Oscilações acopladas.

Refs.: Cap. 12, Marion
Cap. 12, Symon
Cap. 11, Taylor
Cap. 6, Goldstein

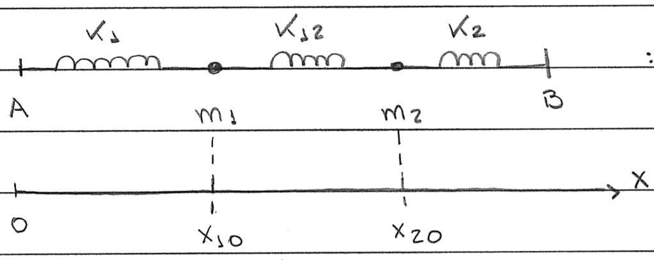
ideia: F 315: estudo 1 oscilador: livre
⊕ forças dissipativas
⊕ " externas;

F 415: vários osciladores acoplados
↳ descrição, e.g.:
- modos vibracionais molécula;
- " " cristal = fônons;

· conceito útil: modos normais de oscilação;

· Inicial: sistema (1-D) formado por 2 osciladores acoplados;

considerar: 2 massas $m_1 = m_2 = m$,
molas $k_1 = k_2 = k$ e k_{12},
ptos A e B: fixos;



: configuração de equilíbrio:

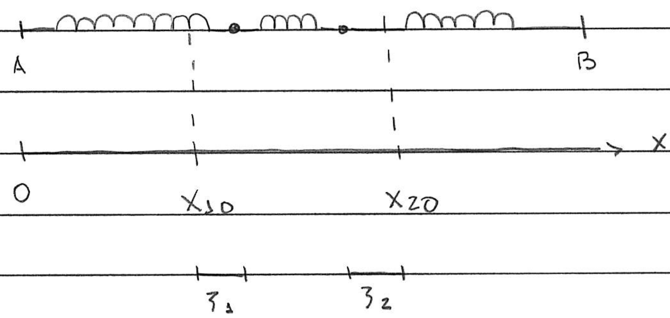
(176.1)

: posição m_1: $x_1 = x_{10}$
e " m_2: $x_2 = x_{20}$

hipótese: movimento apenas direção $\hat{x}$:
: oscilações longitudinais!

eqs. de movimento p/ m_1 e m_2:

notar:



: possível conf. fora do equilíbrio

(177.1)

Considerar: $x_1 = x_{10} + \xi_1$

e $x_2 = x_{20} + \xi_2$, c/ $|\xi_1|, |\xi_2| << (x_{20} - x_{10})$

↳ força resultante sob m_1: $F_1 = -k\xi_1 - k_{12}(\xi_1 - \xi_2)$

(177.2)

e " " " m_2: $F_2 = -k\xi_2 - k_{12}(\xi_2 - \xi_1)$

Obs.: p/ caso particular (177.1), temos que $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 < 0$

↳ $\xrightarrow{\text{Eq. (177.2)}}$ $F_1 < 0$ e $F_2 > 0$

↳ eqs. de movimento:

$$m\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 - k_{12}(\xi_1 - \xi_2)$$

$$m\ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 - k_{12}(\xi_2 - \xi_1)$$

: sistema eqs. diferenciais acopladas (177.3)

como movimento m_1 e m_2 oscilatório

↳ proposta solução: $\xi_1(t) = B_1 e^{i\omega t}$

$\xi_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$, $B_i \in \mathbb{C}$ (177.4)

Como $\ddot{\xi}_1 = -\omega^2 \xi_1$ e $\ddot{\xi}_2 = -\omega^2 \xi_2$

↳ Eqs. (177.3) e (177.4):

$$e^{i\omega t}\left((K + K_{12} - m\omega^2) B_1 \quad - K_{12} B_2 \right) = 0$$

$$e^{i\omega t}\left(-K_{12} B_1 \quad + (K + K_{12} - m\omega^2) B_2 \right) = 0$$

sistema eqs. : algébricas p/ B_1 e B_2

(178.1)

$\exists$ solução não trivial (B_1 e $B_2 \neq 0$)

$\hookrightarrow$ $\begin{vmatrix} K + K_{12} - m\omega^2 & -K_{12} \\ -K_{12} & K + K_{12} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$: eq. p/ ω !

$\hookrightarrow$ $(K + K_{12} - m\omega^2)^2 - K_{12}^2 = 0$

$K + K_{12} - m\omega^2 = \pm K_{12} \rightarrow m\omega^2 = K + K_{12} \pm K_{12}$:

: 2 soluções : $\omega_1 = \sqrt{(K + 2K_{12})/m}$

: (178.2)

e $\omega_2 = \sqrt{K/m}$.

: frequências características ou normais de oscilação !

notar:

• $\omega = \omega_1$ em (178.1) :

$(K + K_{12} - (K + 2K_{12}))B_1 - K_{12}B_2 = 0 \rightarrow B_1 = -B_2$

e (178.3)

$-K_{12}B_1 + (K + K_{12} - (K + 2K_{12}))B_2 = 0 \rightarrow B_1 = -B_2$

se $B_1 = C_1 e^{-i\delta_1}$, C_1 e $\delta_1 \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ Eqs. (177.4) e (178.3) :

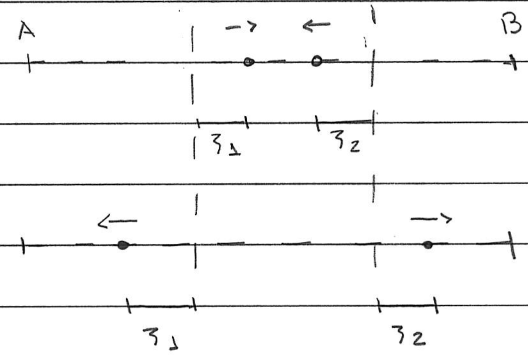
$z_1(t) = C_1 e^{i(\omega_1 t - \delta_1)}$

(179.1)

e $z_2(t) = -C_1 e^{i(\omega_1 t - \delta_1)}$

↳ parte real → $z_1(t) = -z_2(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1)$

nesse caso, temos que:



: possíveis configurações sistema:

(179.2)

: modo de oscilação antisimétrico (fora de fase)

Resumo: $\omega = \omega_1$ e $z_1(t) = -z_2(t)$: modo normal de oscilação

· $\omega = \omega_2$ em (178.1):

$(\kappa + \kappa_{12} - \kappa) B_1 - \kappa_{12} B_2 = 0 \rightarrow B_1 = B_2$ (179.3)

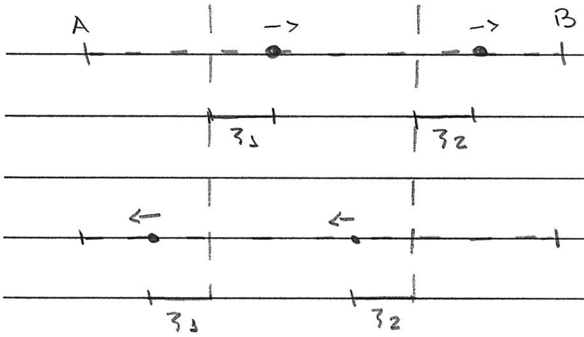
se $B_1 = C_2 e^{-i\delta_2}$, C_2 e $\delta_2 \in \mathbb{R}$

↳ $z_1(t) = z_2(t) = C_2 e^{i(\omega_2 t - \delta_2)}$

(179.4)

