ ← velocidade da luz (apenas valor numérico)

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F/m$: a de: permissividade do vácuo

- gaussiano: $K = 1$.

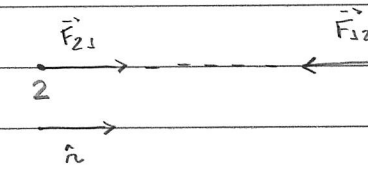
notar:

- se q_1 e q_2: sinais iguais $\rightarrow K q_1 q_2 > 0$

↳ 

: repulsiva

- se q_1 e q_2: sinais opostos $\rightarrow K q_1 q_2 < 0$

↳ 

: atrativa

- ideia: determinar trajetórias sistema 2 corpos ⊕ força central;
duas etapas:
(1) movimento limitado: órbitas planetas (Kepler);

(1) movimento não-limitado:
espalhamento: partículas α ⊕ núcleo atômico
(Rutherford)

- hipótese: sistema conservativo
(ausência forças dissipativas);

- em princípio: sistema com 6 graus de liberdade;
coordenadas generalizadas =
= " cartesianas $r_{i\alpha}$; $i = 1, 2$; $\alpha = x, y, z$;

↳ lagrangiana do sistema:

tilibra

$$L = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \qquad (6.1)$$

notar: $L = L(r_{i\alpha}, \dot{r}_{i\alpha})$

$\Leftarrow$ hipótese $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

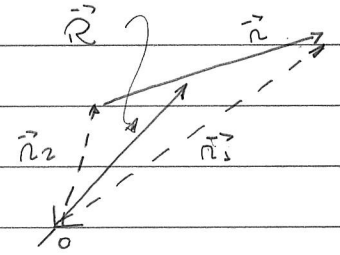
alternativa: coord. generalizadas = $\vec{R}$ e $\vec{r}$,

onde

$\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$: centro de massa (CM)

$M = m_1 + m_2$: massa total

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$: coordenada relativa



(6.2)

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \qquad \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}$$

$$\rightarrow \qquad (6.3)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \qquad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}$$

verifica-se que (exercício), Eqs. (6.1) $\oplus$ (6.3):

$$L = \frac{1}{2} M |\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{1}{2}\mu |\dot{\vec{r}}|^2 - U(r) \qquad (6.4)$$

$$= L_{CM} + L_{REL} = L(\dot{\vec{R}}, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ou $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$: massa reduzida (6.4)

tilibra

notar: $L \neq L(R_i)$; $i = 1,2,3 = x,y,z$

↳ R_i : variáveis cíclicas -> CM em repouso ou movimento uniforme (veja abaixo) (7.1)

notar Eq. (6.4): problema 2 corpos

↳ 2 problemas (independentes) 1 corpo : CM ⊕ REL.

· equações de movimento:

$$\frac{\partial L}{\partial R_i} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_i} = M\dot{R}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} = \frac{\partial U}{\partial r_i} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \mu \dot{r}_i$$

↳ $\frac{\partial L}{\partial R_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}_i}\right) = 0 \rightarrow M\ddot{R}_i = 0$, $i = 1,2,3$ ou $M\ddot{\vec{R}} = 0$

(7.2)

$$\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial r_i} - \mu \ddot{r}_i = 0 \text{ , } i = 1,2,3$$

$$\text{ou } \mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} U$$

lembrar: op. gradiente: $\vec{\nabla} = \hat{x}\partial_x + \hat{y}\partial_y + \hat{z}\partial_z = \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \partial_i = \hat{e}_i \partial_i$

notar Eq. (7.2):

$M\ddot{\vec{R}} = 0 \rightarrow \vec{P}_{CM} = M\dot{\vec{R}} =$ cte : momento linear CM :

: OK c/ Eq. (7.1)

$\Leftrightarrow \sim \vec{F}_{ext} = 0$;

como $\vec{P}_{CM} =$ cte -> CM é referencial inercial ;

tilibra

no REF. CM : $\vec{R} = 0$ e $\vec{P}_{CM} = 0$, temos que:

$$L = L_{REL} = \frac{1}{2}\mu |\dot{\vec{r}}|^2 - U(r) : \tag{8.1}$$

: problema 1-corpo = partícula massa μ sob potencial central $U(r)$!

· Lembrar: força conservativa:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \quad \text{ou} \quad U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}' \tag{8.2}$$

↳ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} U) = 0$: característica força conservativa;

em particular, p/ força central $U = U(r)$;

como $$\vec{\nabla} = \hat{r}\partial_r + \hat{\theta}\frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi \tag{8.3}$$

↳ $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(r) = -\hat{r}\partial_r U(r) = F(r)\hat{r}$

· sobre o momento angular total:

$$\vec{\ell} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \tag{8.4}$$

Eqs. (6.3) ⊕ (8.4) ⊕ $\dot{\vec{R}} = 0$:

$$\vec{\ell} = \frac{1}{M^2} m_1 m_2^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \frac{1}{M^2} m_2 m_1^2 \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$= \frac{m_1 m_2}{M^2}(m_1 + m_2)\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times (\mu \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p} : \tag{8.5}$$

: momento angular partícula massa μ!

tilibra

como Lagrangiano (B.1): simetria esférica

↳ $\vec{e}$: eixo de movimento (veja Cap. 7, Marion p/ detalhes)

lembrar simetria esférica: ✓ rotação w.r.t. ✓ eixo fixo

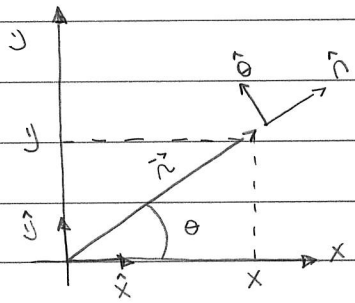
↳ equações de movimento invariantes

· hipótese: $\vec{e} = e\hat{z}$ → movimento ⊂ plano x-y (9.1)

↳ no REF. CM: problema 3D → problema 2D !

Obs.: se $\vec{e} = 0$ → $\vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$: movimento 1D ⊂ plano.

· como movimento ⊂ plano x-y → é interessante escolher coordenadas generalizadas = coordenadas polares:



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = \hat{x}\, r\cos\theta + \hat{y}\, r\sin\theta = r\hat{r}$ (9.2)

relações entre versores:

$\hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$ $\qquad$ $\hat{x} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$

$\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$ $\qquad$ e $\qquad$ $\hat{y} = \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta$

notar: $\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt}(\hat{x}\, r\cos\theta + \hat{y}\, r\sin\theta)$

$= \hat{x}\,\dot{r}\cos\theta + \hat{y}\,\dot{r}\sin\theta + \hat{x}\, r\dot{\theta}(-\sin\theta) + \hat{y}\, r\dot{\theta}\cos\theta$

↳ $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ → $|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ (9.3)

tilibra

↳ Eqs. (8.1), (9.2) e (9.3):

$$L = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) = T - U \qquad (10.1)$$

· eqs. de movimento:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = \mu r\dot{\theta}^2 + F(r) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta}$$

↳ $\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \rightarrow \mu r\dot{\theta}^2 + F(r) - \mu\ddot{r} = 0$

$$\text{ou} \quad \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \qquad (10.2)$$

↳ $\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0$ ou $\mu r^2\dot{\theta} = cte \qquad (10.3)$

· momentos canonicamente conjugados:

Eqs. (3.2) e (10.1):

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r} \quad \text{e} \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} \qquad (10.4)$$

↳ $p_\theta = \mu r^2\dot{\theta} = \ell = cte$: Eq. (10.3): conservação momento angular: ou c/ $L = L(r, \dot{r}, \dot{\theta})$, i.e., θ é variável cíclica! (10.5)

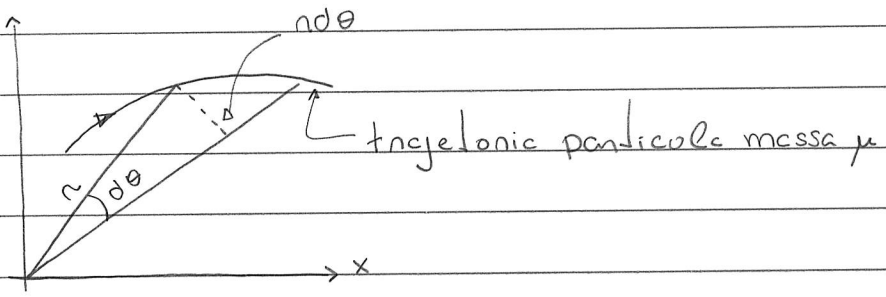
Obs.: Eqs. (8.5) e (9.3):

$$\vec{\ell} = \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \mu r\dot{r}(\hat{r}\times\hat{r}) + \mu r^2\dot{\theta}(\hat{r}\times\hat{\theta}) = \mu r^2\dot{\theta}\hat{z} \qquad (10.6)$$

$(\hat{r}\times\hat{r}) = 0$; $(\hat{r}\times\hat{\theta}) = \hat{z}$

tilibra

notar:



$dA = \frac{1}{2} r \cdot (r d\theta)$: área ~ movimento vetor $\vec{r}$ em intervalo dt

↳ $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{\ell}{2\mu} = cte$: velocidade areal ~ movimento vetor $\vec{r}$: cte : 2ª lei de Kepler (veja abaixo) (11.1)

↑ Eq. (10.5)

· notar: Eq. (10.2) pode ser escrita como

$$\mu \ddot{r} = F(r) + \mu r \dot{\theta}^2 = F(r) + \frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

↑ Eq. (10.5)

(11.2)

↳ $F_c = \mu r \dot{\theta}^2 = \frac{\ell^2}{\mu r^3}$: força centrífuga : lembrar: $F_c = m r \omega^2$

se $F_c = -\frac{dU_c}{dr}$ → $U_c = \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$: potencial centrífugo (11.3)

↳ $\mu \ddot{r} = F(r) + F_c(r) = -\frac{dU}{dr} - \frac{dU_c}{dr} \equiv -\frac{dU_{ef}}{dr}$:

onde $U_{ef}(r) = U(r) + U_c(r)$: potencial efetivo (11.4)

: partícula massa μ, movimento (radial) 1D sob potencial efetivo $U_{ef}(r)$

tilibra

notar: $\dot{r}$ * Eq. (11.4):

$$\mu \dot{r}\ddot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\mu \dot{r}^2) = -\dot{r}\frac{dU_{ef}}{dr} = -\frac{dr}{dt}\frac{dU_{ef}}{dr} = -\frac{dU_{ef}}{dt}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{ef}\right) = 0$$

(12.1)

$$\hookrightarrow \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U_{ef} = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu r^2}}_{\frac{1}{2}\mu r^2 \dot{\theta}^2} + U(r) = E = cte$$

T: veja Eq. (10.1)

energia total do sistema: cte: OK $F(r)$ força conservativa!

· Resumo: problema força central, ctes de movimento:

momento angular $\vec{\ell}$ e energia total: E (12.2)

· sobre o problema radial:

duas possibilidades (A) e (B);

(A) análise via eq. de movimento (10.2) (forma diferencial):

Eq. (11.2): $\mu \ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = F(r)$

Eq. (10.5): $\ell = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{\ell}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}$

(12.3)

$$\hookrightarrow \mu \ddot{r} = \mu \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{\mu \ell}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\ell}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{\ell^2}{\mu r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$$

se $u = \frac{1}{r} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}$

tilibra

↳ Eq. (13.2): $-\frac{\ell^2 u^2}{\mu}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{\ell^2 u^3}{\mu} = F(1/u)$

↳ $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{\ell^2 u^2} F(1/u)$; $u = u(\theta)$

ou (13.1)

$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2} F(r)$; $r = r(\theta)$

nota: solução eq. de movimento (13.1) → determinação trajetória $u = u(\theta)$ ou $r = r(\theta)$

Ex.: partícula livre.

