

## Referenciais não-inerciais.

Refs.: Cap. 10, Marion

Cap. 9, Teylon

Cap. 7, Symon

Secs. 6-12, Fetter

ideia: determinar o equivalente da 2ª lei de Newton  
p/ referenciais não-inerciais

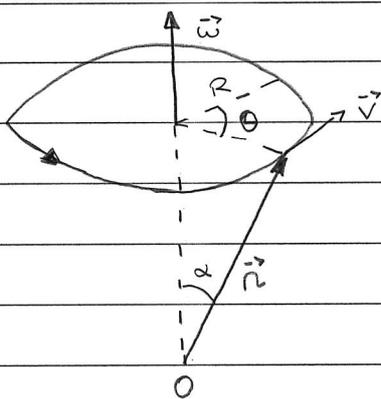
formalismo interessante p/ descrição:

(i) movimento próximo à superfície da Terra;

(ii) corpos rígidos.

inicial: velocidade angular (p/ detalhes, veja Sec. 1.15, Marion)

considerar partícula, trajetória = círculo no R:



(77.1)

notas: a velocidade  $v = |\vec{v}|$  da partícula pode ser escrita  
como:

$$v = R \frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta} = R\omega$$

(77.2)

Como  $R = n \sin \alpha \rightarrow v = n\omega \sin \alpha$

notas: definindo  $\vec{\omega}$ : vetor velocidade angular como indicado na Fig. (77.1), temos que Eq. (77.2) pode ser escrita como:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (78.1)$$

Obs.: os vetores posição  $\vec{r}$ , velocidade  $\vec{v}$ , força  $\vec{F}$ , campo elétrico  $\vec{E}$  são vetores polares, enquanto os vetores velocidade angular  $\vec{\omega}$ , momento angular  $\vec{L}$ , campo magnético  $\vec{B}$  são vetores axiais ou pseudovetores;

vetor axial: primeira definição: vetor cujo sentido é definido através de uma convenção;

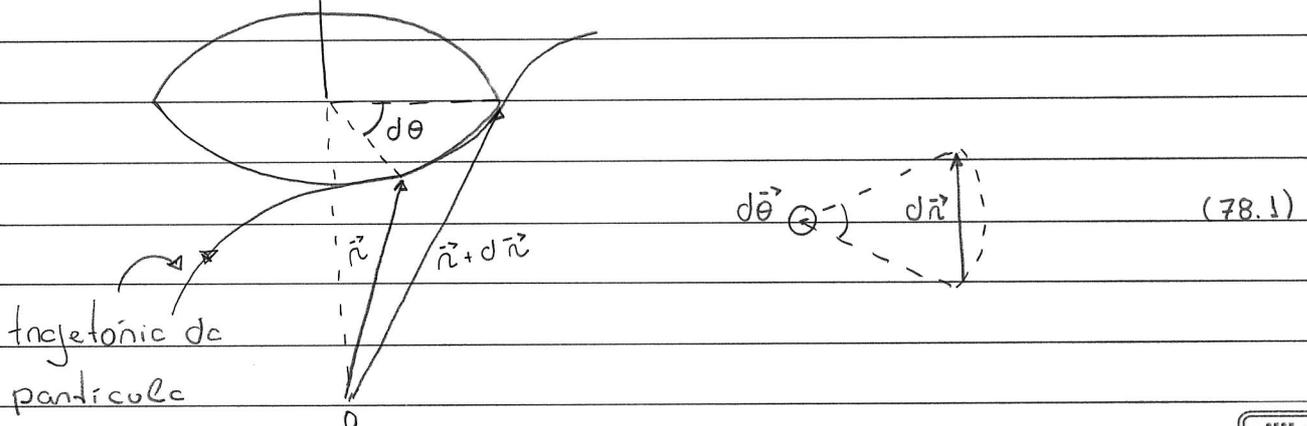
pr a Fig. (77.1), o sentido de  $\vec{\omega}$  foi escolhido via a "regra da mão direita";

pr detalhes diferenças entre vetores polares e axiais, veja pg. 78.1.

Eq. (78.1): OK pr movimento circular;

Caso geral: considerar Fig. (77.1) como uma situação instantânea, isto é, válida pr instante  $t$ ; nesse caso, temos que:

$$d\vec{\theta} = d\theta \hat{n}; \text{ eixo instantâneo de rotação}$$



· Considerações gerais sobre transformações de coordenadas.

(1) notação,

· transformação linear de coordenadas

pto  $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \rightarrow \vec{r}' = (r'_1, r'_2, r'_3)$  tal que

$$r'^2 = r^2 \tag{78.2}$$

a relação entre  $r'_\alpha$  e  $r_\beta$  é dada por

$$r'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 A_{\alpha\beta} r_\beta = A_{\alpha\beta} r_\beta \tag{78.3}$$

↑ elementos matriz  $\hat{A}$ : matriz ortogonal que descreve a transformação de coordenadas.

$$\text{Eqs. (78.2) e (78.3): } r'^2 = r'_\alpha r'_\alpha = A_{\alpha\beta} A_{\alpha\gamma} r_\beta r_\gamma = \delta_{\beta\gamma} r_\beta r_\gamma$$

↑ Eq. (78.2)

$$\hookrightarrow A_{\alpha\beta} A_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$$

$$\text{ou } \hat{A} \cdot \hat{A}^t = \hat{I} \quad \text{ou } \hat{A}^t = \hat{A}^{-1} :$$

$$\text{ou } A^t_{\beta\alpha} A_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma} \tag{79.4}$$

: definição matriz ortogonal!

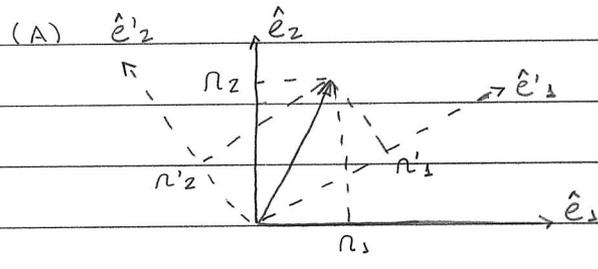
$$\text{notas: } \hat{A} \cdot \hat{A}^t = \hat{I} \rightarrow \det(\hat{A} \cdot \hat{A}^t) = \det \hat{A} \cdot \det \hat{A}^t = (\det \hat{A})^2 = 1$$

$\hookrightarrow \det \hat{A} = \pm 1$  : 2 classes de transf. ortogonais:

-  $\det \hat{A} = +1$  : rotações : rotações próprias

-  $\det \hat{A} = -1$  : reflexão, inversão espacial : " impróprias

em detalhes: consideram vetor  $\vec{n}$  sob transf. coordenadas (notação);  
duas possibilidades:

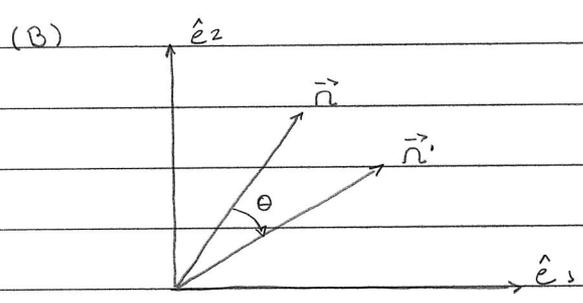


: transf. passiva =  
= vetor fixo  
= REF transformado

nesse caso, Eq. (78.3):  $n'_\alpha = A_{\alpha\beta} n_\beta$   
 ↑ componente  $\vec{n}$  w.r.t. REF 0  
 " " " REF 0'

Como: bases (base) REF 0:  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$   
 " " REF 0':  $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ , temos que:

$$\vec{n} = n_\alpha \hat{e}_\alpha = n'_\alpha \hat{e}'_\alpha$$



: transf. ativa =  
= REF fixo  
= vetor transformado

nesse caso, Eq. (78.3):  $n'_\alpha = A_{\alpha\beta} n_\beta$   
 ↑ comp.  $\vec{n}$  w.r.t. REF 0  
 "  $\vec{n}'$  " "

: nesse caso, a matriz  $\hat{A}$  pode ser vista como um operador  
que transforma  $\vec{n}$  em  $\vec{n}'$ !

Obs.: vamos considerar apenas transformações ativas!

↳ Definição vetor: objeto formado por 3 componentes que se transformam como (78.3) sob transf.  $\mathbf{A}$ . (79.5)

(2) inversão espacial (paridade)

• transf. discreta  $\neq$  notação = transf. contínuas!

• nesse caso:  $A_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$  ou  $\hat{A} = -\hat{1} \rightarrow \det \hat{A} = -1$ ;

de fato, temos duas classes de vetores distintos sob inversão espacial:

(A) vetor polar = definição (79.5);

em particular, sob inversão espacial:

$$\text{Eq. (78.3): } v'_\alpha = A_{\alpha\beta} v_\beta = -v_\alpha$$

(79.6)

$$\text{ou } \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = -\vec{v}$$

Ex.:  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{F}, \vec{E}$

(B) vetor axial ou pseudovetor: objeto formado por 3 componentes que se transformam como

$$n'_\alpha = (\det \hat{A}) A_{\alpha\beta} n_\beta$$

(79.7)

sob transf.  $\mathbf{A}$ ;

em particular, sob inversão espacial:

$$v'_\alpha = (\det \hat{A}) A_{\alpha\beta} v_\beta = (-1)(-1) \delta_{\alpha\beta} v_\beta = v_\alpha$$

(79.8)

$$\text{ou } \vec{v} \rightarrow \vec{v}' = +\vec{v}$$

Ex.:  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{L}$ ,  $\vec{B}$

verifica-se que:  $\text{axicl} \times \text{polan} = \text{polan}$

$\text{polan} \times \text{polan} = \text{axicl}$

(79.9)

$\text{axicl} \times \text{cxicl} = \text{cxicl}$

considerando que, no instante  $t$ , a trajetória da partícula  
 $\approx$  arco de círculo  $d\theta$ , temos que:

$$d\vec{n} = d\vec{\theta} \times \vec{n} \quad (79.1)$$

$$\hookrightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{n} = \vec{\omega} \times \vec{n} \quad : \text{ Eq. (78.1)}$$

Obs.: Fig. (78.1): exemplo de uma notação infinitesimal de  
 um ângulo  $d\theta$  w.r.t. eixo  $\hat{n}$ ;

considerar: 2 notações infinitesimais sucessivas:

$$\vec{n} \quad \text{notação } \times d\theta_1 \quad , \quad \vec{n}_1 \quad \text{notação } \times d\theta_2 \quad , \quad \vec{n}_2$$

w.r.t. eixo  $\hat{n}_1$                       w.r.t. eixo  $\hat{n}_2$

$$\text{temos que: } \vec{n}_1 = \vec{n} + d\vec{n} = \vec{n} + d\vec{\theta}_1 \times \vec{n} \quad ; \quad d\vec{\theta}_1 = d\theta_1 \hat{n}_1$$

↑  
Eq. (79.1)

$$\vec{n}_2 = \vec{n}_1 + d\vec{n}_1 = \vec{n}_1 + d\vec{\theta}_2 \times \vec{n}_1 \quad ; \quad d\vec{\theta}_2 = d\theta_2 \hat{n}_2$$

$$\hookrightarrow \vec{n}_2 = (\vec{n} + d\vec{\theta}_1 \times \vec{n}) + d\vec{\theta}_2 \times (\vec{n} + d\vec{\theta}_1 \times \vec{n})$$

$$\approx \vec{n} + (d\vec{\theta}_1 + d\vec{\theta}_2) \times \vec{n} + O(d\vec{\theta}_i^2)$$

$\equiv d\vec{\theta}$  : notação infinitesimal  $d\vec{\theta}$  = soma (vetorial)  
 de duas " " " "  $d\vec{\theta}_1$  e  $d\vec{\theta}_2$  !

notar:  $d\vec{\theta} = d\vec{\theta}_1 + d\vec{\theta}_2 = d\vec{\theta}_2 + d\vec{\theta}_1$ , i.e., notações infinitesimais  
 comutam;

$\neq$  2 notações finitas que, em geral, não comutam!

pr. detalhes notações infinitesimais, veja pg. 79.1 !

sobre as notações infinitesimais  
(p/ detalhes, veja Sec. 7, FeHn),

ideia: determinar novamente  $d\hat{e}_i$ , i.e., a variação temporal

do vetor  $\hat{e}_i$ ,  $i=1,2,3$  : veja Eq. (8.2),

considerar:  $\hat{e}_i(t) = \hat{e}_i$  : vetor  $\hat{e}_i$  no instante  $t$

$\hat{e}_i(t+dt) = \hat{e}_i + d\hat{e}_i$  : veja

Fig. (79.1)

como, p/ instante  $t$  :  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$  (79.2)

$\hat{e}_i(t+dt) \cdot \hat{e}_i(t+dt) = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_i + 2\hat{e}_i \cdot d\hat{e}_i + d\hat{e}_i \cdot d\hat{e}_i = 1$

↳ em ordem  $(d\hat{e}_i)^1$ , temos que:

$1 + 2\hat{e}_i \cdot d\hat{e}_i \approx 1 \rightarrow \hat{e}_i \cdot d\hat{e}_i \approx 0$  ou  $\hat{e}_i \perp d\hat{e}_i$  (79.3)

considerar:

$d\hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 d\Omega_{ij} \hat{e}_j$  : expressão vetorial  $d\hat{e}_i$   
na base  $\hat{e}_j$ ;  $j=1,2,3$

(79.4)

↳ em princípio, 9 coeficientes!

notar:  $\hat{e}_k \cdot d\hat{e}_i = \sum_j d\Omega_{ij} \hat{e}_k \cdot \hat{e}_j = d\Omega_{ik}$   
 $\delta_{k,j}$

ou  $d\Omega_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$  (79.5)

• Eqs. (79.3) e (79.5)  $\rightarrow d\Omega_{ii} = 0 \rightarrow$  apenas 6 coeficientes  $d\Omega_{ij}$  não-nulos.