↳ parte real → $z_1(t) = z_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2)$

nesse caso, temos que, possíveis configurações do sistema são:



: modo de oscilação simétrico (em fase)

(180.1)

Resumo: $\omega = \omega_2$ e $\xi_1(t) = \xi_2(t)$: modo normal de oscilação

como eqs. de movimento (177.3) são lineares

↳ solução geral = combinação linear modos normais (179.1) e (179.4), i.e.:

$$\xi_1(t) = C_1 e^{i(\omega_1 t - \delta_1)} + C_2 e^{i(\omega_2 t - \delta_2)}$$

(180.2)

$$\xi_2(t) = -C_1 e^{i(\omega_1 t - \delta_1)} + C_2 e^{i(\omega_2 t - \delta_2)}$$

notar relação sinais!

considerando apenas parte real, temos que:

$$\xi_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2)$$

(180.3)

$$\xi_2(t) = -C_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2)$$

c/ $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$

notar: 4 ctes a determinar $C_{1,2}$ $\delta_{1,2}$ ~ 4 condições iniciais: $\xi_i(0)$ e $\dot{\xi}_i(0)$, $i = 1,2$

Ex.: considerar condições iniciais: $\xi_1(0) = d$, $\xi_2(0) = 0$,
$\dot{\xi}_1(0) = \dot{\xi}_2(0) = 0$;

nesse caso, Eq. (180.3)
(verificar!) →

$$C_1 \cos\delta_1 + C_2 \cos\delta_2 = d$$
$$-C_1 \cos\delta_1 + C_2 \cos\delta_2 = 0$$

e $$C_1 \omega_1 \sin\delta_1 + C_2 \omega_2 \sin\delta_2 = 0$$
$$-C_1 \omega_1 \sin\delta_1 + C_2 \omega_2 \sin\delta_2 = 0$$

Se $\delta_1 = \delta_2 = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = d/2$

↳ $$\xi_1(t) = \frac{d}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right)$$
$$(181.1)$$
$$\xi_2(t) = -\frac{d}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right)$$

• considerar variáveis:

$$\eta_1 = \xi_1 - \xi_2 \qquad\qquad \xi_1 = (\eta_2 + \eta_1)/2$$
$$\rightarrow \qquad\qquad (181.2)$$
$$\eta_2 = \xi_1 + \xi_2 \qquad\qquad \xi_2 = (\eta_2 - \eta_1)/2$$

↳ Eqs. (177.3) e (181.2):

$$\frac{1}{2} m\left(\ddot{\eta}_2 + \ddot{\eta}_1\right) = -\frac{1}{2}\kappa\left(\eta_2 + \eta_1\right) - \kappa_{12}\eta_1$$

$$\frac{1}{2} m\left(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1\right) = -\frac{1}{2}\kappa\left(\eta_2 - \eta_1\right) + \kappa_{12}\eta_1$$

↳ ⊖ : $m\ddot{\eta}_1 = -(\kappa + 2\kappa_{12})\eta_1$

⊕ : $m\ddot{\eta}_2 = -\kappa\eta_2$

ou $\ddot{\eta}_1 + \omega_1^2\eta_1 = 0$

: sistema eqs. diferenciais (182.1)

$\ddot{\eta}_2 + \omega_2^2\eta_2 = 0$ não acopladas !

↳ $\eta_1(t) = A_1 e^{i\omega_1 t}$; $\omega_1 = \sqrt{(\kappa + 2\kappa_{12})/m}$

e $\eta_2(t) = A_2 e^{i\omega_2 t}$; $\omega_2 = \sqrt{\kappa/m}$ (182.2)

c/ A_1 e $A_2 \in \mathbb{C}$

notar: $\eta_1(t)$ e $\eta_2(t)$ oscilam c/ as frequencias normais do sistema : coordenadas normais

Obs. 1 : notar que Eqs. (180.2), (181.2) e (182.2) são consistentes;

Obs. 2 : 2 osciladores acoplados, apenas oscilações longitudinais : 2 graus de liberdade ξ_1 e ξ_2
↳ 2 modos normais
ou 2 coordenadas normais η_1 e η_2 !

· Formulação geral

considerar: sistema conservativo c/ n graus de liberdade;
coordenadas generalizadas: q_i, $i = 1, 2, \dots, n$

hipótese: relação entre coordenadas cartesianas $\vec{r}_\alpha$ e q_i : (182.3)
: t-independente;

hipótese: $\exists$ configuração equilíbrio estável ~ coordenadas q_{i0}, i.e.,

$$\left(\frac{dU}{dq_i}\right)_0 = 0 \sim q_{i0} \; ; \; i = 1, 2, \ldots, n \qquad (183.1)$$

onde $U = U(q_1, \ldots, q_n)$: energia potencial sistema

considerar: pequenos "deslocamentos" w.r.t. q_{i0}; i.e.,

$$q_i = q_{0i} + \xi_i \; ; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (183.2)$$

novas coordenadas generalizadas!

temos que:

$$U(q_1, \ldots, q_n) \simeq \underbrace{U(q_{10}, \ldots, q_{n0})}_{\text{cte}} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{dU}{dq_i}\right)_0}_{=0} \underbrace{(q_i - q_{i0})}_{\xi_i} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \underbrace{(q_i - q_{i0})}_{\xi_i} \underbrace{(q_j - q_{j0})}_{\xi_j} + \ldots \qquad (183.3)$$

redefinindo o zero da energia potencial, temos que

$$U(q_1, \ldots, q_n) \simeq \frac{1}{2} \sum_{ij} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0}_{\equiv U_{ij}} \xi_i \xi_j = \frac{1}{2} \xi_i U_{ij} \xi_j \qquad (183.4)$$

notar: $U_{ij} = U_{ji}$

sobre a energia cinética: como a relação entre $\vec{r}_\alpha$ e q_i é t-independente (Eq. (182.3)), i.e.,

$$x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(q_j) \quad \text{ou} \quad q_j = q_j(x_{\alpha i}) \;; \quad i = 1, 2, 3$$

α: índice partícula

temos que (p/ detalhes, veja Sec. 7.8, Marion):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \qquad (184.1)$$

Eq. (183.2)

onde $m_{ij} = m_{ij}(q_1, \ldots, q_n)$

similar Eq. (183.3), temos que:

$$m_{ij}(q_1, \ldots, q_n) = m_{ij}(q_{10}, \ldots, q_{n0}) + \sum_k \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)_0 \eta_k + \ldots \qquad (184.2)$$

como $T \propto \dot{q}_i^2$, podemos considerar

$$m_{ij} \simeq m_{ij}(q_{10}, \ldots, q_{n0}) \;; \quad m_{ij} = m_{ji} \qquad (184.3)$$

$\hookrightarrow$ $L = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(m_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - U_{ij}\eta_i\eta_j\right)$: lagrangiana em termos pequenos desvios η_i (184.4)

· Eqs. de Lagrange: $\frac{\partial L}{\partial \eta_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) = 0 \,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$

como:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -\frac{1}{2}U_{kj}\eta_j - \frac{1}{2}U_{ik}\eta_i = -U_{kj}\eta_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} = \frac{1}{2} m_{kj} \dot{\xi}_j + \frac{1}{2} m_{ik} \dot{\xi}_i = m_{kj} \dot{\xi}_j$$

$\hookrightarrow$ $- U_{kj} \xi_j - m_{kj} \ddot{\xi}_j = 0$

ou $\sum_j \left(U_{kj} \xi_j + m_{kj} \ddot{\xi}_j \right) = 0 \; , \; k = 1, 2, \ldots, n$: (185.1)

: sistema de eqs. diferenciais acopladas!

novamente, considerando soluções oscilatórias:

$$\xi_j(t) = a_j e^{i(\omega t - \delta)} \quad ; \quad a_j, \omega, \delta \in \mathbb{R} \qquad (185.2)$$

$\hookrightarrow$ $\sum_j \left(U_{kj} - \omega^2 m_{kj} \right) a_j = 0$: sistema n eqs. algébricas p/ a_j (185.3)

$\exists$ solução não trivial

$\hookrightarrow$ $\left| U_{kj} - \omega^2 m_{kj} \right| = 0$: eq. p/ ω! (185.4)

soluções (185.4) : ω_k , $k = 1, 2, \ldots, n$: frequências normais de oscilação!