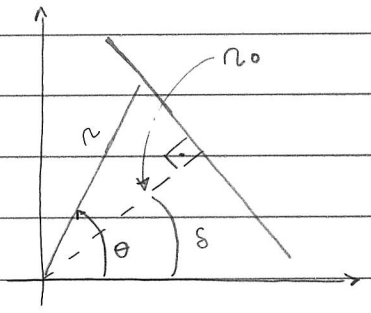
nesse caso, $F(r) = 0$

↳ Eq. (13.1): $u'' + u = 0 \rightarrow u(\theta) = A\cos(\theta - \delta)$

onde A e δ ~ condições iniciais

Como $u(\theta) = 1/r(\theta)$ e definição $A = 1/r_0$

↳ $r_0 = r\cos(\theta - \delta)$: eq. reta em coordenadas polares!



(13.2)

· alternativa: se a trajetória $r = r(\theta)$ é conhecida
↳ $F(r)$ pode ser determinada via (13.1).

tilibra

Ex.: considera partícula cuja trajetória é dada por (p/ detalhes, veja exemplos 8.1 - 8.3, Marion):

$r = k e^{\alpha\theta}$: espiral ; k e α : ctes;

verifica-se que: $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\alpha}{k} e^{-\alpha\theta} \rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\alpha^2}{r}$

⊕ Eq. (13.1) → $F(r) = -\frac{\ell^2}{\mu r^3}(\alpha^2+1)$: força atrativa $F(r) \propto -1/r^3$

Definição: $\beta = \frac{\ell^2}{\mu}(\alpha^2+1)$

Eq. (8.2): $U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}'$;

zero (pto de referência)

nesse caso: $\vec{F} = F(r)\hat{r} = -\frac{\beta}{r^3}\hat{r}$ e $\vec{r}_0 \rightarrow +\infty$: do potencial

↳ $U(r) = -\int_{+\infty}^{r} (-\beta)\frac{1}{r'^3}\hat{r}\cdot(dr'\hat{r}) = \beta\int_{+\infty}^{r}\frac{dr'}{r'^3} = -\frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{r^2}$

Eq. (12.3): $\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{\ell}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\ell}{\mu r^2}\alpha r = \frac{\alpha\ell}{\mu r}$

↳ energia total (12.1):

$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r)$

$= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\alpha\ell}{\mu r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\mu r^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\ell^2}{\mu r^2}(\alpha^2+1) = 0$

tilibra

(B) análise via energia total (12.1) (forma integral)

como $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r) = cte$

$\hookrightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}(E-U) - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}}$ (15.1)

ou (considerando apenas sinal +)

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\underbrace{\left(E - U - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}}}$$

: U_{ef} : Eq. (11.4)

se $r(t=0) = r_0$ -> $t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{2/\mu\,(E - U - \ell^2/2\mu r'^2)}}$ (15.2)

Eq. (15.2): permite determinar $t = t(r)$ ou $r = r(t)$ em termos cte de integração E, ℓ e r_0;

como Eq. (10.5): $\ell = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$ -> $d\theta = \frac{\ell}{\mu r^2(t)}\,dt$;

se $\theta(t=0) = \theta_0$, temos que:

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \frac{\ell}{\mu r^2(t')}\,dt' \qquad (15.3)$$

notar Eqs. (15.2) e (15.3): em princípio,
$r = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$ (equação paramétrica de trajetória)
determinada em termos dtes E, ℓ, r_0 e θ_0
~ soluções eqs. de movimento (10.2) e (10.3) em termos
r_0, $\dot{r}_0$, θ_0 e $\dot{\theta}_0$!

tilibra

alternativa: como $d\theta = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr}dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}dr = \frac{\ell}{\mu r^2 \dot{r}}dr$

↑ Eq. (10.5)

↳ $d\theta = \frac{\ell}{\mu r^2} \cdot \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U - \ell^2/2\mu r^2\right)}}$

se $\theta(r_0) = \theta_0$

↳ $\theta(r) = \pm \int_{r_0}^{r} dr' \frac{\ell/r'^2}{\sqrt{2\mu\left(E - U - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}} + \theta_0$ (16.1)

notar Eq. (16.1): dado $U = U(r)$ → trajetória $\theta = \theta(r)$ ou $r = r(\theta)$ determinada em termos de E, ℓ, r_0 e θ_0!

obs.: em geral, dificuldades solução analítica (16.1);
em particular, p/ $U(r) = k r^{n+1}$, k = cte, verifica-se que:

- p/ $n = -3, -2$ (Kepler), 1 (O.H.): sol. (16.1) em termos funções trigonométricas;
- p/ $n = -7, -5, -4, 0, 3, 5$: " " " "
" elípticas.

· sobre as expressões (15.2) e (16.1):
- similaridade sistema 1D, veja Sec. 2.6, Marion p/ detalhes
↳ determinação características movimento;

· notar: condição p/ 1 soluções:

$$E - U(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} = E - U_{ef}(r) \geq 0 \quad (16.2)$$

tilibra

em particular, se

$E - U_{ef}(r) = 0 \xrightarrow{\text{Eq. (15.1)}} \dot{r} = 0$: condição p/ determinação dos de retorno r_{MIN} e r_{MAX}; (17.1)

↳ $r_{MIN} \leq r \leq r_{MAX}$

em particular, se $r_{MIN} = r_{MAX} \rightarrow \dot{r}(t) = 0 \rightarrow r(t) = cte$: órbita circular!

Ex.: considerar: partícula massa μ sob força central

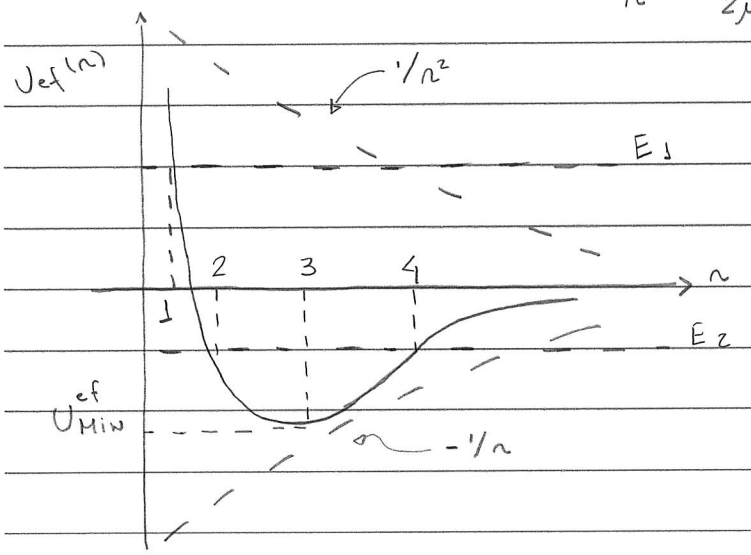
$$\vec{F}(r) = -\frac{K}{r^2}\hat{r} \quad ; \quad K > 0 \tag{17.2}$$

Eq. (8.2): $U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}'$;

nesse caso, podemos considerar: $U(r_0 \rightarrow +\infty) = 0$;

↳ $U(r) = -\int_{+\infty}^{r} \frac{(-K)}{r'^2}\hat{r}\cdot(dr'\hat{r}) = K\int_{\infty}^{r}\frac{dr'}{r'^2} = -\frac{K}{r}$ (17.3)

↳ $U_{ef}(r) = U(r) + U_c(r) = -\frac{K}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$ (17.4)



p/ ℓ fixo! (17.5)

tilibra

similar caso 1D, p/ energia E fixa, podemos afirmar que:

(1) $E \geq 0$: movimento não-limitado;
em particular, se $E = E_1 \rightarrow r = r_1$: pto de retorno;
Ex.: espalhamento

(2) $U_{MIN}^{ef} \leq E < 0$: movimento limitado;
em particular, se $E = E_2 \rightarrow r_2 \leq r \leq r_4$,
r_2 e r_4 : distâncias apsidais;

(18.1)

se $E = U_{MIN}^{ef} \rightarrow r(t) = r_3 = cte$:
órbita circular

(3) $E < U_{MIN}^{ef} \rightarrow \dot{r}^2 < 0 \rightarrow$ NOT OK!

p/ movimento limitado, temos duas possibilidades:

- órbitas fechadas ~ movimento periódico;
- " abertas : veja Fig. 8.4, Marion;

notar: Eq. (16.1) -> determinação $\Delta\theta$ tal que
$r: r_{MIN} \rightarrow r_{MAX} \rightarrow r_{MIN}$:

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{MIN}}^{r_{MAX}} dr \, \frac{\ell/r^2}{\sqrt{2\mu\left(E - U - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}} \qquad (18.2)$$

↑ ~ movimento simétrico

em t!

se $\Delta\theta = 2\pi \frac{n}{m}$, n e $m \in \mathbb{Z}$ -> órbita fechada

c.c. -> " aberta

em particular, p/ $U(r) = k r^{n+1}$, verifica-se que a órbita é fechada p/

$n = 1$: oscilador harmónico

e $n = -2$: interacções gravitacional e electrostática : (19.1)

: teorema de Bertrand (veja Sec. 3.6, Goldstein)

· movimento planetário: o problema de Kepler.

consideram: partícula massa μ sob acção potencial

$$U = -\frac{k}{r} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = F(r)\hat{r} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}, \; k: \text{cte}; \qquad (19.2)$$

ideia: determinar a trajectória da partícula $r = r(\theta)$;

duas possibilidades: (A) forma integral

(B) " diferencial

(A) Forma integral:

Eqs. (16.1) e (19.2):

$$\theta = \int dr \, \frac{l/r^2}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu k}{r} - \frac{l^2}{r^2}}} + C \qquad (19.3)$$

se $u = 1/r \rightarrow du = -\frac{1}{r^2} dr$

$$\hookrightarrow \theta = -\int du \, \underbrace{\frac{l}{\sqrt{2\mu E + 2\mu k u - l^2 u^2}}}_{(I)} + \text{cte}$$

notar: $(I) = 2\mu E + \frac{\mu^2\kappa^2}{\ell^2} - \left(\frac{\mu^2\kappa^2}{\ell^2} - 2\mu\kappa u + \ell^2 u^2\right)$

$\equiv a^2$ $\qquad$ $(\ell u - \mu\kappa/\ell)^2$

$\equiv at$

como $\ell u - \mu\kappa/\ell = at \rightarrow \ell\, du = a\, dt$

↳ $\theta = -\int \frac{a\,dt}{a\sqrt{1-t^2}} + \mathbb{C} \rightarrow -\sin^{-1} t + \mathbb{C} \rightarrow t = \sin(\mathbb{C} - \theta)$

como $a = \left(2\mu E + \frac{\mu^2\kappa^2}{\ell^2}\right)^{1/2} = \frac{\mu\kappa}{\ell}\left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\kappa^2}\right)^{1/2}$

↳ $at = a\sin(\mathbb{C} - \theta) = \ell u - \frac{\mu\kappa}{\ell} = \frac{\mu\kappa}{\ell}\underbrace{\left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\kappa^2}\right)^{1/2}}_{\equiv \varepsilon}\sin(\mathbb{C} - \theta)$

↳ $\underbrace{\frac{\ell^2}{\mu\kappa}}_{\equiv \alpha}\cdot\frac{1}{r} - 1 = \varepsilon\sin(\mathbb{C} - \theta)$ $\qquad (20.1)$

hipótese: $r(\theta = 0) = r_{MIN}$;

Eq. (15.1): condição $\dot{r} = 0 \rightarrow$ distâncias apsidais r_{MIN} e r_{MAX}!