•  $d(\text{Eq. (79.2)})$ :

$$d\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot d\hat{e}_j = 0 \quad \text{Eq. (79.5)} \rightarrow d\Omega_{ij} = -d\Omega_{ji} \quad (79.6)$$

$\hookrightarrow$  apenas 3 coeficientes independentes!

• é interessante definir:

$$d\Omega_{12} \equiv d\Omega_3 \quad d\Omega_{23} \equiv d\Omega_1 \quad d\Omega_{31} \equiv d\Omega_2 \quad (79.7)$$

$\hookrightarrow$  Eq. (79.4):

$$d\hat{e}_1 = d\Omega_{12}\hat{e}_2 + d\Omega_{13}\hat{e}_3 = d\Omega_3\hat{e}_2 - d\Omega_2\hat{e}_3$$

$$d\hat{e}_2 = d\Omega_{21}\hat{e}_1 + d\Omega_{23}\hat{e}_3 = d\Omega_1\hat{e}_3 - d\Omega_3\hat{e}_1 \quad (79.8)$$

$$d\hat{e}_3 = d\Omega_{31}\hat{e}_1 + d\Omega_{32}\hat{e}_2 = d\Omega_2\hat{e}_1 - d\Omega_1\hat{e}_2$$

Definindo:

$$d\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^3 d\Omega_i \hat{e}_i \quad (79.9)$$

verifica-se que a Eq. (79.8) pode ser escrita como:

$$d\hat{e}_i = d\vec{\Omega} \times \hat{e}_i \quad (79.10)$$

$$\hookrightarrow \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \hat{e}_i = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \quad : \text{Eq. (81.2)}$$

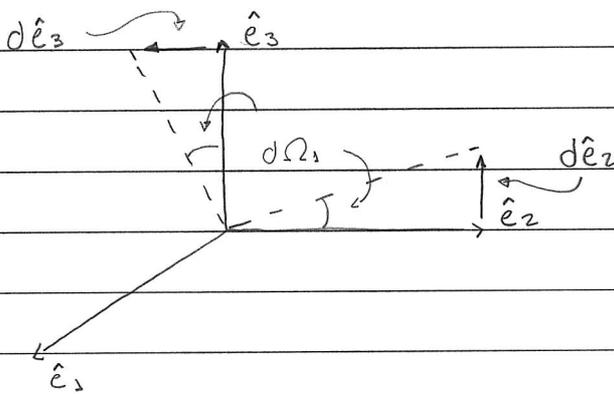
$\equiv \vec{\omega}$ : velocidade angular instantânea:

· sobre a Eq. (79.9):

notação infinitesimal  $d\vec{\Omega}$  = soma de notações infinitesimais  
w.r.t. eixos  $\hat{e}_i$ !

Ex.: notação infinitesimal  $d\vec{\Omega}_1$  w.r.t. eixo  $\hat{e}_1$ :

nesse caso:  $d\vec{\Omega}_1 = d\Omega_1 \hat{e}_1$



(79.11)

Fig. (79.11)  $\rightarrow d\hat{e}_1 = 0 = d\vec{\Omega}_1 \times \hat{e}_1$

$$d\hat{e}_2 = d\Omega_1 \hat{e}_3 = d\vec{\Omega}_1 \times \hat{e}_2$$

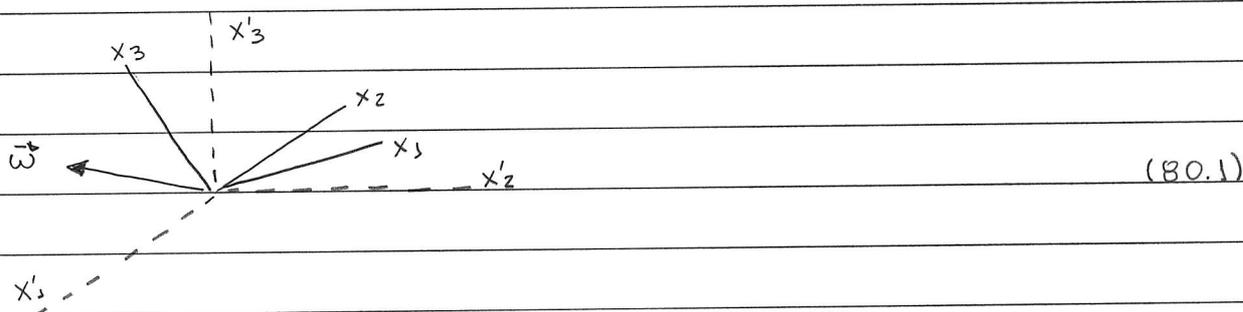
$$d\hat{e}_3 = -d\Omega_1 \hat{e}_2 = d\vec{\Omega}_1 \times \hat{e}_3$$

• Sistema de coordenadas girantes,

REF  $O'$  :  $x'_1 - x'_2 - x'_3$  : fixo, inercial

REF  $O$  :  $x_1 - x_2 - x_3$  : girante, não-inercial

$\vec{\omega}$  : velocidade angular REF  $O$  w.r.t. REF  $O'$



considerar:  $\vec{A} = \vec{A}(t)$  : vetor arbitrário!

↳ Definição:

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_f$  : derivada temporal  $\vec{A}$  w.r.t. REF  $O'$  fixo

(80.2)

$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_n$  : " " " " REF  $O$  girante  
(notating)

↳ Q: Qual a relação entre as duas quantidades acima?

se  $\hat{e}_i$  : versores REF  $O$  girante, temos que:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i = A_i \hat{e}_i$$

(80.3)

↳  $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_n = \sum_i \dot{A}_i \hat{e}_i$ , pois  $\hat{e}_i$  fixos w.r.t. REF  $O$

por outro lado:

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_f = \sum_i \dot{A}_i \hat{e}_i + A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad (81.1)$$

como  $\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$  : Eq. (78.1) e  $\vec{n} \rightarrow \hat{e}_i$  ! (81.2)

$$\hookrightarrow \sum_i A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_i A_i \vec{\omega} \times \hat{e}_i = \sum_i \vec{\omega} \times (A_i \hat{e}_i) = \vec{\omega} \times \sum_i A_i \hat{e}_i$$