$\omega = \omega_k$ em (185.3) $\rightarrow$ determinação $a_j \xrightarrow[\text{notação}]{\text{nova}} a_{jk}$ (185.5)

notar: determinação modos normais é similar problema autovalores/autovetores!

solução geral: superposição de modos normais:

$$\eta_j(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} e^{i(\omega_k t - \delta_k)} \xrightarrow{Re} \sum_k a_{jk} \cos(\omega_k t - \delta_k)$$

(186.1)

Ex.: considerar sistema (176.1) e determinar as freqs. normais de oscilação via o formalismo lagrangiano;

- energia cinética: $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

como $x_1 = x_{10} + \eta_1$ e $x_2 = x_{20} + \eta_2$

$$\hookrightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\eta}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

(186.2)

onde $m_{ij} = m_i \delta_{ij}$; $i,j = 1,2$

- energia potencial:

$$U = \frac{1}{2} K_1 \eta_1^2 + \frac{1}{2} K_2 \eta_2^2 + \frac{1}{2} K_{12} (\eta_1 - \eta_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} (K + K_{12}) \eta_1^2 + \frac{1}{2} (K + K_{12}) \eta_2^2 - \frac{1}{2} K_{12} \eta_1 \eta_2 - \frac{1}{2} K_{12} \eta_2 \eta_1$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} U_{ij} \eta_i \eta_j$$

onde $U_{11} = U_{22} = K + K_{12}$

(186.3)

$U_{12} = U_{21} = -K_{12}$

Eq. (185.4): $\begin{vmatrix} U_{11} - \omega^2 m_{11} & U_{12} - \omega^2 m_{12} \\ U_{21} - \omega^2 m_{21} & U_{22} - \omega^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0$

(+) Eqs. (186.2) e (186.3):

$$\begin{vmatrix} K + K_{12} - \omega^2 m & -K_{12} \\ -K_{12} & K + K_{12} - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$\hookrightarrow$ $\omega_1 = \sqrt{(K + 2K_{12})/m}$ e $\omega_2 = \sqrt{K/m}$

· próxima etapa: caso geral: formulação matricial.

Eq. (185.3): $\sum_{j=1}^{n} (U_{kj} - \omega^2 m_{kj}) a_j = 0$

considerar: U_{ij} : elementos matriz $n \times n$ $\hat{U}$

m_{ij} : " " " $\hat{M}$

a_j : componentes vetor $\vec{a}$

$\lambda \equiv \omega^2$

$\hookrightarrow$ Eq. (185.3): $\hat{U}\vec{a} = \lambda \hat{M} \vec{a}$

(187.1)

e Eq. (185.4): $|\hat{U} - \lambda \hat{M}| = 0$:

: notar similaridade c/ problema autovalores/autovetores

p/ $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, temos que:

$$\hat{U}\vec{a}_k = \lambda_k \hat{M} \vec{a}_k \quad \text{c/} \quad \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \qquad (187.2)$$

veja "nova notação" (185.5) $\longrightarrow$

· vamos considerar as propriedades do problema de autovalores (187.1);

considerar: adjunta Eq. (187.1):

$$(\hat{U}\vec{a}_k)^+ = (\lambda_k \hat{M}\vec{a}_k)^+ \to \vec{a}^+_k \hat{U}^+ = \lambda^*_k \vec{a}^+_k \hat{M}^+, \quad (188.1)$$

onde $\vec{a}^+_k = (a^*_{1k} \; a^*_{2k} \; \ldots \; a^*_{nk})$

como $U_{ij} = U_{ji} \in \mathbb{R} \to \hat{U}^+ = \hat{U}$

" $m_{ij} = m_{ji} \in \mathbb{R} \to \hat{M}^+ = \hat{M}$

$$\hookrightarrow a^+_k \hat{U} = \lambda^*_k a^+_k \hat{M} \quad (188.2)$$

notar: $a^+_s \cdot (187.2)$: $\vec{a}^+_s \hat{U} \vec{a}_k = \lambda_k \vec{a}^+_s \hat{M} \vec{a}_k$

$(188.2) \cdot \vec{a}_k$: $\vec{a}^+_s \hat{U} \vec{a}_k = \lambda^*_s \vec{a}^+_s \hat{M} a_k$

c/ $k \to s$

$\hookrightarrow \ominus$: $0 = (\lambda_k - \lambda^*_s)\, \vec{a}^+_s \hat{M} \vec{a}_k$

$$\text{se } k = s \to (\lambda_k - \lambda^*_k)\, \vec{a}^+_k \hat{M} \vec{a}_k = 0; \quad (188.3)$$

Verifica-se que $\vec{a}^+_k \hat{M} \vec{a}_k > 0$: veja Sec. 6.2, Goldstein

$$\hookrightarrow \lambda_k = \lambda^*_k = \omega^2_k \in \mathbb{R} \quad (188.4)$$

· como U_{ij}, m_{ij} e $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $\xrightarrow{\text{Eq. (187.1)}}$ $a_{jk} \in \mathbb{R}$ (188.5)

· Eqs. (188.4) e (188.5) $\to$ podemos escrever Eq. (188.3) como:

$$(\lambda_k - \lambda_s)\, \vec{a}^t_s \hat{M} \vec{a}_k = 0 \qquad (189.1)$$

transposto vetor $\vec{a}_s$

. se $\lambda_k \neq \lambda_s$ p/ $\forall\, k \neq s$: frequências normais não-degeneradas

↳ $\vec{a}^t_s \hat{M} \vec{a}_k = 0$: condição de ortogonalidade entre autovetores $\vec{a}_s$ e $\vec{a}_k$ (189.2)

. se $k = s$ → $\vec{a}^t_k \hat{M} \vec{a}_k$: indeterminado!

escolha: $\vec{a}^t_k \hat{M} \vec{a}_k = 1$: condição de normalização p/ autovetor $\vec{a}_k$

(189.3)

↳ autovetores $\vec{a}_k$ constituem uma base ortonormal!

Obs.: se $\hat{M} = \hat{I}_{n\times n}$ → Eqs. (189.2) e (189.3)

↳ condição usual de ortonormalidade entre autovetores!