↳ $\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{\kappa}{r}\right) - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{r^2} - \frac{2\mu\kappa}{\ell^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{2\mu E}{\ell^2} = 0$

↳ $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\mu\kappa}{\ell^2} \pm \left(\frac{4\mu^2\kappa^2}{\ell^4} + 2\cdot\frac{4\mu E}{\ell^2}\right)^{1/2}\right)$

$= \frac{\mu\kappa}{\ell^2} \pm \frac{\mu\kappa}{\ell^2}\left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\kappa^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha}\varepsilon$ $\qquad (20.2)$

tilibra

↳ $r_{MIN} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon}$ e $r_{MAX} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$ (21.1)

notar Eq. (20.1): $r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \sin(\zeta - \theta)}$

↳ $r_{MIN} = r(\theta = 0) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \sin\zeta}$ → $\zeta = \pi/2$

↳ $r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ ou $\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta$: (21.2)

: eq. da trajetória $r = r(\theta)$

onde $\alpha = \frac{e^2}{\mu K}$ e $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ee^2}{\mu K^2}}$: excentricidade (veja abaixo)

(B) Forma diferencial:

Eqs. (13.1) e (19.2): $u'' + u = -\mu \frac{1}{e^2u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = -\mu \frac{1}{e^2u^2} - Ku^2$

↳ $u'' + u = \frac{\mu K}{l^2} = \frac{1}{\alpha}$; $u = u(\theta)$ (21.2)

sol.: $u = u_H + u_p$

u_p ↑ sol. particular

u_H ↑ sol. eq. homogênea

como $u_H = \bar{u}_0 \cos(\theta - \theta_0)$ e $u_p = 1/\alpha$

↳ $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} + \bar{u}_0 \cos(\theta - \theta_0) = \frac{1}{\alpha} + \frac{u_0}{\alpha}\cos(\theta - \theta_0)$ (21.3)

tilibra

novamente: considerando $r(\theta = \theta_0 = 0) = r_{MIN}$,

Verifica-se que $u_0 = \varepsilon$!

Exercício: verificar que $[\alpha] =$ comprimento;

· sobre a equação de trajetória (21.2),

- equação de uma secção cônica = cone no plano;

- forma geral eq. de uma secção cônica:

$$\frac{1}{r} = C\left(1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)\right) \qquad (22.1)$$

ε ↑ excentricidade

- temos que:

excentricidade	energia (veja Eq. (21.1))	trajetória/ curva
$\varepsilon > 1$	$E > 0$	hipérbole
$\varepsilon = 1$	$E = 0$	parábola
$0 < \varepsilon < 1$	$E_{MIN} < E < 0$	elipse
$\varepsilon = 0$	$E = E_{MIN} = -\frac{\mu K^2}{2\ell^2}$	círculo

(22.2)

Obs.: comparar Fig. (17.5) e tabela (22.2)

sobre E_{MIN}: lembrar (17.5): órbita circular ~ mínimo $U_{ef}(r)$:

e $\dot{r} = 0$

$$\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_{r_0} = \frac{K}{r_0^2} - \frac{\ell^2}{\mu r_0^3} = 0 \rightarrow r_0 = \frac{\ell^2}{\mu K} = \alpha$$

↳ Eq. (12.1): $E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2}_{=0} + \frac{\ell^2}{2\mu r_0^2} - \frac{K}{r_0} = -\frac{\mu K^2}{2\ell^2}$ (22.3)

tilibra

· detalhes eq. de trajetória (21.2): duas etapas:

(A) movimento limitado: órbitas elípticas / circulares;

(B) " não-limitado: hipérbole: espalhamento.

(A) órbitas elípticas / circulares.

hipótese: energia E da partícula: $-\frac{\mu k^2}{2\ell^2} \leq E < 0$ (23.1)

em coordenadas cartesianas, verifica-se que a Eq. (21.1) (veja pgs. 23.1 e 23.2 p/ detalhes sobre elipse):

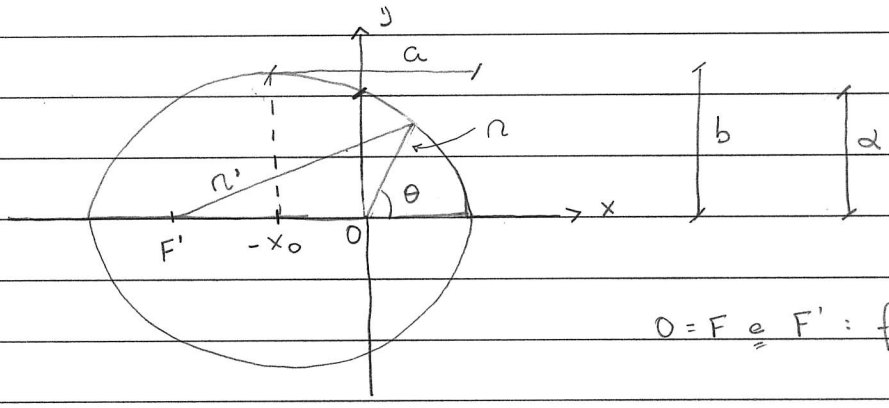
$$\frac{(x+x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{: elipse centro em } (-x_0, 0) \qquad (23.2)$$

onde $a = \frac{1}{2}(r_{MIN} + r_{MAX}) = \frac{\alpha}{1-\epsilon^2}$: semieixo maior

$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$: semieixo menor

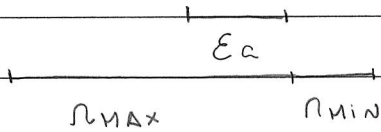
notar: $b^2 = \alpha a$ (23.3)

$x_0 = \varepsilon a$ e 2α: lado reto da órbita



(23.4)

O = F e F': focos



· sobre a Eq. (23.2):

como $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, Eq. (21.2) assume a forma:

$$\alpha = r + \varepsilon r\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2} + \varepsilon x$$

$$\hookrightarrow (\alpha - \varepsilon x)^2 = \alpha^2 - 2\varepsilon\alpha x + \varepsilon^2 x^2 = x^2 + y^2$$

$$\hookrightarrow (1-\varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon\alpha x + y^2 = \alpha^2$$

$$(1-\varepsilon^2)\left(x^2 + 2\cdot\frac{\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2}x + \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\right)$$

pois $\varepsilon < 1$ $\Rightarrow 1-\varepsilon^2 > 0$

$$\left(x + \frac{\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2}\right)^2$$

$$\hookrightarrow (1-\varepsilon^2)\underbrace{\left(x + \frac{\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2}\right)^2}_{=x_0} + y^2 = \alpha^2 + \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{(x+x_0)^2}{\underbrace{\frac{\alpha^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}_{=a^2}} + \frac{y^2}{\underbrace{\frac{\alpha^2}{1-\varepsilon^2}}_{=b^2}} = 1 \quad : \text{Eq. (23.2)!}$$

· Definição elipse (veja Sec. 3, FeHen):
conjunto de ptos tais que a soma das distâncias aos dois focos fixos é cte, isto é,

$r + r' = 2a$: veja Fig. (23.4)

onde a: semieixo maior e $2\epsilon a$: distância entre focus F e F';

temos que:

$$r'^2 = r^2 + (2\epsilon a)^2 - 2 \cdot r \cdot (2\epsilon a) \cos(\pi - \theta) \qquad (23.5)$$

$$(2a - r)^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4\epsilon^2 a^2 + 4\epsilon a r \cos\theta$$

$$\Rightarrow a(1 - \epsilon^2) = r + \epsilon r \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{a(1-\epsilon^2)}{r} = 1 + \epsilon \cos\theta \quad : \text{Eqs. (21.2) e (23.3)}$$

tilibra

verifica-se que:

· Eqs. (21.1) e (23.3): $r_{MIN} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon) = a(1-\varepsilon)$

(24.1)

$$r_{MAX} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2}(1+\varepsilon) = a(1+\varepsilon)$$

· Eqs. (21.2) e (23.3):

como $1-\varepsilon^2 = 1-\left(1+\frac{2E\ell^2}{\mu k^2}\right) = -\frac{2E\ell^2}{\mu k^2} = \frac{2|E|\ell^2}{\mu k^2}$

↳ $a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{\ell^2}{\mu k} \cdot \frac{\mu k^2}{2|E|\ell^2} = \frac{k}{2|E|}$: $a \propto E$

(24.2)

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\ell^2}{\mu k} \cdot \sqrt{\frac{\mu k^2}{2|E|\ell^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}} \quad : b \propto \ell; E$$

· notação apsides:

r_{MIN}	r_{MAX}	(24.3)
pericentro	apocentro	
periélio	afélio	: mov. em torno sol
perigeu	apogeu	: " " " terra

· lembrar propriedade elipse: conjunto de pontos tal que soma distância dos focos (veja Fig. 23.4):

$$r + r' = 2a \qquad (24.4)$$

· sobre o período τ da órbita:

tilibra

Eq. (15.1): $\int_0^{\tau} dt = \frac{2\mu}{\ell} \int_0^{A} dA'$

Eq. (24.2)

↳ $\tau = \frac{2\pi}{\ell} \cdot A = \frac{2\pi}{\ell} \cdot \pi a b = \frac{2\pi\mu}{\ell} \sqrt{\alpha}\, a^{3/2} = \pi k \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{|E|^{3/2}}$

Eq. (23.3): $b^2 = \alpha a$

em particular, temos que:

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2\mu^2}{\ell^2} \cdot \frac{\ell^2}{\mu k} \cdot a^3 \rightarrow \tau^2 = \frac{4\mu\pi^2}{k} a^3 \qquad (25.3)$$

notar: $\tau^2 \propto a^3$: 3ª Lei de Kepler (veja abaixo)

Obs.: procedimento acima: permite determinação trajetória
$r = r(\theta)$;
em princípio, Eq. (15.2) permite determinar $t = t(r)$ ou
$r = r(t)$;
além disso, variação Eq. (15.3) " " $t = t(\theta)$ ou
$\theta = \theta(t)$:

como $dt = \frac{\mu}{\ell} r^2 d\theta = \frac{\mu}{\ell} r^2(\theta) d\theta = \frac{\mu\alpha^2}{\ell} \cdot \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2}$

↳ $$t = \frac{\mu\alpha^2}{\ell} \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{(1 + \varepsilon\cos\theta')^2}; \qquad (25.4)$$

entretanto, procedimento (15.2) ⊕ (25.4): mais elaborado!
(p/ detalhes, veja Sec. 3.8, Goldstein)

tilibra

· Leis de Kepler:

- início Sec. XVII, anteriores leis de Newton;
- baseadas em observações de Tycho Brahe;

I - Os planetas se movimentam em órbitas elípticas em torno do sol, que está em um dos focos;

II - A área/tempo percorrida pelo raio vetor definidos pelas posições do sol e do planeta é cte;

III - O quadrado do período de revolução é proporcional ao cubo do semieixo maior de órbita do planeta.

(26.1)

notar:

- 2ª lei de Newton ⊕ $F(r) \sim 1/r^2$ → Eq. (21.2) ~ 1ª lei;

- eq. de movimento (10.5) ~ $\vec{\ell}$ = cte → Eq. (11.1):

: $dA/dt = \ell/2\mu$ ~ 2ª lei; ← ok p/ força central!

- período órbita elíptica: Eq. (25.3) ~ 3ª lei; (26.2)

notar Eq. (26.2): 2ª lei de Newton ⊕ força gravitacional $\sim 1/r^2$
↳ Eq. (26.1)!