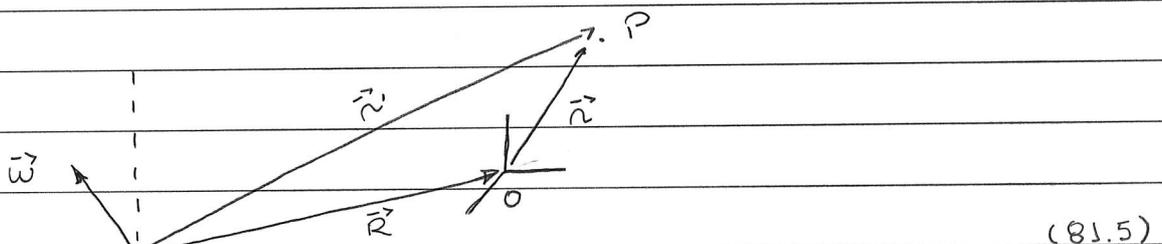
$$\hookrightarrow \text{Eq. (81.1): } \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_n + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (81.3)$$

: relação entre derivadas temporais vetor  $\vec{A} = \vec{A}(t)$  w.r.t.  
REFs. fixo e girante!

notas: Eq. (81.3) p/ aceleração angular:

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_n = \dot{\vec{\omega}} \quad (81.4)$$

considerar: REF O girante: movimento de translação e  
notação w.r.t. REF O' fixo:



vetor  $\vec{R}$ : vetor CM ou plo fixo no REF O girante!

p/ plo P, temos que:  $\vec{r}' = \vec{R} + \vec{r}$

$$\hookrightarrow \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_f + \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_f$$

$$\text{Eq. (81.3)} \quad \uparrow = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_n + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Definição:

$\vec{v}_f = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_f$  : velocidade partícula em P w.r.t. REF O' fixo

$\vec{v}_n = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_n$  : " " " " " REF O girante

$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_f$  : velocidade de translação REF O girante  
w.r.t. REF O' fixo

$$\hookrightarrow \vec{v}_f = \vec{v} + \vec{v}_n + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (82.1)$$

↑  
velocidade associada à rotação  
do REF O girante!

· próxima etapa: determinação da forma da 2ª Lei de Newton  
p/ REF O em notação;

p/ REF O' fixo, temos que:

$$\vec{F} = m\vec{a}_f = m\left(\frac{d\vec{v}_f}{dt}\right)_f \quad (82.2)$$

onde m: massa da partícula

$$\text{Eq. (82.1): } \left( \frac{d\vec{v}_f}{dt} \right)_f = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_f + \left( \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_f + \vec{\omega} \times \vec{n} + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{n}}{dt} \right)_f \quad (83.1)$$

: veja Eq. (81.4)

ideia: escrever  $\left( \frac{d\vec{v}_f}{dt} \right)_f$  em termos de  $\left( \frac{d}{dt} \right)_n$

notas:

$$(1) \left( \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_f = \left( \frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_n + \vec{\omega} \times \vec{v}_a \equiv \vec{a}_n + \vec{\omega} \times \vec{v}_a$$

Eq. (81.3)

↑ aceleração de

partícula no REF O girante

$$(2) \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{n}}{dt} \right)_f = \vec{\omega} \times \left( \underbrace{\left( \frac{d\vec{n}}{dt} \right)_n}_{=\vec{v}_n} + \vec{\omega} \times \vec{n} \right) = \vec{\omega} \times \vec{v}_n + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{n}) \quad (83.2)$$

$$(3) \text{Definição: } \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_f = \ddot{\vec{r}}_f$$

Eqs. (83.1) e (83.2)  $\rightarrow$  Eq. (82.2) pode ser escrita como:

$$\vec{F} = m \left( \frac{d\vec{v}_f}{dt} \right)_f$$

$$= m \ddot{\vec{r}}_f + m \left( \vec{a}_n + \vec{\omega} \times \vec{n} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_n + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{n}) \right)$$

notas: quantidades associadas ao  
REF O girante

(83.3)

ou  $\vec{F}_{\text{eff}} = m \vec{a}_n$  : notas forme similares

Eq. (82.2)

onde a força efetiva  $\vec{F}_{\text{eff}}$  assume a forma

$$\vec{F}_{\text{eff}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$$

movimento

termos não-inerciais (\*)

REF O girante

ou forças "fictícias"

w.r.t. REF O'

(84.1)

fixo

$\vec{F}$ : força resultante w.r.t. REF O' fixo

Eq. (83.2): 2ª lei de Newton p/ REF não-inercial;

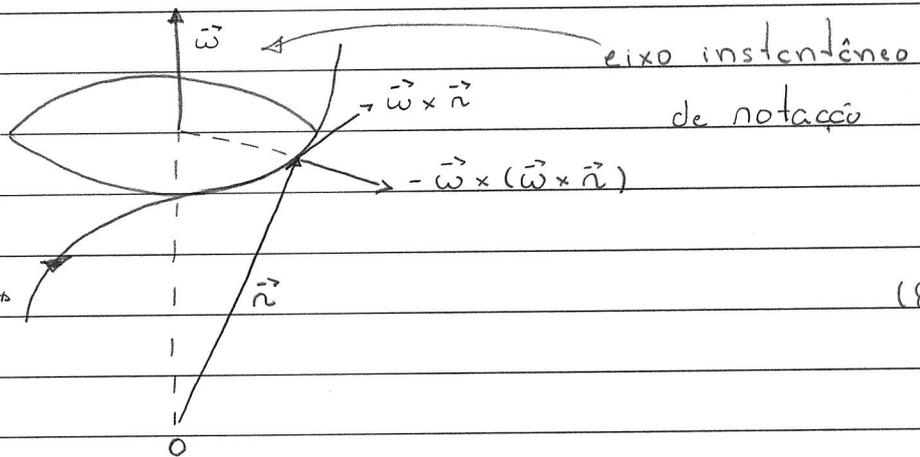
notas: p/ preservar a forma (82.2) no REF não-inercial,  
é necessário introduzir os termos (\*)!

• sobre as forças fictícias (\*):

•  $\vec{F}_c = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ : Força centrífuga (84.2)

notas:

trajetória  
partícula



(84.3)

se  $\vec{\omega} \perp \vec{r} \rightarrow \vec{F}_c = m\omega^2 r$  : comparem Eq. (11.2)

$$\vec{F}_{\text{COR}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_n : \text{Força de Coriolis} \quad (85.1)$$

como  $F_{\text{COR}} \propto v_n$ : velocidade partícula w.r.t.