. considerar: a_{jk} : elementos matriz $n \times n$ $\hat{A}$: $A_{jk} = a_{jk}$;

como: $\vec{a}^t_s \hat{M} \vec{a}_k = \delta_{ks}$ (189.4)

$$↳ \sum_{ij} \underbrace{\underbrace{(\vec{a}^t_s)_i}_{=\,a_{is}}}_{A^t_{si}} M_{ij} \underbrace{\underbrace{(\vec{a}_k)_j}_{=\,a_{jk}}}_{A_{jk}} = \delta_{ks}$$

: veja Eqs. (187.2) e (188.1)

$\hookrightarrow \hat{A}^t \hat{M} \hat{A} = \hat{I}_{n \times n}$ (190.1)

· considerar: $\lambda_{ks} = \lambda_k \delta_{ks}$: elementos matriz $\hat{n} \times \hat{n}$ (diagonal) $\hat{\lambda}$

Eq. (187.2): $U \vec{a}_k = \lambda_k \hat{M} \vec{a}_k$

$$\hookrightarrow \sum_j U_{ij} \underbrace{(\vec{a}_k)_j}_{a_{jk}} = \lambda_k \sum_j M_{ij} \underbrace{(\vec{a}_k)_j}_{a_{jk}} = \sum_{js} \underbrace{\lambda_{ks}}_{\lambda_{sk}} M_{ij} \underbrace{a_{jk}}_{a_{js}}$$

, pois $\lambda_{ks} = \delta_{ks} \lambda_k$

$$\hookrightarrow \sum_j U_{ij} a_{jk} = \sum_{js} M_{ij} a_{js} \lambda_{sk}$$

$$\hookrightarrow \hat{U} \hat{A} = \hat{M} \hat{A} \hat{\lambda}$$

$$\hookrightarrow \hat{A}^t \hat{U} \hat{A} = \underbrace{\hat{A}^t \hat{M} \hat{A}}_{= \hat{I}_{n \times n} \ :\ \text{Eq. (190.1)}} \hat{\lambda}$$

$\hookrightarrow \hat{A}^t \hat{U} \hat{A} = \hat{\lambda}$: transformação de congruência (190.2)

Obs.: lembrar transf. de similaridade $\overset{\leftrightarrow}{T}' = A \overset{\leftrightarrow}{T} \hat{A}^t$: Eq. (117.1) !

· Resumo: $\hat{A}^t \hat{M} \hat{A} = \hat{I}$ e $\hat{A}^t \hat{U} \hat{A} = \hat{\lambda}$: matrizes $\hat{M}$ e $\hat{U}$ podem ser diagonalizadas via a transf. de congruência $\hat{A}$!

notar: como $A_{jk} = a_{jk}$ e definição (187.2)
↳ colunas matrix $\hat{A}$ = autovetores $\vec{a}_k$!

· Coordenadas normais,

novamente: solução geral (186.1):

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} e^{i(\omega_k t - \delta_k)}$$

considerando a condição de ortonormalização (189.4)

↳ Eq. (186.1) NÃO descreve deslocamentos associados às condições iniciais do sistema!

↳ é necessário introduzir α's α_k em (186.1), i.e.:

$$z_j(t) = \sum_k \alpha_k a_{jk} e^{i(\omega_k t - \delta_k)}$$

$$= \sum_k \underbrace{\alpha_k e^{-i\delta_k}}_{\equiv \beta_k \in \mathbb{C}} a_{jk} e^{i\omega_k t} = \sum_k a_{jk} \underbrace{\beta_k e^{i\omega_k t}}_{\equiv \eta_k(t)}$$

↳ $$z_j(t) = \sum_k a_{jk} \eta_k(t) \qquad (191.1)$$

notar: $\eta_k(t)$: relacionada c/ uma única frequência normal ω_k
↳ definição: $\eta_k(t)$: coordenada normal : lembrar Eq. (182.2)!

lembrar: β_k : determinados via condições iniciais!

Obs.: comparar Eqs. (181.2)

notar: Eq. (191.1) pode ser escrita em forma matricial:

$$\vec{\zeta} = \hat{A}\,\hat{\eta}$$

onde $\vec{\zeta}^{\,t} = \left(\zeta_1(t) \;\; \zeta_2(t) \; \dots \; \zeta_n(t) \right)$

(192.1)

e $\vec{\eta} = \left(\eta_1(t) \;\; \eta_2(t) \; \dots \; \eta_n(t) \right)$

· energia potencial (183.4):

$$U = \frac{1}{2} \zeta_i U_{ij} \zeta_j = \frac{1}{2} \vec{\zeta}^{\,t} \hat{U} \vec{\zeta}$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{A}\vec{\eta})^t \hat{U} (\hat{A}\vec{\eta}) = \frac{1}{2} \vec{\eta}^{\,t} \underbrace{\hat{A}^t \hat{U} \hat{A}}_{\hat{\lambda}\ :\ \text{Eq. } (190.2)} \vec{\eta}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\eta}^{\,t} \hat{\lambda} \vec{\eta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \eta_i^2 \qquad (192.2)$$

· energia cinética (184.1):

$$T = \frac{1}{2} \dot{\zeta}_i m_{ij} \dot{\zeta}_j = \frac{1}{2} \dot{\vec{\zeta}}^{\,t} \hat{M} \dot{\vec{\zeta}}$$

$$= \frac{1}{2} (\hat{A}\dot{\vec{\eta}})^t \hat{M} (\hat{A}\dot{\vec{\eta}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^{\,t} \underbrace{\hat{A}^t \hat{M} \hat{A}}_{\hat{1}_{n\times n}\ :\ \text{Eq. } (190.1)} \dot{\vec{\eta}}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^{\,t} \dot{\vec{\eta}} = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\eta}_i^2$$

(192.3)

$\hookrightarrow$ $L = T - U = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\eta}_i^2 - \omega_i^2 \eta_i^2$:

(192.4)

: lagrangiana em termos coordenadas normais é "diagonal"!

como: $\frac{\partial L}{\partial \eta_j} = -\omega_j^2 \eta_j$ e $\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} = \dot{\eta}_j$

(193.1)

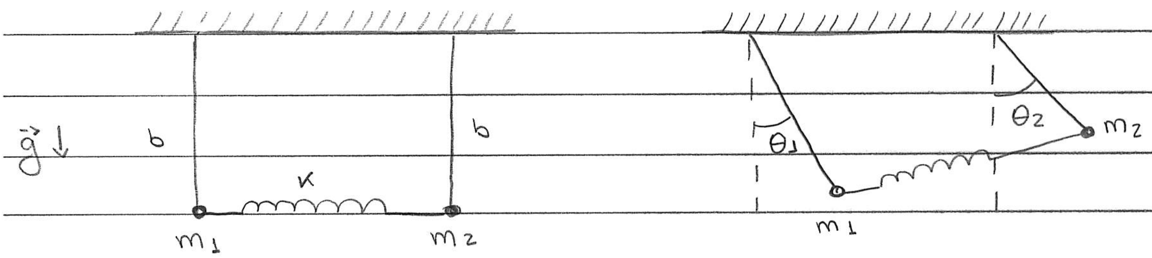
↳ $\frac{\partial L}{\partial \eta_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j}\right) = 0 \rightarrow \ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0$: sistema n eqs. diferenciais desacopladas

↳ $\eta_i(t) = C_i e^{i\omega_i t}$: OK c/ definição (191.1)

Ex.1: Ex. 12.4, Marion: 2 pêndulos acoplados:

considerar: pêndulos massa m e haste comprimento b e mola de κ;

determinar modos normais de vibração;



(193.2)

posição equilíbrio — configuração fora do equilíbrio

nesse caso:

· coordenadas generalizadas: ângulos θ_1 e θ_2

· energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (b\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (b\dot{\theta}_2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(mb^2\dot{\theta}_1^2 + mb^2\dot{\theta}_2^2 \right)$$