Obs.: 3ª lei: Kepler: cte de proporcionalidade igual p/ todos os planetas;

entretanto, como $K = GmM$ e $\mu = \frac{mM}{m+M}$,

onde m: massa planeta
e M: " sol

tilibra

↳ Eq. (25.3): $\tau^2 = \frac{\mu}{K} \cdot 4\pi^2 a^3 = \frac{mM}{m+M} \cdot \frac{1}{GmM} \cdot 4\pi^2 a^3$

$$= \frac{4\pi^2}{G(m+M)} a^3 \qquad (26.3)$$

↳ afirmação Kepler OK apenas se $m \ll M$!

p/ detalhes, veja Sec. 3.15, Symon.

tiiibra

· Vetor de Laplace-Runge-Lenz.

ideia: verificar que o problema de Kepler apresenta uma cte de movimento (vetorial) adicional além do momento angular;

2ª lei de Newton p/ partícula sob força central:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = F(r)\hat{r} \qquad (27.1)$$

↳ $\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{\ell} = F(r)\hat{r} \times (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mu F(r)}{r} \underbrace{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}_{(I)}$

lembrar identidade: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

↳ $(I) = \underbrace{\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = r\dot{r}}\vec{r} - r^2\frac{d\vec{r}}{dt} = r\dot{r}\vec{r} - r^2\frac{d\vec{r}}{dt}$

↳ $\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{\ell} = -\mu r^2 F(r)\underbrace{\left(\frac{1}{r}\frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\dot{r}}{r^2}\vec{r}\right)}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d\hat{r}}{dt}}$

como, nesse caso, $\vec{\ell} = cte$, temos que:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{\ell}) + \mu r^2 F(r)\frac{d\hat{r}}{dt} = 0 \qquad (27.2)$$

notar Eq. (27.2): OK p/ ✓ força central $\vec{F} = F(r)\hat{r}$!

tilibra

hipótese: $F(r) = -\frac{\kappa}{r^2}$, κ: cte: problema de Kepler!

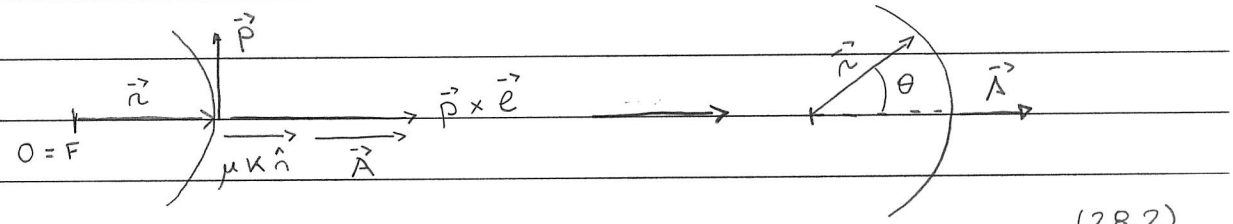
↳ Eq. (27.2): $\frac{d}{dt}(\vec{p}\times\vec{e}) - \mu\kappa\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p}\times\vec{e} - \mu\kappa\hat{r}\right) = 0$

↳ $\vec{A} \equiv \vec{p}\times\vec{e} - \mu\kappa\hat{r}$ = cte: vetor Laplace-Runge-Lenz: (28.1)

: cte de movimento p/ problema de Kepler!

notar: $\vec{A}\cdot\vec{e} = (\vec{p}\times\vec{e})\cdot\vec{e} - \mu\kappa\hat{r}\cdot\vec{e} = 0 \rightarrow \vec{A} \in$ plano da órbita

como $\vec{A}$: vetor cte → análise no pericentro é suficiente p/ determinação direção e sentido:



(28.2)

de fato: Eq. (9.3): $\vec{p} = \mu\dot{r}\hat{r} + \mu r\dot{\theta}\hat{\theta}$

Eq. (24.3)

no pericentro: $\dot{r} = 0$ e $r = r_{MIN} = \alpha/1+\varepsilon$

↳ $\vec{p}\times\vec{e} = \mu r_{MIN}\dot{\theta}\,e\,\hat{n} = \mu r_{MIN}\cdot\frac{e^2}{\mu r_{MIN}^2} = \frac{e^2}{\alpha}(1+\varepsilon) = \mu\kappa(1+\varepsilon)$

(Eq. (10.5))

↳ $|\vec{p}\times\vec{e}| = \mu\kappa(1+\varepsilon) > \mu\kappa$!

tilibra

notan: $\vec{A}\cdot\vec{r} = A r\cos\theta = \vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{\ell}) - \mu k r$

$\vec{\ell}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = \ell^2$

↳ $\ell^2 = \mu k r + A r\cos\theta \rightarrow \underbrace{\frac{\ell^2}{\mu k}}_{=\alpha}\cdot\frac{1}{r} = 1 + \frac{A}{\mu k}\cos\theta$ (28.3)

⊕ eq de órbita (21.2), temos que:

$\frac{A}{\mu k} = \varepsilon \rightarrow A^2 = \mu^2 k^2\left(1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}\right) = \mu^2 k^2 + 2\mu E \ell^2$

em resumo, temos que:

$\vec{A}\cdot\vec{\ell} = 0 \;\Leftrightarrow\; A^2 = \mu^2 k^2 + 2\mu E\ell^2$ (28.4)

· notan: p/ $F(r) = -k/r^2$

↳ em princípio: $\vec{\ell}, \vec{A}, E$: clés de movimento (7 clés)

⊕ 2 vínculos (28.4) → 5 clés de movimento independentes!

· obs.: mecânica quântica, átomo H:

degenerescência níveis de energia p/ ≠ números quânticos ℓ ~ conservação vetor $\vec{A}$!

· Estabilidade de órbitas circulares.

Lembrar Fig. (17.5) e Tabela (22.2) ~ partícula massa μ sob $U(r) = -k/r$, $k > 0$:

se $E = U_{MIN}^{ef} = -\mu k^2/2\ell^2$ → trajetória = órbita circular!

ideia: determinar condições p/ ∃ e estabilidade órbita circular p/ partícula sob potencial central $U(r)$;

2 procedimentos equivalentes:

(A) análise via $U_{ef}(r)$: Eq. (11.4);

(B) " " eq. de movimento (11.4).

(A) potencial efetivo.

· ∃ órbita circular → $r = \rho = cte$ → $\dot{r} = 0$ → $\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_{r=\rho} = 0$ (29.1)

como $U_{ef}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$: Eq. (11.4)

↳ $\frac{dU_{ef}}{dr} = \frac{dU}{dr} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = -F(r) - \frac{\ell^2}{\mu r^3}$

↳ Eq. (29.1): $-F(\rho) - \frac{\ell^2}{\mu\rho^3} = 0$ → $\ell^2 = -\mu\rho^3 F(\rho)$ (29.2)

notar: condição (29.2) ou apenas se $F(r) < 0$ ou F: atrativa;

· similar caso 1D: veja Cap. 2, Marion:

órbita circular estável ~ $r = \rho$: mínimo $U_{ef}(r)$: $\left.\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}\right|_{r=\rho} > 0$:

: veja, e.g., Fig. (17.5) (29.3)

tilibra

notar: $\frac{d^2U_{ef}}{dr^2} = \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{3e^2}{\mu r^4} = -F'(r) + \frac{3e^2}{\mu r^4}$

↳ Eq. (29.3): $-F'(p) + \frac{3e^2}{\mu p^4} > 0$ (30.1)

Ex.: considerar partícula massa μ sob força atrativa

$\vec{F}(r) = -\frac{\kappa}{r^n}\hat{r}$, $\kappa > 0$; (30.2)

como $\vec{F} = -\vec{\nabla}U \rightarrow F(r)\hat{r} = -\hat{r}\partial_r U \rightarrow U(r) = -\frac{\kappa}{n-1}\cdot\frac{1}{r^{n-1}}$:

: notar escolhe zero (pto de referência) potencial : $U(r\rightarrow+\infty)\rightarrow 0$.

↳ $U_{ef}(r) = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\kappa}{r^{n-1}} + \frac{e^2}{2\mu r^2}$: Eq. (13.4)

temos que:

$\frac{dU_{ef}}{dr} = \frac{\kappa}{r^n} - \frac{e^2}{\mu r^3}$ e $\frac{d^2U_{ef}}{dr^2} = -n\frac{\kappa}{r^{n+1}} + \frac{3e^2}{\mu r^4}$ (30.3)

condição (29.1): $\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_p = 0 \rightarrow \frac{\kappa}{p^n} = \frac{e^2}{\mu p^3} \rightarrow p^{n-3} = \frac{\mu\kappa}{e^2}$: ou

" (29.3): $\left.\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}\right|_p > 0$

↳ $-\frac{n\kappa}{p^{n+1}} + \frac{3e^2}{\mu p^4} = -\frac{n}{p^{n+1}}\cdot\frac{e^2}{\mu}\cdot p^{n-3} + \frac{3e^2}{\mu p^4} = \frac{(3-n)e^2}{\mu p^4} > 0$

↑ Eq. (30.3) (30.4)

↳ órbita circular estável apenas se $n < 3$!

tilibra

(B) eq. de movimento.

Eq. (11.4): $\mu\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = F(r)$

· $\exists$ orbita circular $\rightarrow r = \rho = cte \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\hookrightarrow -\frac{\ell^2}{\mu\rho^3} = F(\rho) = -F_c(\rho) \rightarrow \ell^2 = -\mu\rho^3 F(\rho)$: condição (29.2)

↑ veja Eq. (11.3)

· sobre a estabilidade: consideram pequenas oscilações radiais em torno $r = \rho$: raio órbita circular;

se $r = \rho + x$, onde $\frac{|x|}{\rho} << 1$, temos que:

$-\ddot{r} = \ddot{x}$

$$-\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(\rho+x)^3} = \frac{1}{\rho^3}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^{-3} \simeq \frac{1}{\rho^3}\left(1 - \frac{3x}{\rho} + 6\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \dots\right)$$

(veja Eq. (D.10), Marion.)

$$\simeq \frac{1}{\rho^3} - 3\frac{x}{\rho^4} \qquad (31.1)$$

$$-F(r) = F(\rho+x) \simeq F(\rho) + xF'(\rho) + \frac{1}{2!}x^2F''(\rho) + \dots$$

↑ veja Eq. (A.6), Marion

Eq. de movimento (11.4) ⊕ aproximações (31.1):

$$\mu\ddot{x} - \frac{\ell^3}{\mu}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{3x}{\rho^4}\right) \simeq F(\rho) + xF'(\rho) + O(x^2)$$

tilibra

↳ $\mu\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{3\ell^2}{\mu\rho^4} - F'(\rho)\right)}_{\equiv \mu\omega_n^2} x - \underbrace{\left(\frac{\ell^2}{\mu\rho^3} + F(\rho)\right)}_{=0 \text{ : condição (29.2)!}} \simeq 0$ (32.1)

↳ $\ddot{x} + \omega_n^2 x \simeq 0$: eq. de movimento oscilador harmônico 1D !

↳ órbita circular estável se $\omega_n^2 > 0 \rightarrow \frac{3\ell^2}{\mu\rho^4} - F'(\rho) > 0$:

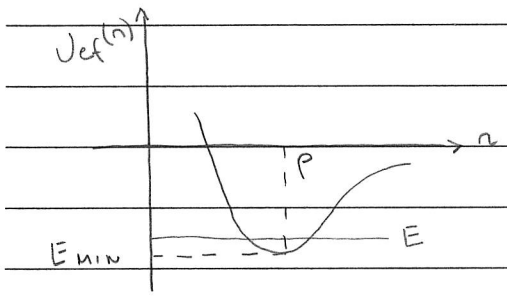
: condição (30.1)!

notar: $\omega_n^2 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{3\ell^2}{\mu\rho^4} - F'(\rho)\right) = \frac{1}{\mu}\left.\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}\right|_\rho$ (32.2)

$$= \frac{1}{\mu}\left(\frac{-3}{\mu\rho^4}\cdot\mu\rho^3 F(\rho) - F'(\rho)\right) = -\frac{F(\rho)}{\mu}\left(\frac{3}{\rho} + \frac{F'(\rho)}{F(\rho)}\right)$$

como $-F(\rho) > 0 \rightarrow \frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0$: condição estabilidade órbita circular

· hipótese: $E = E_{MIN} + \Delta E$, $\Delta E > 0$ e $\Delta E / E_{MIN} << 1$



↳ Eq. (32.2): $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\mu}\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}}$: frequência pequenas oscilações radiais em torno $r = \rho$!