REF O girante;

↳ se partícula em repouso w.r.t. REF girante

$$\text{↳ } F_{\text{COR}} = 0 !$$

notas:

$$(i) \vec{F}_{\text{COR}} \perp \vec{v}_n$$

$$(ii) \vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_n = 2m\vec{v}_n \times \vec{\omega} : \text{similar}$$

força campo magnético  $\vec{B}$  sob carga elétrica  $q$  em movimento c/ velocidade  $\vec{v}$ :

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

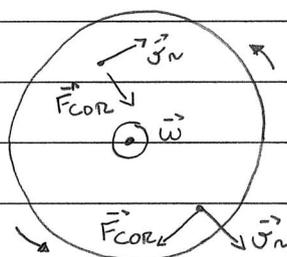
↑

vetor polar = polar  $\times$  axial : veja Eq. ( )

Ex. 1: considerar: disco, velocidade angular  $\vec{\omega}$ : REF girante  
e partícula velocidade  $\vec{v}_n$  w.r.t. " " ;  
determinar  $\vec{F}_{\text{COR}}$ ;

$$(A) \vec{\omega} = \omega \hat{z} ; \omega > 0$$

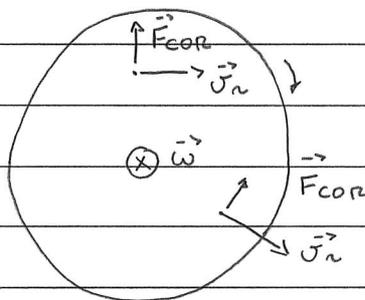
REF girante:



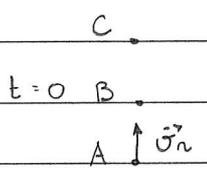
(85.2)

$$(B) \vec{\omega} = -\omega \hat{z} ; \omega < 0$$

REF girante:

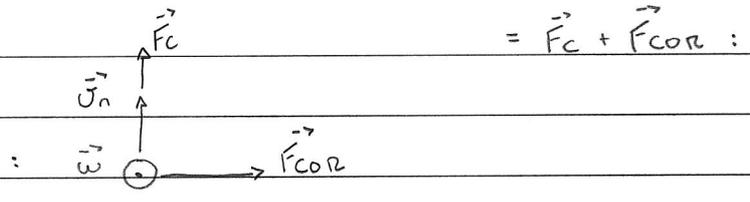


Ex. 2 : Ex. 9.2, Taylor: considera disco, raio  $a$ ,  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ ,  
 ptos A:  $r=0$ , B:  $r=a/2$ , C:  $r=a$ ;  
 partícula movimento s/c arado;  
 $\vec{v}_n(t=0) \parallel$  direção ABC;  
 determina trajetória partícula w.r.t. REFs. fixo e girante;

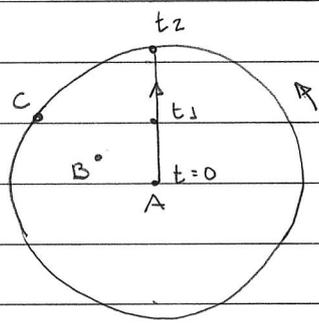


p/ REF fixo (LAB):  $\vec{F} = 0 \rightarrow$  movimento uniforme

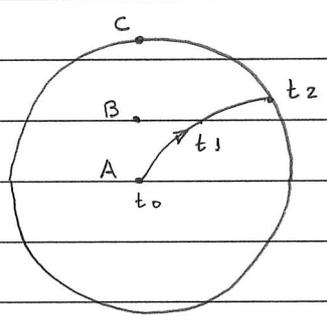
p/ REF girante (disco):  $\vec{F}_{eff} = \vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_{cor}$  : Eq. (84.1)



temos que:



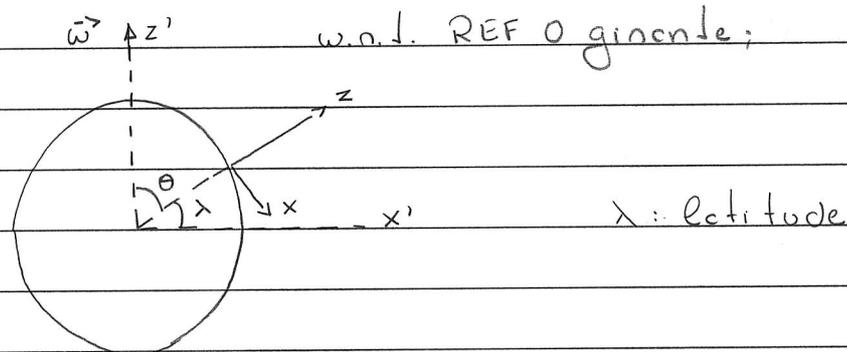
REF FIXO (LAB)



REF GIRANTE (DISCO)

(86.1)

Ex. 3 : considerar : movimento partícula @ plano  $xy$



(87.1)

REF O' : Fixo

REF O : girante :  $\hat{x}$  : sul $\hat{y}$  : leste

p/ Terra:  $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$

(87.2)

$$e \vec{\omega} = \omega \hat{z}' \approx cte$$

p/ partícula  $v_n = 50 \text{ m/s}$ , temos que

$$\text{Eq. (85.1)} : a_{cor} = \frac{F_{cor}}{m} \sim 2\omega v_n \approx 0,007 \text{ m/s}^2 \ll g = 9,8 \text{ m/s}^2 :$$

: apesar valor, efeitos  $\sim F_{cor}$  podem ser medidos :

: veja abaixo;

hipótese :  $\vec{v}_n = v_n \hat{x}$  : REF O girante

$$\hookrightarrow \text{Eq. (85.1)} : \vec{F}_{cor} = 2m \vec{v}_n \times \vec{\omega}$$

como  $\vec{\omega} = -\omega \sin\theta \hat{x} + \omega \cos\theta \hat{z}$ , temos que:

$$\vec{F}_{cor} = 2m\omega v_n \cos\theta (\hat{x} \times \hat{z}) = -2m\omega v_n \cos\theta \hat{y}$$

notas:

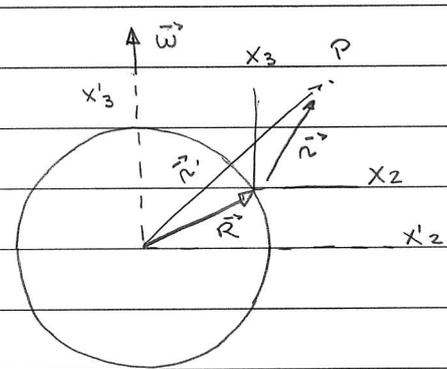
$0 < \theta < \pi/2$  :  $\vec{F}_c \propto -\hat{j}$  (oeste) : hemisfério norte

$\pi/2 < \theta < \pi$  :  $\vec{F}_c \propto +\hat{j}$  (leste) : hemisfério sul

• Efeitos de rotação da Terra,

considerar: REF O' : fixo, origem = centro da Terra

REF O : girante na superfície da Terra



(88.1)

hipótese :  $\vec{\omega} = \text{cte}$

$m$  : massa partícula no P

$\equiv M$  : " Terra ;

força resultante sob partícula  $m$  no pto P w.r.t. REF O' fixo:

$$\vec{F} = \vec{S} + m\vec{g}_0 = \vec{S} - \underset{R^2}{GMm} \hat{n}' \quad (88.2)$$

demais forças  $\uparrow$  int. gravitacionais:

: nota aproximação  $\hat{n}' \rightarrow \hat{n}$

$\equiv$  hipótese Terra = perfeitamente simétrica!

nesse caso, Eq. (84.1) assume a forma:

$$\vec{F}_{\text{ef}} = \underbrace{\vec{S} + m\vec{g}_0}_{\vec{F}} - m\ddot{\vec{R}}_f - \underbrace{m\vec{\omega} \times \vec{r} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{=0} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_n \quad (89.1)$$

$$\cdot \text{Eq. (81.3): } \underbrace{\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_f}_{=0} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_g}_{=0} + \omega \times \vec{R} = \dot{\vec{R}}_f = \omega \times \vec{R} \quad (89.2)$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\right)_f = \left(\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\right)_g + \omega \times \dot{\vec{R}}_f = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d\dot{\vec{R}}}{dt}\right)_g\right)_g = 0$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (89.1): } \vec{F}_{\text{ef}} = \vec{S} + m\vec{g}_0 - m\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})] - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_n ;$$

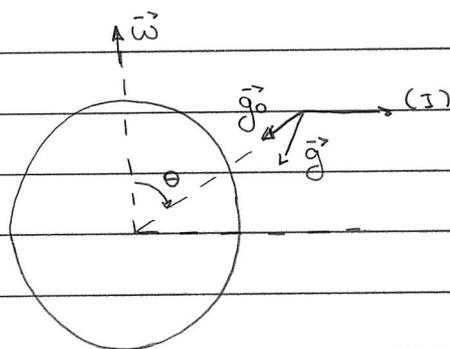
é interessante considerarmos:

$$\vec{F}_{\text{ef}} = \vec{S} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_n \quad (89.3)$$

onde  $\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{R})]$  :  $\vec{g}$  efetivo medido na sup. de Terra!

(1)

notas:



(89.4)

$\theta$ : co latitude

• sobre  $\vec{g}$  efetivo (89.3):

- medido na superfície de Terra;

- módulo ~ período pêndulo

- direção ~ "linha do plumb"  $\rightarrow$  sup. Terra  $\perp \vec{g}$  (90.1)  
NOT  $\vec{g}_0$ !

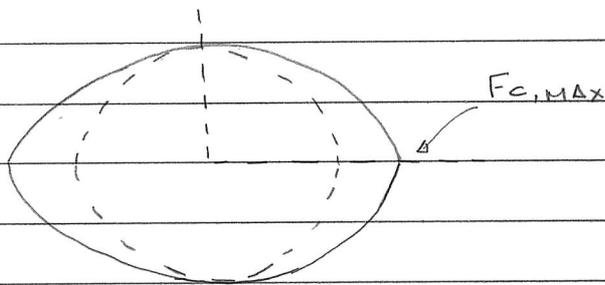
- como  $g = g_0 - \omega^2 R \sin^2 \theta$

$\hookrightarrow g \neq$  polo Norte ( $\theta = 0$ ) e Equador ( $\theta = \pi/2$ )  
sul ( $\theta = \pi$ )

como  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$  e  $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ : Eq. (87.2)

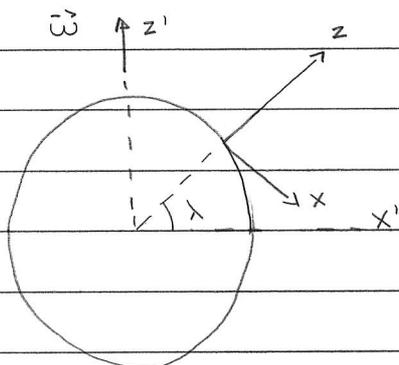
$\hookrightarrow \omega^2 R \approx 0,034 \text{ m/s}^2$

- notação Terra  $\rightarrow$  deformação superfície  $\rightarrow$  Eq. (90.1)!  
(esfera  $\rightarrow$  elipsóide)  
 $\sim$  força centrífuga (I)



Ex. 1: considerar: partícula massa  $m$  em queda livre na proximidade sup. Terra;

determinar desvio horizontal  $\sim$  força de Coriolis!



notas escolhe:

$\hat{z} \parallel \vec{g}$  (NOT  $\vec{g}_0$ ):

sup Terra  $\perp \hat{z}$  (90.2)

: veja Fig. 10.9, Marion p/ detalhes.

Eq. (89.3):  $\vec{F}_{ef} = m\vec{a}_n = \vec{S} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_n$

$\hookrightarrow \vec{a}_n = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_n$  (91.1)

como  $\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda \hat{x} + \omega \sin \lambda \hat{z}$

$\hookrightarrow \vec{a}_n = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$

$= -g\hat{z} + 2\omega(\hat{x} \cos \lambda - \hat{z} \sin \lambda) \times (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z})$

$\hookrightarrow \ddot{x} = 2\omega \sin \lambda \dot{y}$

$\ddot{y} = -2\omega(\cos \lambda \dot{z} + \sin \lambda \dot{x})$  (91.2)

$\ddot{z} = -g + 2\omega \dot{y} \cos \lambda$

como  $\omega \approx 0 \rightarrow$  solução por aproximações sucessivas!

• solução ordem zero:

Eq. (91.2)  $\rightarrow \ddot{x} \approx 0$   $x(t) = y(t) = 0$   
 $\ddot{y} \approx 0$  c.i.  $\rightarrow$  (91.3)  
 $\ddot{z} = -g$   $\vec{r}(t=0) = h\hat{z}$   $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$   
 $\vec{v}_n(t=0) = 0$   
 (\*)

• solução ordem  $\omega^1$ :

Eqs. (91.2) e (91.3):  
 $\ddot{x} \approx 0$   $x(t) = 0$   
 $\ddot{y} \approx 2\omega g t \cos \lambda$  c.i. (\*)  $\rightarrow$   $y(t) = \frac{1}{3}\omega g \cos \lambda t^3$  (91.4)  
 $\ddot{z} = -g$   $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