· energia potencial:

p/ $\theta_i << 1 \rightarrow b\sin\theta_1 - b\sin\theta_2$: Δx mola k

$\hookrightarrow U = mgb(1-\cos\theta_1) + mgb(1-\cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(b\sin\theta_1 - b\sin\theta_2)^2$

como, p/ pequenas oscilações w.r.t. vertical,

$$\cos\theta_i \simeq 1 - \tfrac{1}{2}\theta_i^2 \quad \text{e} \quad \sin\theta_i \simeq \theta_i$$

$\hookrightarrow U = \frac{1}{2}mgb(\theta_1^2+\theta_2^2) + \frac{1}{2}kb^2(\theta_1-\theta_2)^2$

$$= \frac{1}{2}\left((mgb+kb^2)(\theta_1^2+\theta_2^2) - kb^2(\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1)\right)$$

temos que:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} mb^2 & 0 \\ 0 & mb^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} mgb+kb^2 & -kb^2 \\ -kb^2 & mgb+kb^2 \end{pmatrix}$$

Eq. (187.1) : $|\hat{U} - \omega^2\hat{M}| = 0$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} mgb+kb^2-\omega^2mb^2 & -kb^2 \\ -kb^2 & mgb+kb^2-\omega^2mb^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\hookrightarrow (mgb+kb^2-\omega^2mb^2)^2 - (kb^2)^2 = 0$$

$$mgb+kb^2-\omega^2mb^2 = \pm kb^2$$

$\hookrightarrow \omega_1^2 = g/b$ e $\omega_2^2 = g/b + 2k/m$: frequências normais de oscilação

· sobre os autovetores:

Eq. (187.2): $\hat{U}\vec{a}_k = \omega_k^2 \hat{M}\vec{a}_k$

(195.1)

$$\hookrightarrow (mgb + \kappa b^2 - \omega_k^2 m b^2)\, a_{1k} + (-\kappa b^2)\, a_{2k} = 0$$
$$(-\kappa b^2)\, a_{1k} + (mgb + \kappa b^2 - \omega_k^2 m b^2)\, a_{2k} = 0$$

· $k=1$ em (195.1):

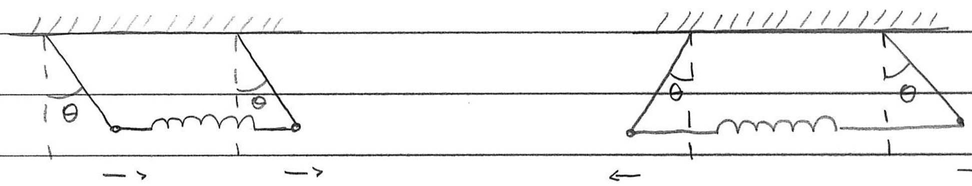
$$(mgb + \kappa b^2 - m b^2 g/b)\, a_{11} - \kappa b^2 a_{21} = 0 \to a_{11} = a_{21}$$

↳ $\omega_1 = \sqrt{g/b}$ e $a_{11} = a_{21}$: modo simétrico (195.2)

· $k=2$ em (195.1):

$$(mgb + \kappa b^2 - m b^2 (g/b + 2\kappa/m))\, a_{12} - \kappa b^2 a_{22} = 0 \to a_{12} = -a_{22}$$

↳ $\omega_2 = \sqrt{g/b + 2\kappa/m}$ e $a_{12} = -a_{22}$: modo antisimétrico (195.3)



$\omega_1 = \sqrt{g/b}$: freq. natural oscilação pêndulo: : mola não esticada/comprimida

$\omega_2 = \sqrt{g/b + 2\kappa/m}$

· condição de ortonormalidade (190.1): $\hat{A}^t \hat{M} \hat{A} = \hat{1}_{2\times 2}$

↳ $\sum_{ij} A^t_{ki} m_{ij} A_{js} = \sum_{ij} A_{ik} m_{ij} A_{js} = \sum_{ij} a_{ik} (\delta_{ij} m_i) a_{js}$

$\hookrightarrow \sum_i m_i a_{ik} a_{is} = \delta_{ks}$ (196.1)

· $k = s = 1$ em (196.1): $m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2 = 1$

$\xrightarrow{\text{Eq. (195.2)}}$ $2 \cdot (mb^2)\, a_{11}^2 = 1 \rightarrow a_{11} = a_{21} = \dfrac{1}{\sqrt{2mb^2}}$

· $k = s = 2$ em (196.2): $m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2 = 1$

$\xrightarrow{\text{Eq. (195.3)}}$ $2 \cdot (mb^2)\, a_{22}^2 = 1 \rightarrow -a_{12} = a_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{2mb^2}}$

$\hookrightarrow \hat{A} = \dfrac{1}{\sqrt{2mb^2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\hat{A}^{-1} = \sqrt{\dfrac{mb^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Eq. (192.1): $\vec{\theta} = \hat{A}\vec{\eta} \rightarrow \vec{\eta} = \hat{A}^{-1}\vec{\theta}$; $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \eta_1 = \sqrt{\dfrac{mb^2}{2}}\,(\theta_1 + \theta_2)$ e $\eta_2 = \sqrt{\dfrac{mb^2}{2}}\,(\theta_2 - \theta_1)$ (196.2)

· se $\theta_1 = \theta_2 \rightarrow \eta_1 \neq 0$ e $\eta_2 = 0 \rightarrow \omega_1$: modo simétrico

· se $\theta_1 = -\theta_2 \rightarrow \eta_1 = 0$ e $\eta_2 \neq 0 \rightarrow \omega_2$: modo antisimétrico

notar: $\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2mb^2}}(\eta_1 - \eta_2)$ e $\theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2mb^2}}(\eta_1 + \eta_2)$

$\hookrightarrow \theta_j(t) = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}\eta_k(t) = \sum_k a_{jk}\, \underbrace{\beta_k}_{\sim \text{c.i.}}\, e^{i\omega_k t}$: veja Eq. (191.1)

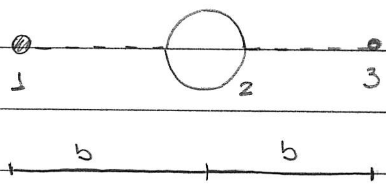
normalizados!

Exercício: considerar condições iniciais $\theta_1(0)=\theta_0$, $\theta_2(0)=0$, $\dot{\theta}_1(0)=\dot{\theta}_2(0)=0$ e determinar $\beta_k \in \mathbb{C}$; $k=1,2$.