Ex.: considerar partícula massa μ sob força atrativa

$$\vec{F}(r) = -\frac{\kappa}{r^n}\hat{r} \quad \text{ou} \quad U(r) = \frac{-\kappa}{n-1}\cdot\frac{1}{r^{n-1}};$$

↳ Eqs. (30.4) e (32.2):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{(3-n)e^2}{\mu\rho^4}} = \sqrt{3-n}\cdot\frac{\ell}{\mu\rho^2} \qquad (33.1)$$

Eq. (10.5): $\mu r^2\dot{\theta} = \ell$ p/ órbita circular $\rightarrow$ $\mu\rho^2\omega = \ell$

$r = \rho$

↑ frequência movimento angular!

↳ $\frac{\omega_n}{\omega} = \sqrt{3-n}$

notar: p/ $n=2$: $\frac{\omega_n}{\omega} = 1$: ok c/ condição (19.1) p/ órbita fechada!

p/ $n=-1$: $\frac{\omega_n}{\omega} = 2$

Exemplos adicionais: veja Exemplos 8.6 e 8.7, Marion.

Ex.: P.3.28.G.: considerar partícula massa m e carga elétrica q sob campo monopolo magnético ⊕ potencial central $U(r)$;

campo $\vec{B}$ mon. magnético: $\vec{B} = \frac{b\vec{r}}{r^3}$; b = dc ~ "carga magnética"

(a) considerar $\vec{r}\times d\vec{p}/dt$ e mostrar que

$$\vec{J} = \vec{\ell} - \frac{qb}{c}\hat{r} = \text{cte de movimento;}$$

tilibra

(b) considerar processo determinação vetor de Laplace-Runge-Lenz $\vec{A}$ c/ $\vec{e} \to \vec{D}$ e determinar $F(r)$ tal que $\exists$ cte de movimento similar $\vec{A}$;

(a) eq. de movimento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\frac{1}{c} q \vec{v} \times \vec{B}}_{\vec{F}_B: \text{lei de Lorentz (gaussiano)}} + F(r)\hat{r} \neq F_{central} \to \vec{e} \text{ não é cte de movimento!}$$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{qb}{cr^3} \dot{\vec{r}} \times \vec{r} + F(r)\hat{r}$$

notar:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{qb}{cr^3} \underbrace{\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r})}_{(I)} + \underbrace{F(r)\, \vec{r} \times \hat{r}}_{=0} = \frac{qb}{c} \frac{d\hat{r}}{dt}$$

como $(I) = \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \right) = r^2 \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{r} \underbrace{\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)}_{r\dot{r}} \overset{\text{Veja Eq. (27.2)}}{=} r^3 \frac{d\hat{r}}{dt}$

$$r^3 \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{1}{r^2} \dot{r} \vec{r} \right)$$

como $d\vec{r}/dt \times \vec{p} = 0$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{qb}{c} \hat{r} \right)$$

$$\hookrightarrow \vec{D} = \vec{e} - \frac{qb}{c} \hat{r} \text{ : cte de movimento}$$

tilibra

(b) similar Eq. (27.1):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{D} = \underbrace{\frac{1}{c} q (\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{D}}_{(I)} + \underbrace{F(r)\, \hat{r} \times \vec{D}}_{(II)}$$

notar: $(I) = \frac{1}{c} q \frac{b}{r^3} \underbrace{(\vec{v} \times \vec{r}) \times \vec{e}}_{=0} - \left(\frac{qb}{c}\right)^2 \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r^3} \underbrace{\left((\vec{v} \times \vec{r}) \times \vec{r}\right)}_{= -d\hat{r}/dt}$

$$(II) = \frac{F(r)}{r} \underbrace{\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v})\, m}_{\vec{e}} = \frac{F(r)}{r} \cdot r^3 \frac{d\hat{r}}{dt} \cdot m$$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{D} = \frac{d}{dt}(\vec{p} \times \vec{D}) = \underbrace{\left(\left(\frac{qb}{c}\right)^2 \frac{1}{r} - m F(r) r^2\right)}_{\equiv m\kappa} \frac{d\hat{r}}{dt}$$

se $m\kappa = cte \rightarrow \vec{p} \times \vec{D} - m\kappa \hat{r} = cte$: similar velon $\vec{A}$:

: Eq. (28.1) ;

nesse caso : $F(r) = -\frac{\kappa}{r^2} + \left(\frac{qb}{c}\right)^2 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r^3}$

tilibra

· Precessão do periélio

Vimos que: se $F(r) \propto 1/r^2$ → órbita elíptica fechada

↳ periélio fixo ou $r_{MIN} = r(\theta = 0)$

se $F(r) \propto 1/r^2 + 1/r^n$ → precessão do periélio:

↑ r, e.g., efeito demais planetas!

vamos considerar correção relativística $1/r^4$;

nesse caso: $$F(r) = -\frac{GMm}{r^2}\left(1 + \frac{3\ell^2}{m^2c^2r^2}\right), \qquad (36.1)$$

onde m: massa planeta

M: " sol

c: velocidade propagação interação gravitacional = " luz.

Eq. de movimento (13.1) c/ $\mu \simeq m$:

$$u'' + u = -m\frac{1}{\ell^2u^2}\cdot(-1)\,GmM u^2\left(1 + \frac{3\ell^2}{m^2c^2}u^2\right)$$

$$= \frac{Gm^2M}{\ell^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 \; ; \; u = u(\theta) = 1/r(\theta)$$

como $\alpha = \frac{\ell^2}{mk} = \frac{\ell^2}{m(GMm)}$ e $\delta \equiv \frac{3GM}{c^2}$ (36.2)

↳ $u'' + u = \frac{1}{\alpha} + \delta u^2$: comparar c/ eq. de movimento (21.2)

verifica-se que $\frac{\delta u^2}{1/\alpha} = \alpha\delta u^2 = 3\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 10^{-8}$ (36.3)

(veja abaixo)

tilibra

como $\alpha\delta u^2 << 1$ -> solução (36.2) via "método perturbativo":

(1) se $\delta = 0$ -> solução (36.2): Eq. (21.2):

$$u_0 = \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon\cos\theta) \quad : \text{sol. ordem } (\delta/\alpha)^0 \qquad (37.1)$$

substituindo (37.1) no R.H.S. Eq. (36.2), temos que:

$$u'' + u = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2}\Big(1 + 2\varepsilon\cos\theta + \underbrace{\varepsilon^2\cos^2\theta}_{\varepsilon^2 \cdot 1/2 \cdot (1+\cos 2\theta)}\Big)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(I)}$$

Se $u_p(\theta) \equiv \frac{\delta}{\alpha^2}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \varepsilon\theta\sin\theta - \frac{1}{6}\varepsilon^2\cos 2\theta\right)$,

verifica-se que (exercício): $u''_p + u_p = (I)$

como $u''_0 + u_0 = 1/\alpha$

↳ (2) solução (36.2) em ordem $(\delta/\alpha)^1$:

$$u_1 = u_0 + u_p + O\left((\delta/\alpha)^2\right) \qquad (37.2)$$

$u_1(\theta)$ pode ser escrita como:

$$u_1 = \frac{1}{\alpha}(1 + \varepsilon\cos\theta) + \underbrace{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\alpha}\varepsilon\theta\sin\theta}_{\text{cte}} + \underbrace{\frac{\delta}{\alpha^2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)}_{\text{cte}} - \underbrace{\frac{\delta\varepsilon^2}{6\alpha^2}\cos 2\theta}_{\text{periódico}}$$

$\alpha\,\theta \sim$ conexões

⊕ imponderáveis!

$\sim \frac{\delta\varepsilon^2}{6\alpha^2}$

tilibra

$\hookrightarrow u_1 \simeq \frac{1}{\alpha}\left(1 + \varepsilon\cos\theta + \frac{\delta}{\alpha}\varepsilon\theta\sin\theta\right)$

$= \frac{1}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha}\underbrace{\left(1\cdot\cos\theta + \frac{\delta\theta}{\alpha}\sin\theta\right)}_{(I)}$

como $\frac{\delta\theta}{\alpha} << 1 \rightarrow \sin\frac{\delta\theta}{\alpha} \simeq \frac{\delta\theta}{\alpha}$ e $\cos\frac{\delta\theta}{\alpha} \simeq 1$

$\hookrightarrow (I) \simeq \cos\frac{\delta\theta}{\alpha}\cos\theta + \sin\frac{\delta\theta}{\alpha}\sin\theta = \cos\left(\theta - \frac{\delta}{\alpha}\theta\right)$

$\hookrightarrow u_1(\theta) \simeq \frac{1}{\alpha}\left(1 + \varepsilon\cos\left(\theta(1-\delta/2)\right)\right)$: (38.1)

: compare Eq. (21.1) !

como, em $t=0$: $\theta(\theta=0) = \theta_{MIN}$

$\hookrightarrow$ planeta retorna ao periélio qdo:

$\theta\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) = 2n\pi \xrightarrow{n=1} \theta = \frac{2\pi}{1-\delta/2} \simeq 2\pi\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)$

$\hookrightarrow \Delta = \frac{2\pi\delta}{\alpha}$: notação do periélio / revolução ! (38.2)

como semieixo maior $a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{\ell^2}{Gm^2M}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2}$: Eq. (23.3)

$\hookrightarrow \Delta = 6\pi\left(\frac{GMm}{c\ell}\right)^2 = 6\pi\cdot\frac{GM}{ac^2(1-\varepsilon^2)}$

Ex.: veja tabela 8.2, Marion:

p/ Mercúrio: $\Delta = 43$ segundos de arco / século.

tilibra

Exercício: gráfico polar Eq. (38.1) p/ $\varepsilon = 0.5$ e $\delta/\alpha = 0.1$ a fim de verificar a precessão do periélio da elipse!