como  $z(t_s) = 0 \rightarrow t_s = \sqrt{2h/g}$

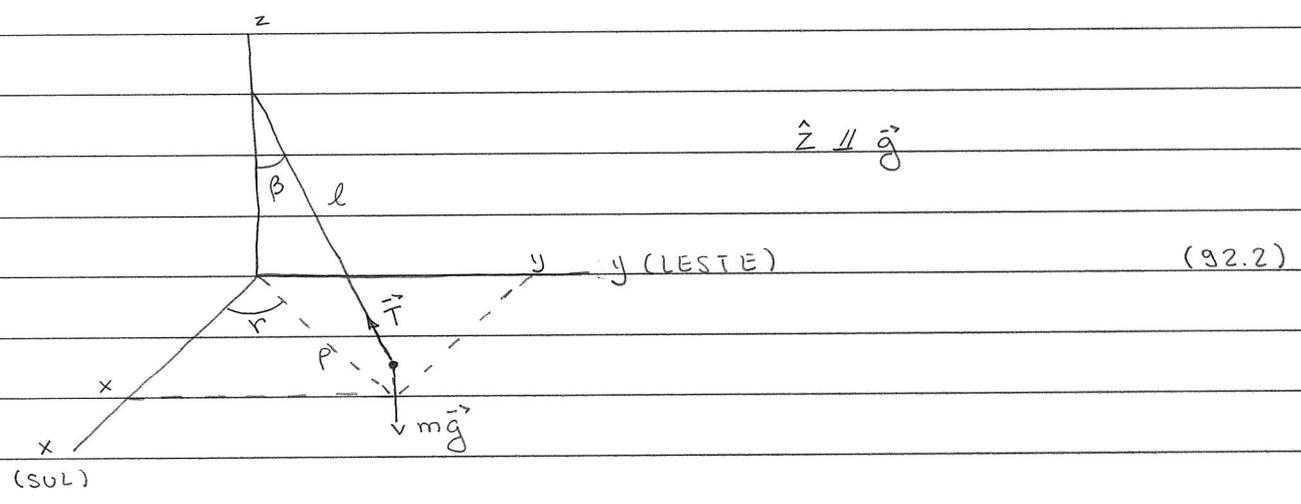
$\hookrightarrow d = y(t_s) \approx \frac{1}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$  : desvio horizontal (92.1)

como  $\cos \lambda > 0 \rightarrow d > 0$  : desvio p/ leste !

Ex.: p/  $h = 100m$  e  $\lambda = \pi/4 \rightarrow d \approx 1,55 cm.$

Ex.2: Pêndulo de Foucault,

ideia: determinar a precessão do plano de oscilação  
~ força de Coriolis



REF O girante = REF O girante do Ex.1

hipótese:  $\beta \ll 1$  ou  $l \gg r = \sqrt{x^2 + y^2}$  : vamos considerar apenas movimento no plano x-y ~ considerar pequenas oscilações w.r.t. eixo z ; (92.3)

Eq. (89.3) :  $\vec{F}_{ef} = m \vec{a}_n = \vec{T} + m \vec{g} - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}_n$  (92.4)

$\hookrightarrow \vec{a}_n = \vec{T}/m + \vec{g} - 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_n$

notas:  $T_x = -T \sin \beta \cos \varphi \approx -T \frac{p}{l} \cdot \frac{x}{p} = -\frac{T}{l} x$

hipótese (92.3)

$$T_y = -T \sin \beta \sin \varphi \approx -T \frac{p}{l} \cdot \frac{y}{p} = -\frac{T}{l} y \quad (93.1)$$

$$\underline{e} \quad T_z = T \cos \beta \approx T$$

como  $\vec{g} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_n$ : similar Ex. 1, temos que  
Eqs. (91.2), (92.4) e (93.1)

$$\hookrightarrow \ddot{x} = -\frac{T}{m l} x + 2\omega \sin \lambda \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{T}{m l} y - 2\omega (\cos \lambda \dot{z} + \sin \lambda \dot{x})$$

(93.2)

$$\ddot{z} = \frac{T}{m} - g + 2\omega \dot{y} \cos \lambda$$

hipótese:  $T = mg$  e  $\dot{z} \ll \dot{x}$  e  $\dot{y}$

$\hookrightarrow$  eqs. de movimento (93.2) p/ plano xy:

$$\ddot{x} = -g \frac{x}{l} + 2\omega \sin \lambda \dot{y} = -\omega_0^2 x + 2\omega z \dot{y} \quad (93.3.a)$$

$$\ddot{y} = -g \frac{y}{l} - 2\omega \sin \lambda \dot{x} = -\omega_0^2 y - 2\omega z \dot{x} \quad (93.3.b)$$

onde:  $\omega_0^2 = g/l$ : frequência oscilações pêndulo  
simples ( $\vec{F}_{\text{cor}} = 0$ )

e  $\omega z = \omega \sin \lambda$ : veja Eq. (91.1)

solução Eq. (93.3): interessante introduzir a variável  
auxiliar  $\eta = x + iy$ ;

notas: (93.3.c) + i(93.3.b):

$$\ddot{x} + i\dot{y} = -\omega_0^2(x + iy) + 2\omega_z(\dot{y} - i\dot{x})$$

$$\ddot{\eta}$$

$$\eta$$

$$-i(\dot{x} + i\dot{y}) = i\dot{\eta}$$

$$\hookrightarrow \ddot{\eta} + 2i\omega_z\dot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0$$

(94.1)

se  $\eta = e^{int}$ , temos que

$$\text{Eq. (94.1)}: (\eta^2 + 2\omega_z\eta - \omega_0^2)e^{int} = 0$$

$$\hookrightarrow \eta = -\omega_z \pm (\omega_z^2 + \omega_0^2)^{1/2} \approx -\omega_z \pm \omega_0$$

$$\hookrightarrow \eta(t) = x(t) + iy(t) = e^{-i\omega_z t} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t})$$

(94.2)

se condições iniciais:  $x(0) = x_0$ ;  $y(0) = 0$ ;

$$\mathcal{J}_{n,x}(0) = \mathcal{J}_{n,y}(0),$$

verifica-se que (veja pg. 96.):

$$A = B \approx \frac{1}{2}x_0$$

(94.3)

$$\hookrightarrow \eta(t) = x_0 e^{-i\omega_z t} \cos\omega_0 t$$

$$\text{ou } x(t) = (x_0 \cos\omega_0 t) \cos\omega_z t \quad \text{e} \quad y(t) = -(x_0 \cos\omega_0 t) \sin\omega_z t$$

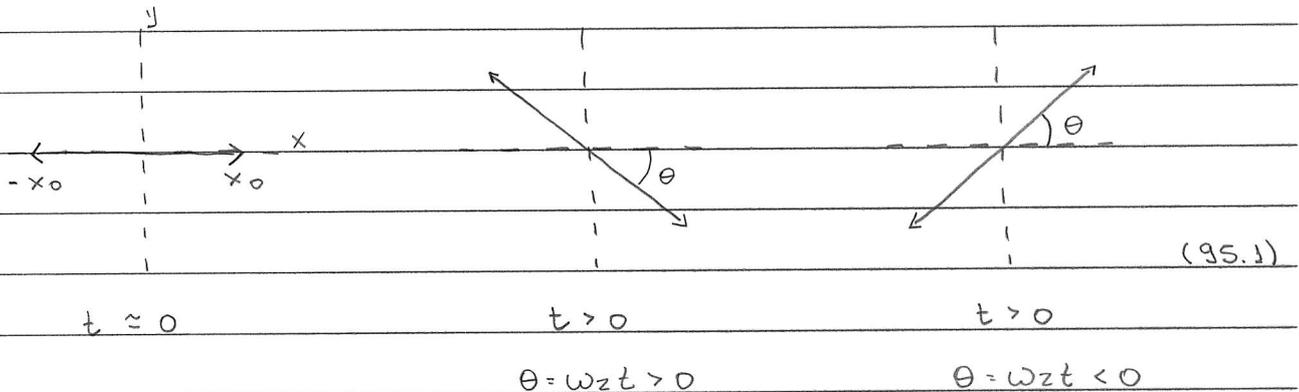
como  $|\omega_z| \ll \omega_0 \rightarrow p/ t \approx 0$ , temos que:  $x(t) \approx x_0 \cos\omega_0 t$

$$y(t) \approx 0;$$

$p/ 0 < \lambda < \pi/2 \rightarrow \omega_z = \omega \sin \lambda > 0$  : hemisfério norte;