Ex. 2: molécula triatômica linear;

considerar: molécula linear, átomo 1 = átomo 3 ≠ ≠ átomo 2;

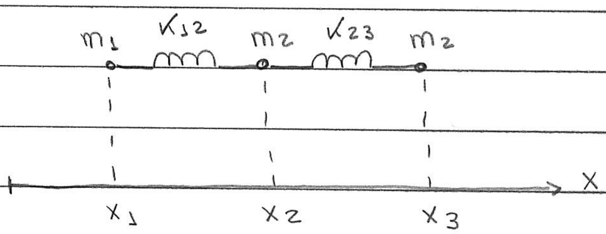
descrever: modos vibracionais da molécula;



(197.1)

hipótese: interação entre átomos: $U = \frac{1}{2} K x^2$

↳ modelo:



(197.2)

dadas as características da molécula, podemos considerar:

$m_1 = m_3 = m$

$m_2 = M \neq m$: m, M e K : parâmetros do modelo

$K_{12} = K_{23} = K$

configuração de equilíbrio: $x_i = x_{i0}$; $i = 1, 2, 3$

e $x_{20} - x_{10} = x_{30} - x_{20} = b$

vamos considerar apenas os modos longitudinais:

: vibrações ao longo do eixo da molécula: eixo x;

considerar: $q_i = x_i - x_{i0}$: deslocamento átomo i

w.r.t. posição de equilíbrio x_{i0} :

: coordenadas generalizadas;

· energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} M \dot{q}_2^2$$

$$\hookrightarrow \hat{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

· energia potencial:

$$U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - b)^2 + \frac{1}{2} k (x_3 - x_2 - b)^2$$

como $x_i = q_i + x_{i0}$

$$\hookrightarrow x_2 - x_1 - b = q_2 - q_1 + (x_{20} - x_{10}) - b = q_2 - q_1$$

$$x_3 - x_2 - b = q_3 - q_2 + (x_{30} - x_{20}) - b = q_3 - q_2$$

$$\hookrightarrow U = \frac{1}{2} k (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} k (q_3 - q_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} k \left(q_1^2 + 2q_2^2 + q_3^2 - q_2 q_1 - q_1 q_2 - q_3 q_2 - q_2 q_3 \right)$$

$$\hookrightarrow \hat{U} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

Eq. (187.1): $|\hat{U} - \omega^2 \hat{M}| = 0$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$\hookrightarrow (K - \omega^2 m)^2 (2K - \omega^2 M) - 2K^2 (K - \omega^2 m) = 0$

$(K - \omega^2 m) \left(\underbrace{(K - \omega^2 m)(2K - \omega^2 M) - 2K^2} \right) = 0$

$\cancel{2K^2} - \omega^2 K M - \omega^2 (2Km) + \omega^4 m M - \cancel{2K^2}$

$\omega^2 \left(\omega^2 m M - K M - 2Km \right)$

$\hookrightarrow \omega^2 (K - \omega^2 m)\left(\omega^2 m M - K(M + 2m) \right) = 0$

(199.1)

$\hookrightarrow \omega_1 = 0 ; \quad \omega_2 = \sqrt{K/m} ; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{K}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$: freqs. normais de oscilação

· sobre os autovetores:

Eq. (187.2): $\hat{U}\vec{a}_s = \omega_s^2 \hat{M} \vec{a}_s$

$$\hookrightarrow \begin{aligned} (K - \omega_s^2 m) a_{1s} - K a_{2s} &= 0 \\ -K a_{1s} + (2K - \omega_s^2 M) a_{2s} - K a_{3s} &= 0 \\ -K a_{2s} + (K - \omega_s^2 m) a_{3s} &= 0 \end{aligned} \qquad (199.2)$$

· $s = 1$ em (199.2):

$K a_{11} - K a_{21} = 0 \rightarrow a_{11} = a_{21}$

e $-K a_{21} + K a_{31} = 0 \rightarrow a_{21} = a_{31}$

$\hookrightarrow \omega_1 = 0$ e $a_{11} = a_{21} = a_{31}$: modo translacional (199.3)

· $s=2$ em (199.2):

$$a_{22}=0 \quad \rightarrow \quad a_{22}=0$$

$$-Ka_{12}-Ka_{32}=0 \quad \rightarrow \quad a_{12}=-a_{32}$$

$$\hookrightarrow \omega_2=\sqrt{K/m} \quad \text{e} \quad a_{12}=-a_{32} \quad \text{e} \quad a_{22}=0 : \qquad (200.1)$$

: átomo 2 em repouso e átomos 1 e 3 fora de fase

· $s=3$ em (199.2):

$$-2K\frac{m}{M}a_{13}-Ka_{23}=0 \quad \rightarrow \quad a_{13}=-\frac{M}{2m}a_{23}$$

$$-Ka_{23}-2K\frac{m}{M}a_{33}=0 \quad \rightarrow \quad a_{33}=-\frac{M}{2m}a_{23}$$

$$\hookrightarrow \omega_3=\sqrt{\frac{K}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)} \quad \text{e} \quad a_{13}=a_{33}=-\frac{M}{2m}a_{23} : \qquad (200.2)$$

: átomos 1 e 3 em fase e fora de fase c/ átomo 2

resumo:

ω_1 :  : modo translação

ω_2 :  : " longitudinal

ω_3 :  : " "

Obs.: o modo translacional poderia ter sido eliminado no início se tivéssemos considerado que o CM da molécula está em repouso:

$$m(x_1+x_2)+Mx_3=0 ; \qquad (200.3)$$

o vínculo (200.3) permite eliminar, e.g., x_2

↳ problema inicial c/ 3 graus de liberdade ⟶ problema c/ 2 graus de liberdade!

· sobre as coordenadas normais:

nesse caso, a condição de ortonormalidade (190.1):

$$: \hat{A}^t \hat{M} \hat{A} = \hat{1} \longrightarrow \sum_{ij} a_{ik} m_{ij} a_{js} = \delta_{ks} \quad : \text{Eq. (196.1)}$$

(201.1)

$$\text{p/ } k = s \longrightarrow m\left(a_{1s}^2 + a_{3s}^2\right) + M a_{2s}^2 = 1, \quad s = 1, 2, 3$$

· $s = 1$ em (201.1) e (199.3):

$$m\left(a_{11}^2 + a_{31}^2\right) + M a_{21}^2 = 1$$

$$\hookrightarrow a_{11}^2 (2m + M) = 1 \rightarrow a_{11} = (2m + M)^{-1/2}$$

· $s = 2$ em (201.1) e (200.1):

$$m\left(a_{12}^2 + a_{32}^2\right) + M a_{22}^2 = 1$$

$$\hookrightarrow 2m a_{12}^2 = 1 \rightarrow a_{12} = (2m)^{-1/2}$$

· $s = 3$ em (201.1) e (200.2):

$$m\left(a_{13}^2 + a_{33}^2\right) + M a_{23}^2 = 1$$

$$\hookrightarrow a_{23}^2 \left(2 \cdot m \cdot \frac{M^2}{4m^2} + M\right) = 1 \rightarrow a_{23} = \sqrt{\frac{2m}{M(2m + M)}}$$

$$\hookrightarrow \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{(2m+M)/2m} & \sqrt{M/2m} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2m/M} \\ 1 & -\sqrt{(2m+M)/2m} & \sqrt{M/2m} \end{pmatrix} \qquad (202.1)$$

Eq. (192.1) : $\vec{q} = \hat{A}\vec{\eta} \rightarrow \vec{\eta} = \hat{A}^{-1}\vec{q}$; $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

Verifica-se que (exercício):

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \left(m q_1 + M q_2 + m q_3 \right)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(q_1 - q_3 \right) \qquad (202.2)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \left(\sqrt{\frac{Mm}{2}} (q_1 + q_3) - \sqrt{2Mm}\, q_2 \right)$$

notar Eq. (202.2):

se $q_1 = q_2 = q_3 \rightarrow \eta_1 \neq 0,\ \eta_2 = \eta_3 = 0 \rightarrow \omega_1$: modo translacional

se $q_1 = -q_3$ e $q_2 = 0 \rightarrow \eta_2 \neq 0,\ \eta_1 = \eta_3 = 0 \rightarrow \omega_2$: modo longitudinal

se $q_1 = +q_3$ e $q_2 = -\frac{2m}{M} q_1 \rightarrow \eta_3 \neq 0,\ \eta_1 = \eta_2 = 0 \rightarrow \omega_3$: " "