· sobre a Eq. (36.3):

$$\alpha \delta u^2 = \frac{\ell^2}{G m^2 M} \cdot \frac{3GM}{c^2} \cdot \frac{1}{r^2} = 3 \cdot \frac{\ell^2}{m^2 r^2} \cdot \frac{1}{c^2}$$

como $\ell = m r^2 \dot{\theta} = m r^2 \omega$: Eq. (10.5)

↳ $\alpha \delta u^2 = 3 \cdot \frac{(\omega r)^2}{c^2} = 3\left(\frac{v}{c}\right)^2$

velocidade orbital média Mercúrio : $v = 47,87$ Km/s

" " " Terra : $v = 29,78$ Km/s

· Espalhamento.

ideia: · descreven o processo de colisão entre duas partículas considerando a interacção específica entre as partículas;

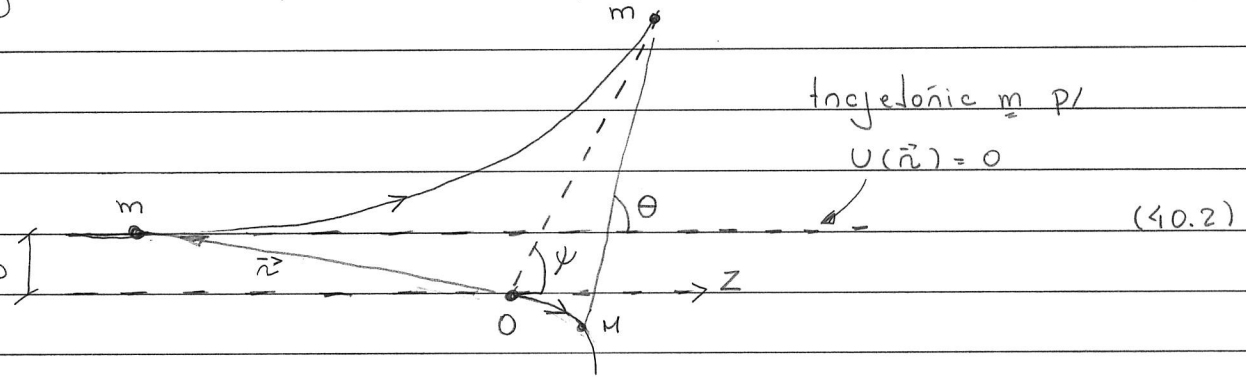
· no REF. CM, similar Eq. (8): problema efetivo 1-corpo = partícula massa μ sob acção potencial $U(\vec{r})$ ou espalhamento " " " pelo " $U(\vec{r})$;

· quantidades úteis: parâmetro de impacto b;
secção de choque

hipótese: potencial de interacção partícula-alvo: curto alcance:
$U(r) \to 0$ p/ $r > a$: comprimento característico do sistema; (40.1)
↳ p/ $r >> a$: partícula incidente/espalhada: " livre: trajetória rectilínea!

considerar: partícula incidente massa m, velocidade $\vec{u}$;
e alvo " M, " $V = 0$;
em repouso na origem O: REF. LAB;

geometria do processo de espalhamento; REF. LAB:



(40.2)

ψ: ângulo espalhamento w.r.t. REF. LAB
θ: " " " REF. CM

tilibra

notar: momento angular partícula incidente:

$$\ell = |\vec{r} \times \vec{p}| = m|\vec{r} \times \vec{u}| = mu r \sin\varphi = mub$$

p/ $r >> a$, temos que: $E = T_0 = \frac{1}{2}mu^2 \rightarrow u = \sqrt{2E/m}$

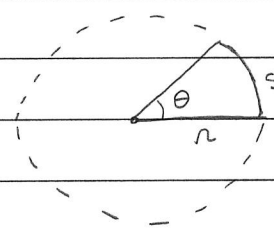
$\hookrightarrow \ell = b\sqrt{2mE}$: mom. angular partícula w.r.t. O. (41.1)

Eq. (41.1): p/ b e E fixos $\rightarrow$ ℓ é determinado $\rightarrow$
ângulo de espalhamento χ ou θ
(definido pela tangente nas linhas da partícula espalhada em $r >> a$) é determinado!

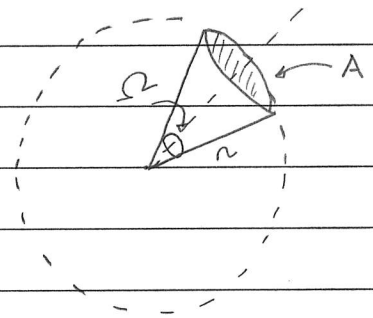
· p/ um feixe de partículas incidentes, temos que $0 \leq b \leq b_0$
$\hookrightarrow$ descrição apropriada em termos de distribuição de ângulos de espalhamento
ou probabilidade de espalhamento p/ ângulo χ ou θ!

próxima etapa: definição secção de choque;

lembrar: ângulo sólido:



$s = r\theta$



$A = r^2\Omega$

em coordenadas esféricas: $dA = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

como $dA = r^2 d\Omega \rightarrow d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ (41.2)

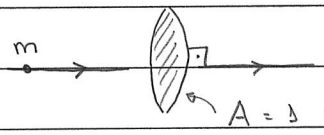
tilibra

considerar: feixe partículas incidentes (não-interagentes),
massa m, velocidade $\vec{v}_0$;
feixe caracterizado por I e n,

onde:

- I: número de partículas incidentes / área · tempo:

: intensidade do feixe



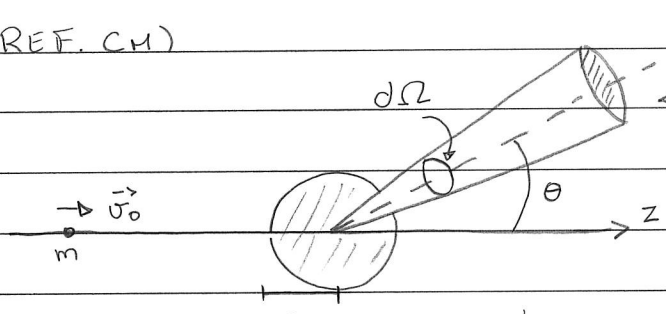
- n: densidade de partículas incidentes: # partículas / volume

$\hookrightarrow I = n v_0$ (42.1)

- N: número partículas espalhadas direção $\hat{n} = (\theta, \varphi)$
e ⊂ ângulo sólido $d\Omega$ / tempo

esquematicamente:

(REF. CM)



(42.2)

alvo (target) @ origem O.

notar:

$$\sigma(\hat{n})\, d\Omega = \sigma(\theta, \varphi)\, d\Omega = \frac{N}{I} :$$

: probabilidade partícula incidente espalhada na direção $\hat{n}$ (e ⊂ em $d\Omega$) (42.3)

notar: $[\sigma(\hat{n})]$: área!

de fato, Eq. (42.3) é escrita como:

$$\frac{d\sigma(\hat{n})}{d\Omega} d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{N_I}{I} \quad ; \quad [d\sigma/d\Omega] : \text{área} \qquad (43.1)$$

↑ secção de choque diferencial de espalhamento

integrando sob ângulo sólido:

$$\sigma_{TOT} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega : \text{secção de choque total} \qquad (43.2)$$

p/ sistema c/ simetria azimutal w.r.t. eixo // direcção de propagação partículas incidentes (eixo $\hat{z}$), e.g., espalhamento por um potencial central $U(r)$, podemos considerar:

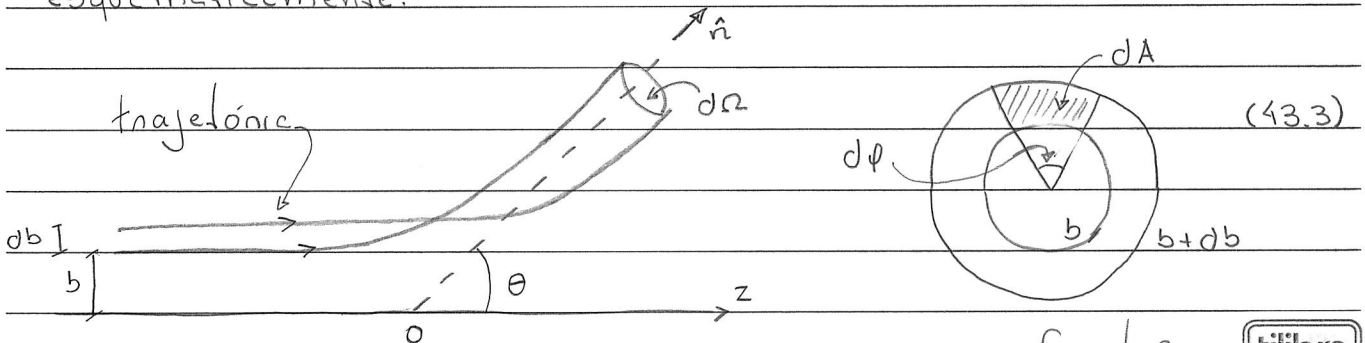
Eq. (41.2): $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \rightarrow d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$ (43.2)

↳ $\frac{d\sigma(\hat{n})}{d\Omega} = \frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\Omega} \rightarrow \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$

próximas etapas:

- considerar apenas espalhamento elástico;
- alvo (centro espalhador): descrito potencial $V(r)$ ou sistema descrito energia " $U(r)$;

esquematicamente:



(43.3)

imagem frontal

notar Fig.: # partículas espalhadas na direção $\hat{n}$ e $\in d\Omega$ = = " = " através área $dA = b\,db\,d\phi$;

temos que $\frac{N_f}{I} = dA = b\,db\,d\phi = \frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ (44.1)

$d\Omega$

se potencial espalhador esfericamente simétrico $V = V(r)$

↳ podemos considerar $b = b(\theta)$ e, assim:

Eq. (43.2)

↳ $\frac{N_f}{I} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| d\Omega = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega$

↳ $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$: secção de choque diferencial (CH) (44.2)

Obs.: $\frac{db}{d\theta} < 0$: interação de curto alcance

↳ se $b_1 > b_2 \rightarrow \theta_1 < \theta_2$!

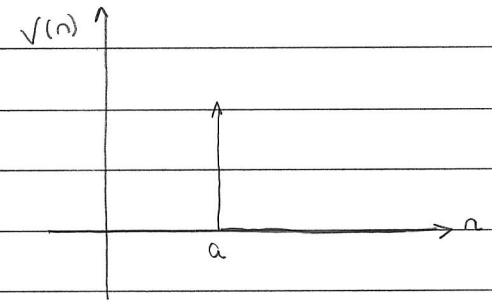
notar: se trajetória partícula incidente conhecida

↳ $b = b(\theta)$ determinado $\rightarrow d\sigma(\theta)/d\Omega$ determinada!

Ex.1: considerar espalhamento pelo potencial (esfera dura)

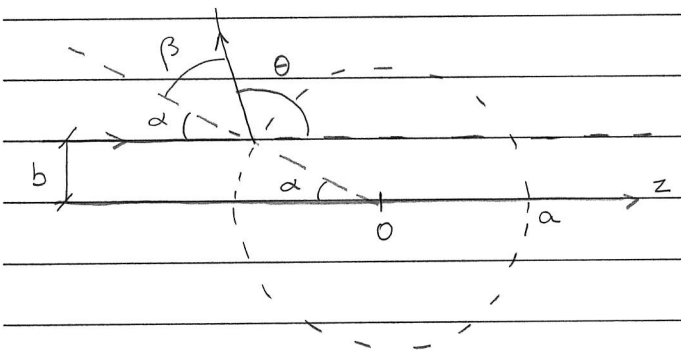
$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > a \\ \infty, & r \leq a \end{cases}$$

(44.3)



tilibra

geometria (CM)



θ : ângulo de espalhamento

notar: conservação momento linear (direção tangencial)

↳ $\alpha = \beta$

↳ $\alpha + \beta + \theta = 2\alpha + \theta = \pi$

como $b = a\sin\alpha \rightarrow b = a\cos\theta/2 = b(\theta) \rightarrow \frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2}a\sin\frac{\theta}{2}$

Eq. (44.2): $\frac{d\sigma}{d\theta} = a\cos\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{2}a\sin\frac{\theta}{2} = \frac{a^2}{4}$ (CM) : isotrópico!

$\sin\theta = 2\sin\theta/2\cos\theta/2$

Eq. (43.2): $\sigma_T = \int \frac{a^2}{4} d\Omega = \frac{1}{4} a^2 4\pi = \pi a^2$: secção de choque total!

Obs.: mecânica quântica : $\sigma_T = 4\pi a^2$ (onda-s)!