$-\pi/2 < \lambda < 0 \rightarrow \omega_z = \omega \sin \lambda < 0$  : hemisfério sul;

de folo,  $\omega z$ : frequência de precessão do plano de oscilação;



· procedimento alternativo p/ identificar a precessão do plano de oscilação:

Considerar Eq. (94.1) e  $\omega = 0 \rightarrow \omega z = 0$ : efeito de rotação da terna desprezado:

$$\ddot{\eta}' + \omega_0^2 \eta' = 0$$

$$\hookrightarrow \eta'(t) = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

$\hookrightarrow$  Eq. (94.2) pode ser escrita como:

$$\eta(t) = e^{-i\omega z t} \eta'(t)$$

$$\text{ou } x + iy = (\cos \omega z t - i \sin \omega z t) (x' + iy')$$

$$\hookrightarrow x(t) = \cos \omega z t x'(t) + \sin \omega z t y'(t)$$

$$y(t) = -\sin \omega z t x'(t) + \cos \omega z t y'(t)$$

ou

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(96.1)

matriz de rotação ângulo  $\theta = \omega z t$   
 w.r.t. eixo  $\hat{z}$

Obs.: sobre a Eq. (94.3):

$$\text{como } \hat{r}(t) = -i(\omega z - \omega_0) A e^{-i(\omega z - \omega_0)t} - i(\omega z + \omega_0) B e^{-i(\omega z + \omega_0)t},$$

$$\text{temos que: } \hat{r}(0) = x(0) + i y(0) = x_0 = A + B$$

$$\dot{\hat{r}}(0) = -i(\omega z - \omega_0) A - i(\omega z + \omega_0) B = 0$$

$$\hookrightarrow \omega z (A + B) - \omega_0 (A - B) = 0$$

$x_0$

$$\hookrightarrow A + B = x_0$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} x_0 \left( \frac{1 + \omega z}{\omega_0} \right) \approx \frac{1}{2} x_0$$

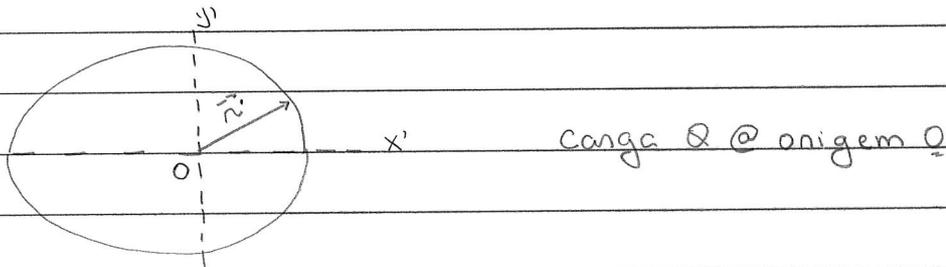
$$\text{e } A - B = \frac{\omega z}{\omega_0} x_0$$

$$B = \frac{1}{2} x_0 \left( \frac{1 - \omega z}{\omega_0} \right) \approx \frac{1}{2} x_0$$

Ex. 3: P. 9.22, Taylor (p/ detalhes, veja Sec. 7.5, Symon):

consideramos: partícula carga  $q$  sob campo elétrico  $\vec{E}$   
devido carga elétrica  $Q$ ;

hipótese: órbita carga  $q$ : elipse:



eq. de movimento no REF  $O'$  fixo:

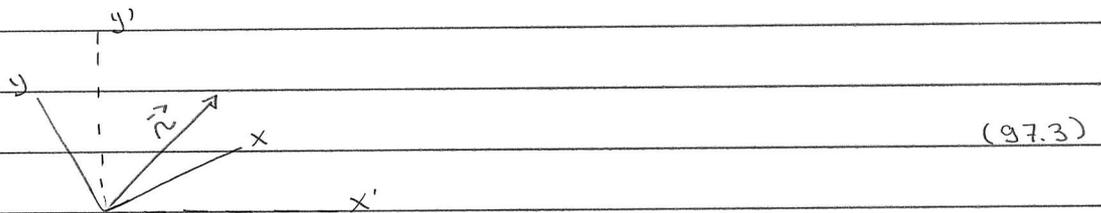
$$\vec{F} = \frac{\kappa \hat{n}'}{r'^2} = m \vec{a}_f \quad : \text{Eq. (82.2)} \quad (97.1)$$

⊕ campo magnético  $\vec{B}$ ;

nesse caso, a eq. de movimento assume a forma:

$$\vec{F} = m \vec{a}_f = \frac{\kappa \hat{n}'}{r'^2} + q \vec{v}_f \times \vec{B} \quad (97.2)$$

vamos considerar o movimento da partícula em um REF  $O'$   
que gira c/ velocidade angular  $\vec{\omega} = \omega \hat{z} = cte$ :



$$\text{Eq. (83.3): } \vec{F}_{ef} = m \vec{a}_n$$

(97.4)

$$\text{onde } \vec{F}_{ef} = \frac{\kappa \hat{n}}{r^2} + q \vec{v}_f \times \vec{B} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2 m \vec{\omega} \times \vec{v}_n$$

$$= \vec{F} \quad : \text{notas Fig. (97.3): } \hat{n}' = \hat{n},$$

pois origem REF  $O'$  = origem REF  $O$ !

como  $\vec{V}_f = \vec{V}_n + \vec{\omega} \times \vec{r}$  : Eq. (82.1)

L> Eq. (97.4) :

$$m \vec{a}_n = \frac{\kappa \hat{n}}{r^2} + \vec{V}_n \times (q \vec{B} + 2m \vec{\omega}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times (m \vec{\omega} + q \vec{B})$$

notan: se  $\vec{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{q \vec{B}}{m}$  (98.1)

$$L> m \vec{a}_n = \frac{\kappa \hat{n}}{r^2} + \frac{1}{4} \frac{q^2}{m} (\vec{\omega} \times \vec{B}) \times \vec{B} \approx \frac{\kappa \hat{n}}{r^2} \quad (98.2)$$

↑  
p/ "B pequeno"

L> eq. de movimento (98.2) no REF O girante =

= " " " (97.1) " REF O' fixo

L> REF O girante: órbita = elipse

e REF O' fixo: órbita = elipse que precisa c/  
frequência (98.1): Precessão de  
Larmor!