(202.3)

· caso geral: molécula c/ n átomos;

temos que:

$3n - 3 - 3 = 3n - 6$ modos vibracionais

\# graus de liberdade ($3n$)

\# modos translação (3)

\# modos rotação (3)

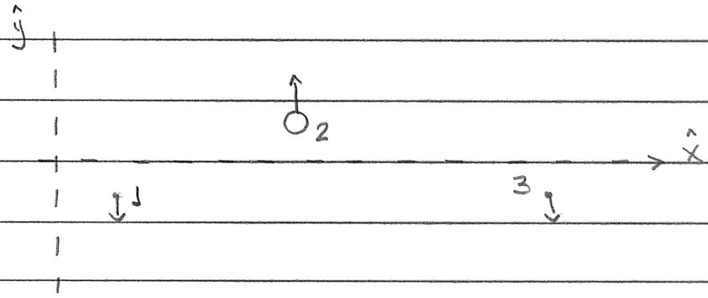
entretanto, p/ molécula linear: $3n - 3 - 2 = 3n - 5$

excluir rotação ao longo eixo da molécula! (2)

p/ $n = 3$ -> 4 modos vibracionais : 2 modos longitudinais
2 " transversais

modo transversal:

(p/ detalhes, veja Sec. 12.7, Marion)



: similar p/ direção $\hat{z}$

· solução geral (191.1):

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^{3} a_{jk}\eta_k(t) = \sum_k a_{jk}\beta_k e^{i\omega_k t}$$

β_k ~ c.i.

a_{jk} normalizados;

se $\beta_k = \alpha_k + i\gamma_k$; $\alpha_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$

$$\xrightarrow{Re} q_j(t) = \sum_k a_{jk}(\alpha_k \cos\omega_k t - \gamma_k \sin\omega_k t)$$

$$\rightarrow \dot{q}_j(t) = (-1)\sum_k \omega_k a_{jk}(\alpha_k \sin\omega_k t + \gamma_k \cos\omega_k t)$$

considerar: C.I.: $q_j(0) = d\,\delta_{j,2}$ e $\dot{q}_j(0) = 0$

↳ $q_1(0) = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0$

$q_2(0) = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = d$

$q_3(0) = a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 = 0$

⊕ Eq. (202.1):

$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0$

$a_{11}\alpha_1 \qquad - a_{23}\alpha_3 = d$

$a_{11}\alpha_1 - a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0$

verifica-se que (exercício): $\alpha_1 = \dfrac{M}{2m+M}$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = -\dfrac{\sqrt{2mM}}{2m+M}$

↳ $\dot{q}_1(0) = \omega_2 a_{12} \gamma_2 + \omega_3 a_{13} \gamma_3 = 0$

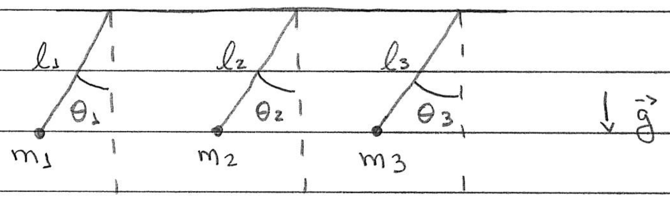
$\dot{q}_2(0) = \omega_2 a_{22} \gamma_2 + \omega_3 a_{23} \gamma_3 = 0 \;\rightarrow\; \gamma_3 = 0 \;\rightarrow\; \gamma_2 = 0$

$\dot{q}_3(0) = \omega_2 a_{32} \gamma_2 + \omega_3 a_{33} \gamma_3 = 0$

Ex. 3: Ex. 12.6. Marion:

considerar: 3 pêndulos, massas m_i e hastes comprimentos ℓ_i; acoplamento via barra superior A que não é rígida;

determinar: modos normais de vibração;



(204.1)

coordenadas generalizadas: θ_1, θ_2 e θ_3;

hipótese: massas: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$: unidades
hastes : $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 1$ naturais

↳ energia cinética: $T = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right)$

↳ $\hat{M} = \hat{1}_{3\times3}$

hipótese: acoplamento linear entre os pêndulos
↳ energia potencial:

$$U = \frac{1}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\epsilon\theta_1\theta_2 - 2\epsilon\theta_1\theta_3 - 2\epsilon\theta_2\theta_3\right)$$

$$\hookrightarrow \hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 & -\epsilon \\ -\epsilon & -\epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Eq. (187.1): $|\hat{U} - \omega^2 \hat{M}| = 0$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -\epsilon & -\epsilon \\ -\epsilon & 1-\omega^2 & -\epsilon \\ -\epsilon & -\epsilon & 1-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\hookrightarrow (1-\omega^2)^3 - 2\epsilon^3 - 3\epsilon^2(1-\omega^2) = 0$$

$$(1-\omega^2)^3 - 4\epsilon^2(1-\omega^2) - 2\epsilon^3 + \epsilon^2(1-\omega^2) = 0$$

$$(1-\omega^2)\underbrace{\left((1-\omega^2)^2 - 4\epsilon^2\right)}_{(1-\omega^2+2\epsilon)(1-\omega^2-2\epsilon)} + \epsilon^2\left(1-\omega^2-2\epsilon\right) = 0$$

$$\hookrightarrow (1-\omega^2-2\epsilon)\left((1-\omega^2)(1-\omega^2+2\epsilon) + \epsilon^2\right) = 0$$

$$(1-\omega^2-2\epsilon)\left(1-\omega^2+\epsilon\right)^2 = 0$$

$\hookrightarrow \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{1+\epsilon}$: frequência degenerada

$$\omega_3 = \sqrt{1-2\epsilon} \qquad (205.1)$$

· sobre os autovetores:

Eq. (187.2): $\hat{U}\vec{a}_s = \omega_s^2 \hat{M}\vec{a}_s = \omega_s^2 \vec{a}_s$

$$\hookrightarrow \begin{aligned} (1-\omega_s^2)a_{1s} &- \epsilon a_{2s} &- \epsilon a_{3s} &= 0 \\ -\epsilon a_{1s} &+ (1-\omega_s^2)a_{2s} &- \epsilon a_{3s} &= 0 \\ -\epsilon a_{1s} &- \epsilon a_{2s} &+ (1-\omega_s^2)a_{3s} &= 0 \end{aligned} \qquad (205.2)$$

· $s=3$ em (205.2):

$$2a_{13} - a_{23} - a_{33} = 0 \qquad (1)$$
$$-a_{13} + 2a_{23} - a_{33} = 0 \qquad (2)$$
$$-a_{13} - a_{23} + 2a_{33} = 0 \qquad (3)$$

notar:

$(2) + (3) = -(1)$

$(1) - (2)$: $3a_{13} - 3a_{23} = 0 \rightarrow a_{13} = a_{23}$

(1) : $2a_{13} - a_{13} - a_{33} = 0 \rightarrow a_{33} = a_{13}$

↳ $\omega_3 = \sqrt{1 - 2\epsilon}$ e $a_{13} = a_{23} = a_{33}$: 3 pêndulos em fase (206.1)

· $s = 1$ em (205.2) : $a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0$

↳ necessário utilizar a relação de ortonormalidade (190.1) p/ determinar a_{11}, a_{21} e a_{31};