· Eq. (44.2): secção de choque diferencial em termos ângulo de espalhamento θ w.r.t. REF. CM; é necessário escrever $d\sigma/d\Omega$ em termos " " " " " REF. LAB: veja Fig. 40.2

considerar:

tilibra

$d\sigma(\theta)/d\Omega' \equiv \sigma(\theta)$: sec. choque diferencial w.r.t. REF. CM

$d\sigma(\psi)/d\Omega \equiv \sigma(\psi)$: " " " " REF. LAB

$d\Omega'$: ângulo solido " " CM

$d\Omega$: mesmo " " " " LAB

temos que:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega'} d\Omega' = \frac{d\sigma(\psi)}{d\Omega} d\Omega \rightarrow \sigma(\theta) d\Omega' = \sigma(\psi) d\Omega,$$

pois # particulas espalhadas nas direções θ(CM) e ψ(LAB) são iguais: veja Fig. 40.2

p/ sistema c/ simetria azimutal:

$d\Omega' = 2\pi \sin\theta d\theta$ e $d\Omega = 2\pi \sin\psi d\psi$: Eq. (43.2)

$$\hookrightarrow \quad \sigma(\psi) = \sigma(\theta) \frac{\sin\theta}{\sin\psi} \cdot \frac{d\theta}{d\psi} \qquad (46.1)$$

verifica-se que (veja pg.):

$$\frac{d\sigma(\psi)}{d\Omega} = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega'} \cdot \frac{(n\cos\psi + \sqrt{1 - n^2\sin^2\psi})^2}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\psi}}$$

onde $\theta = \sin^{-1}(n\sin\psi) + \psi$

(46.2)

$n = m_1/m_2 < 1$:

: p/ colisões elásticas!

tilibra

notar:

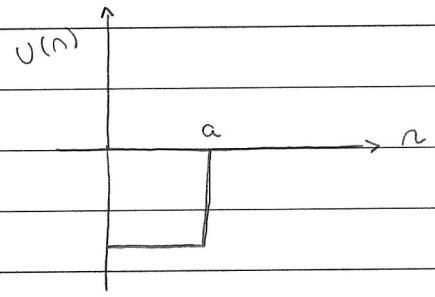
- se $m_1 = m_2 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow \theta = 2\psi \;\hat{=}\; \frac{d\sigma(\psi)}{d\Omega} = 4\cos\psi \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega'}$

- se $m_1 \ll m_2 \rightarrow \alpha \ll 1 \rightarrow \theta \simeq \psi \;\hat{=}\; \frac{d\sigma(\psi)}{d\Omega} \simeq \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega'}$ (47.1)

Ex. 2: P. 3.32, G.: considerar espalhamento pelo potencial

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r > a \\ -U_0, & r \leq a \end{cases}, \quad U_0 > 0$$

: poço quadrado esférico ("esfera mole")

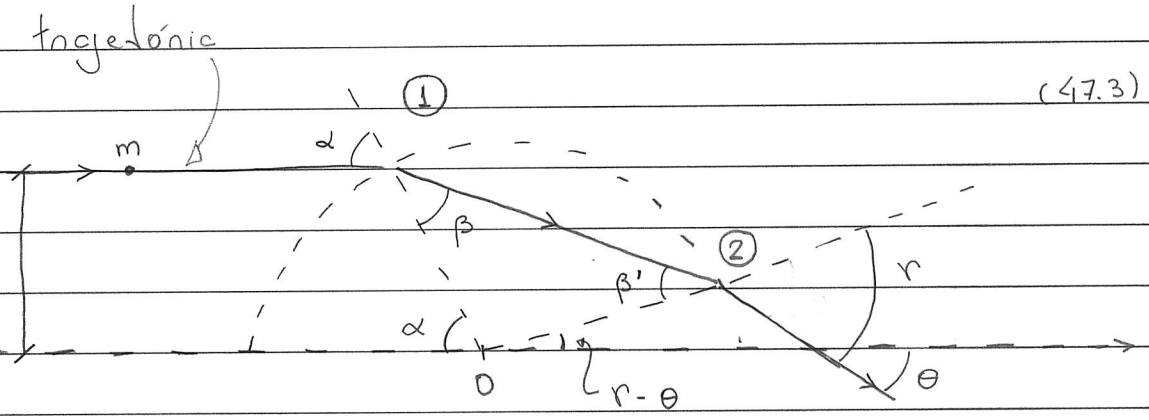


(47.2)

a: comprimento característico

similar Ex. 1, vamos considerar a geometria do processo:

(CM)



(47.3)

θ: ângulo de espalhamento: comparar Fig. 42.2

notar: parâmetro de impacto $b = a\sin\alpha$;

↳ Q.: Qual a relação entre α e θ?

tilibra

como $\Delta 102$ isóceles $\rightarrow \beta = \beta'$

p/ o $\underline{2}$: $\alpha + (\pi - \beta - \beta') + (\gamma - \theta) = \pi$ (48.1)

p/ o $\underline{1}$: se p_0 : momento linear partícula p/ $r > a$

e p : " " " " $r \leq a$

↳ conservação componente tangencial :

$$p_0 \sin\alpha = p \sin\beta \rightarrow \sin\alpha = \frac{p}{p_0}\sin\beta \equiv n \sin\beta$$

conservação de energia :

$$E = \frac{p_0^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} - U_0 \rightarrow p_0^2 = p^2 - 2mU_0$$

↳ $$1 = \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 - \frac{U_0}{p_0^2/2m} = n^2 - \frac{U_0}{E} \rightarrow n = \sqrt{\frac{E + U_0}{E}} > 1$$

notar: $\sin\alpha = n \sin\beta$: lei de Snell ! (48.2)

p/ o $\underline{2}$: $\sin\gamma = n \sin\beta' = n \sin\beta = \sin\alpha \rightarrow \gamma = \alpha$

↳ Eq. (48.1) : $\alpha + \pi - 2\beta + \alpha - \theta = \pi \rightarrow 2\alpha - \theta = 2\beta$

↳ $\sin\alpha = n \sin\beta = \sin(\beta + \theta/2)$

(I)

verifica-se que (veja abaixo) : (I) $\rightarrow$ $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\theta/2}{n - \cos\theta/2}$ (48.3)

tilibra

↳ $\sin\beta = \dfrac{\sin\theta/2}{\sqrt{\sin^2\theta/2 + (n-\cos\theta/2)^2}}$ e $\cos\beta = \dfrac{n-\cos\theta/2}{\sqrt{\sin^2\theta/2 + (n-\cos\theta/2)^2}}$

Como $b = a\sin\alpha$

↳ $b = a\sin(\beta+\theta/2) = a\left(\sin\beta\cos\theta/2 + \cos\beta\sin\theta/2\right)$

$$= \frac{an\sin\theta/2}{(1+n^2-2n\sin\theta/2)^{1/2}} \qquad (49.1)$$

↳ Eq. (42.2):

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2\sin\theta/2\cos\theta/2} \cdot \frac{an\sin\theta/2}{(1+n^2-2n\sin\theta/2)^{1/2}} \left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{n^2a^2}{\cos\theta/2} \cdot \frac{(n\cos\theta/2 - 1)(n-\cos\theta/2)}{(1+n^2-2n\cos\theta/2)} \qquad (49.2)$$

Exercício: verificar

Obs.: sobre a Eq. (48.3):

$$n\sin\theta = \sin\beta\cos\theta/2 + \cos\beta\sin\theta/2$$

$* \; 1/\cos\beta$: $n\,tg\beta = tg\beta\cos\theta/2 + \sin\theta/2$

$$(n-\cos\theta/2)\,tg\beta = \sin\theta/2 \;!$$

tilibra

· espalhamento por potencial central: o problema de Rutherford.

considerar: espalhamento partícula massa μ pelo potencial:

$$U(r) = \frac{K}{r} \quad ; \quad K = cte \qquad (50.1)$$

Rutherford: espalhamento partículas α por núcleo atômico; nesse caso $U(r)$: (energia) potencial coulombiano

$$c/\ K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \ (S.I.) \ ; \ q_i : \text{carga partícula } i.$$

ideia: determinar $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$ (CM)!

similar problema Kepler pg. 19:

: duas possibilidades: (A) forma diferencial
(B) " integral

(A) forma diferencial:

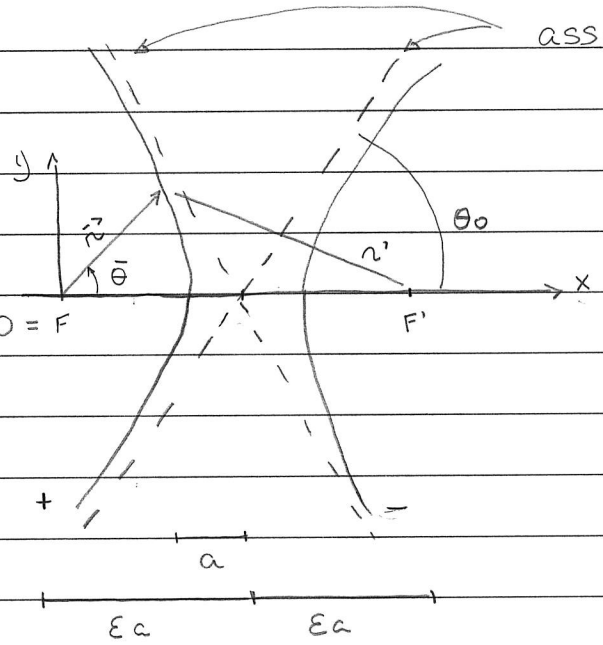
Lembrar Fig. (17.5): espalhamento $\sim E > 0$
↳ excentricidade $\varepsilon > 1$: Eq. (21.2)

↳ trajetória = hipérbole : Eq. (22.2)!

sobre a hipérbole (veja Sec. 5, Fetter):
Definição: conjunto de ptos tais que a diferença das distâncias aos dois focos fixos é cte, isto é,

$r' - r = 2a$: ramo + : veja Fig. (51.1) (50.2)
$r' - r = -2a$: ramo −

tilibra



(51.1)

F e F' : focos

onde $2\varepsilon a$: distância entre focos F e F';

similar Eq. (23.5), temos que:

$$n'^2 = n^2 + (2\varepsilon a)^2 - 2n(2\varepsilon a)\cos\bar{\theta}$$

$$(n \pm 2a)^2 = n^2 \pm 4an + 4a^2 = n^2 + 4\varepsilon^2 a^2 - 4\varepsilon n a \cos\bar{\theta}$$

$$\hookrightarrow \pm n + n\varepsilon\cos\bar{\theta} = a(\varepsilon^2 - 1)$$

$$\hookrightarrow \frac{\alpha}{n} = 1 + \varepsilon\cos\bar{\theta} \quad : \text{ramo } +$$

(51.2)

$$\frac{\alpha}{n} = -1 + \varepsilon\cos\bar{\theta} \quad : \text{ramo } -$$

onde $\alpha = a(\varepsilon^2 - 1)$; $\varepsilon > 1$

Obs.: Eqs. (22.1) e (51.2) : OK ~ escolho $\theta_0 = 0$ ou π e sinal de G!

notar:

$$\Omega_{MIN} = \Omega(\bar{\theta}=0) = \frac{\alpha}{\varepsilon+1} \quad : \text{ncmo} +$$

$$= \frac{\alpha}{\varepsilon-1} \quad : \text{ncmo} -$$

θ_0: ângulo entre assíntota e direcção FF':

(52.1)

$$\Omega(\bar{\theta}=\theta_0) = \Omega_{MAX} \to +\infty$$

p/ ncmo - : $0 = -1 + \varepsilon\cos\theta_0 \to \cos\theta_0 = 1/\varepsilon$

em coordenadas cartesianas, similar Eq. (23.2), verifica-se que (exercício) Eq. (51.2) assume a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (52.2)$$

onde $a = \frac{\alpha}{\varepsilon^2-1}$; $b = \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$; $c = \varepsilon a = x_0$;

centro hipérbole em $(x_0, 0)$: veja Fig. (51.1)

p/ a determinação de $\partial\sigma/\partial\Omega$, vemos considerar:

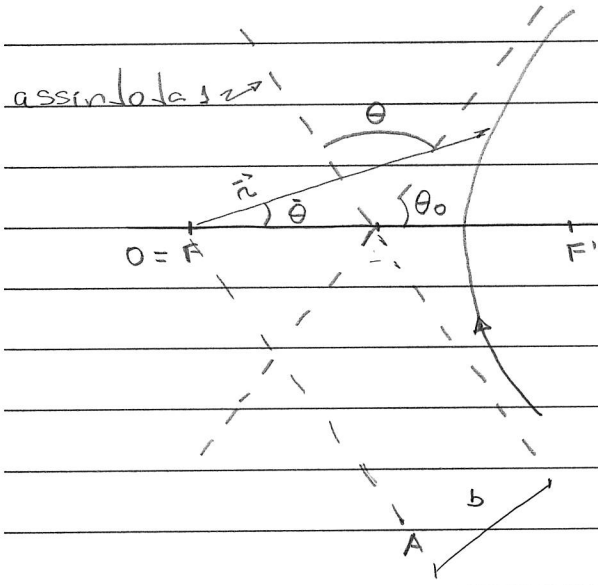
- trajetória partícula incidente : ncmo - ;

- O = F : centro força central;

- θ: ângulo de espalhamento w.r.t. CM

notar Fig. (53.1): $2\theta_0 + \theta = \pi$

tilibra



: comparar c/ Fig. (43.3) (53.1)

notar: assintota 1 // FA

↳ $tg\frac{\theta}{2} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = cotg\,\theta_0$

como $\cos\theta_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ → $\sin\theta_0 = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ (53.2)

↳ $tg\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$

$\ell^2 = 2\mu E b^2$: Eq. (41.1)

Eq. (21.2): $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}$ → $\varepsilon^2 - 1 = \frac{2E\ell^2}{\mu k^2} = \frac{4E^2b^2}{k^2}$

↳ $cotg\frac{\theta}{2} = \frac{2Eb}{k}$ → $b = b(\theta) = \frac{k}{2E}\,cotg\frac{\theta}{2}$ (53.3)

temos que: Eqs. (44.2) e (53.1) → $d\sigma(\theta)/d\Omega$ (veja abaixo)

(B) forma integral:

lembrar Eq. (16.1): $\bar{\theta} = \int dr \frac{\ell/r^2}{\sqrt{2\mu E - 2\mu U' - \frac{\ell^2}{r^2}}} + C$

tilibra

como $r_{MIN} = r(\bar{\theta} = 0)$ e $r_{MAX} = r(\bar{\theta} = \theta_0) \to +\infty$: Veja Fig. (53.1),

temos que:

$$\theta_0 = \int_{r_{MIN}}^{\infty} dr \, \frac{\ell / r^2}{\sqrt{2\mu E - \frac{2\mu K}{r} - \frac{\ell^2}{r^2}}} \qquad (54.1)$$

pois $U(r) = K/r$

notar: integral (54.1) = integral (19.3) $\oplus$ $K \to -K$;

↳ Eq. (20.1) $\oplus$ $K \to -K$: $\underbrace{-\frac{\ell^2}{\mu K}}_{\equiv \alpha} \cdot \frac{1}{r} - 1 = \varepsilon \sin(\zeta - \bar{\theta})$

↳ $\frac{\alpha}{r} + 1 = -\varepsilon \sin(\zeta - \bar{\theta})$ (54.2)

similar Eq. (20.2): $r_{MIN} = r(\bar{\theta} = 0) \sim \dot{a}$;

Eq. (20.2) $\oplus$ $K \to -K$: $\frac{1}{r} = -\frac{1}{\alpha} \mp \frac{1}{\alpha}\varepsilon = \frac{1}{\alpha}(\mp\varepsilon - 1)$

↳ $r_{MIN} = \frac{\alpha}{\varepsilon - 1}$: OK c/ Eq. (52.1)

e $r_{MIN} = \frac{-\alpha}{\varepsilon + 1} < 0$ X : OK c/ hipérbole

Eq. (54.2) p/ $\bar{\theta} = 0$: $\alpha \cdot \frac{(\varepsilon - 1)}{\alpha} + 1 = -\varepsilon \sin \zeta \to \zeta = -\pi/2$

↳ $\frac{\alpha}{r} = -1 + \varepsilon \cos\bar{\theta}$: Eq. (51.2), nemo - (54.3)

tilibra

como $\Omega_{MAX} = \Omega(\bar{\theta} = \theta_0) \to +\infty$

↳ Eq. (54.2) : $\cos\theta_0 = \frac{1}{\varepsilon}$: Eq. (53.2) !

↳ Eq. (53.3) : $b = b(\theta) = \underbrace{\frac{\kappa}{2E}}_{\equiv \beta} \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2} = \beta \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}$

como : $\frac{db}{d\theta} = -\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\beta \frac{\cos\theta/2}{\sin^2\theta/2}\cdot\cos\theta/2 = -\frac{1}{2}\beta \cdot \frac{1}{\sin^2\theta/2}$

↳ Eq. (44.2) : $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2\sin\theta/2\cos\theta/2} \cdot \beta \cdot \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2} \cdot \frac{1}{2}\beta \cdot \frac{1}{\sin^2\theta/2}$

$= \frac{1}{4}\beta^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\kappa^2}{4E^2}\cdot\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$

↳ $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$: fórmula de Rutherford (C.M.) (55.1)

onde $E = \frac{1}{2}\mu v^2(r \to +\infty)$: veja Eq. (12.1)
↑ massa reduzida !

Obs. Eq. (55.1): resultado mec. clássico =
= " " " exato : veja Sec. 13.8, Menzbacher;
~ partículas $U(r) \propto 1/r$.

notar $d\sigma/d\Omega$ independe sinal de κ !

· em princípio, Eq. (43.2) $\to \sigma_{TOT}$;

entretanto, p/ (55.1), temos que $\sigma_{TOT} \to +\infty$;

tilibra

de fato, $\sigma_{TOT} \to +\infty \sim U(r) = K/r$: potencial de longo alcance!

p/ potenciais de curto alcance, e.g., potencial de Yukawa:

$$U(r) = U_0 \, a \, \frac{e^{-r/a}}{r} \qquad (55.2)$$

↳ $\sigma_{TOT} < +\infty$!

notar Eq. (56.1) : a : comprimento característico.

tilibra

Ex.: P.3.20.G. e P.3.49.S.: consideran planeta massa m sob

$$\vec{F}(r) = -\frac{K}{r^2}\hat{r} - mCr\hat{r} \quad ; \quad K = mMG > 0$$

$$C = \frac{4\pi}{3}\rho G \ : \text{de}$$

densidade distribuicão uniforme

poeira ao redor do Sol:

determinan:

a) frequência órbita circular raio r_0;

b) " pequenas oscilações radiais w.r.t. órbita circular;

c) mostran que caso (b) = órbita elíptica ⊕ precessão e determinan velocidade angular semieixo maior;

como: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U \rightarrow F(r)\hat{r} = -\hat{r}\frac{\partial U}{\partial r} \rightarrow U = -\int_{REF}^{r} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$

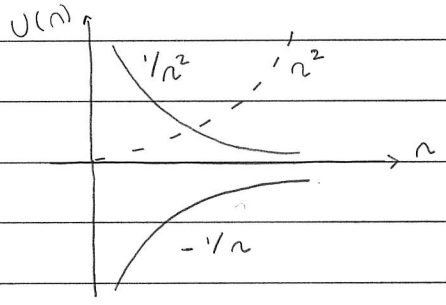
nesse caso: $d\vec{r}' = \hat{r}\,dr'$ e $REF: \infty$

$$\hookrightarrow U(r) = -\int_{\infty}^{r} \left(-\frac{K}{r'^2} - mCr'\right)\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr' = \int_{\infty}^{r} dr'\,\frac{K}{r'^2} + mCr'$$

$$\hookrightarrow U(r) = -\frac{K}{r} + \frac{1}{2}mCr^2$$

$$\hookrightarrow U_{ef}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{1}{2}mCr^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} \ : \text{Eq. (11.4)}$$

↑ notar $\mu \simeq m$ ou $m \ll M$!



p/ órbita circular : Eq. (29.1) :

$$\frac{dU_{ef}}{dr} = \frac{K}{r^2} + mcr - \frac{\ell^2}{mr^3}$$

↳ $\left.\frac{dU_{ef}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \rightarrow \frac{K}{r_0^2} + mcr_0 - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0$: notar : relação entre ℓ e r_0 !

(55.3)

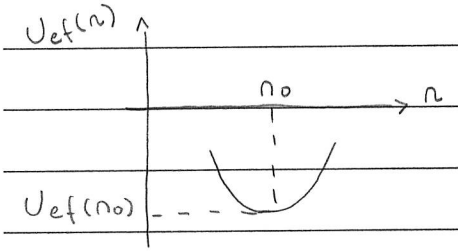
↳ $\ell^2 = mr_0\left(K + mcr_0^3\right) = -mr_0^3\left(\frac{-K}{r_0^2} - mcr_0^3\right) = \underbrace{-mr_0^3 F(r_0)}$:

Eq. (29.2)

Eq. (10.5) : $\ell = mr_0^2\dot{\theta} \rightarrow \ell^2 = m^2 r_0^4 \omega_c^2 = mr_0\left(K + mcr_0^3\right)$

↳ $\omega_c^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{K}{r_0^3} + mc\right)$: freq. angular órbita circular

notar : $E = U_{ef}(r_0) = -\frac{K}{r_0} + \frac{1}{2}mcr_0^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2mr_0^2}}_{\frac{1}{2mr_0^2}\cdot mr_0\left(K + mcr_0^3\right)} = \frac{-K}{2r_0} + mcr_0^2$



sobre estabilidade órbita circular : Eq. (29.3) :

$$\frac{d^2U_{ef}}{dr^2} = \frac{-2K}{r^3} + mc + \frac{3\ell^2}{mr^4}$$

↳ $\left.\frac{d^2U_{ef}}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \frac{-2K}{r_0^3} + mc + \frac{3\ell^2}{mr_0^4} = \frac{K}{r_0^3} + \langle 1\, mc > 0$ (Eq. (55.3))

tilibra

Eq. (32.2): $\omega_r^2 = \frac{1}{m}\left.\frac{d^2 U_{ef}}{dr^2}\right|_{r_0} = \frac{1}{m}\left(\frac{\kappa}{r_0^3} + 4mc\right)$: freq. pequenas oscilações radiais w.r.t. órbita circular!

notar: $\frac{\omega_r}{\omega_c} \neq \mathbb{Z}$ -> precessão órbita!

como $\omega_r > \omega_c$ -> $T_r < T_c$ -> sentido ω_c oposto ω_p.

onde $\omega_p = \omega_r - \omega_c$: freq. semieixo maior;

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{m}}\left(\left(\frac{\kappa}{r_0^3} + 4mc\right)^{1/2} - \left(\frac{\kappa}{r_0^3} + mc\right)^{1/2}\right)$$

hipótese: $\frac{\kappa}{r_0^2} >> mcr_0$

$$\hookrightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{\kappa}{mr_0^3}}\left(\underbrace{\left(1 + \frac{4mcr_0^3}{\kappa}\right)^{1/2}}_{\simeq 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4mcr_0^3}{\kappa}} - \underbrace{\left(1 + \frac{mcr_0^3}{\kappa}\right)^{1/2}}_{\simeq 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{mcr_0^3}{\kappa}}\right)$$

$$\hookrightarrow \omega_p \simeq \frac{3}{2}\, c\sqrt{\frac{mr_0^3}{\kappa}}$$

tilibra