Eq. (190.1) : $\hat{A}^t \hat{M} \hat{A} = \hat{1} \longrightarrow \hat{A}^t \hat{A} = \hat{1}$

↳ $\sum_i A^t_{ki} A_{is} = \delta_{ks} \rightarrow \sum_i A_{ik} A_{is} = \sum_i a_{ik} a_{is} = \delta_{ks}$ (206.2)

Eq. (206.2) p/ $k = 1$ e $s = 3$:

$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0$

$\xrightarrow{\text{Eq. (206.1)}}$ $a_{13}\left(a_{11} + a_{21} + a_{31}\right) = 0$

se $a_{31} = 0 \rightarrow a_{11} = -a_{21}$

↳ $\omega_1 = \sqrt{1 + \epsilon}$ e $a_{11} = -a_{21}$ e $a_{31} = 0$: pêndulos 1 e 2 fora de fase e pêndulo 3 em repouso (206.3)

$\cdot\ s=2$ em (205.2) : $a_{12}+a_{22}+a_{32}=0$

Eq. (206.2) p/ $k=1$ e $s=2$:

$$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}=0$$

$\xrightarrow{\text{Eq. (206.3)}}$ $a_{11}(a_{12}-a_{22})=0 \rightarrow a_{12}=a_{22}$

Eq. (206.1) p/ $k=2$ e $s=3$:

$$a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}=0$$

$\xrightarrow{\text{Eq. (206.1)}}$ $a_{13}(a_{12}+a_{22}+a_{32})=0 \rightarrow a_{32}=-2a_{12}$

$\hookrightarrow \omega_2=\sqrt{1+\epsilon}$ e $a_{12}=a_{22}$ e $a_{32}=-2a_{12}$: (207.1)

: pêndulos 1 e 2 em fase e pêndulo 3 fora de fase

$\cdot$ considerando os elementos $k=s$ de (206.2), temos que:

$\cdot\ s=1$: $a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2=1$

$\xrightarrow{\text{Eq. (206.3)}}$ $2a_{11}^2=1 \rightarrow a_{11}=1/\sqrt{2}$ $\quad a_{21}=-1/\sqrt{2}$ $\quad a_{31}=0$

$\cdot\ s=2$: $a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2=1$

$\xrightarrow{\text{Eq. (207.1)}}$ $2a_{12}^2+4a_{12}^2=1 \rightarrow a_{12}=1/\sqrt{6}=a_{22}$ $\quad a_{32}=-2/\sqrt{6}$

$\cdot\ s=3$: $a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1$

$\xrightarrow{\text{Eq. (206.1)}}$ $3a_{13}^2=1 \rightarrow a_{13}=a_{23}=a_{33}=1/\sqrt{3}$

$$\hookrightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad (208.1)$$

· Coordenadas normais:

Eq. (192.1): $\vec{\theta} = \hat{A}\vec{\eta} \rightarrow \vec{\eta} = \hat{A}^{-1}\vec{\theta}$; $\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$

verifica-se que (exercício):

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3) \qquad (208.2)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

notar:

· se $\theta_1 = -\theta_2$ e $\theta_3 = 0 \rightarrow \eta_1 \neq 0$ e $\eta_2 = \eta_3 = 0$

se $\theta_1 = \theta_2$ e $\theta_3 = -2\theta_1 \rightarrow \eta_2 \neq 0$ e $\eta_1 = \eta_3 = 0$

se $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \rightarrow \eta_3 \neq 0$ e $\eta_1 = \eta_2 = 0$

· Sistema c/ $n \gg 1$ graus de liberdade

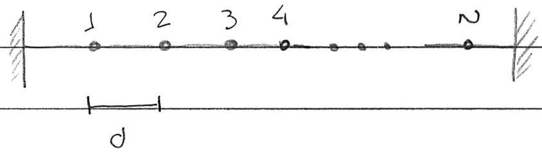
considerar: corda elástica e N partículas massas m_i;

corda: massa nula, extremidades fixas,

τ: tensão em equilíbrio;

partículas: massas $m_i = m$,

distância equilíbrio: d

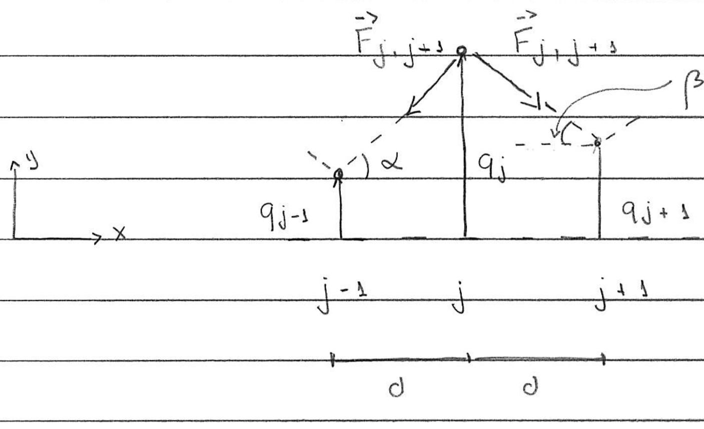


: configuração equilíbrio (209.1)

notar: comprimento corda: $L = (N+1)d$

ideia: descrever pequenas oscilações transversais;

considerar: força sob partícula m_j (componente $\hat{j}$):



: configuração fora equilíbrio (209.2)

$\hookrightarrow F_j = -F_{j,j-1}\sin\alpha - F_{j,j+1}\sin\beta$

como $\alpha, \beta \ll 1 \rightarrow F_{j,j-1} = F_{j,j+1} \simeq \tau$

$\sin\alpha \simeq tg\,\alpha = (q_j - q_{j-1})/d$

$\sin\beta \simeq tg\,\beta = (q_j - q_{j+1})/d$

↳ $F_j \simeq \frac{\tau}{d}\left(q_j - q_{j-1} + q_j - q_{j+1}\right)$

$$= t\left(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}\right) \quad ; \quad t \equiv \tau/d \qquad (210.1)$$

↳ eqs. de movimento:

$$F_j = m\ddot{q}_j \rightarrow \ddot{q}_j = \frac{t}{m}\left(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}\right) \; ; \; j = 1, 2, \ldots, N \, :$$

: sistema N eqs. diferenciais acopladas! (210.2)

notar: nesse caso, a partícula m_j interage apenas c/ seus primeiros vizinhos $j \pm 1$!

· procedimento alternativo: formulação lagrangiana:

· energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{q}_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1} m\dot{q}_j^2 \qquad (210.3)$$

pois $m_j = m$ e $\dot{q}_{N+1}(t) = 0$

· energia potencial:

$$U = \frac{1}{2}\, t \sum_{j=1}^{N+1} \left(q_{j-1} - q_j\right)^2 \qquad (210.4)$$

Obs.: $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$: extremidades fixas

notar: $$-\frac{\partial U}{q_i} = -\frac{1}{2}\, t\Big(\underbrace{2(q_i - q_{i+1})}_{(j=i+1)} - \underbrace{2(q_{i-1} - q_i)}_{(j=i)}\Big)$$

$$= t\left(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}\right) \; : \; \text{Eq. } (210.1)!$$

$\hookrightarrow L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1} m\dot{q}_j^2 - t(q_{j-1} - q_j)^2$ (211.1)

notar: coordenadas generalizadas: deslocamentos verticais q_j;

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = t(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$$

$\hookrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \rightarrow m\ddot{q}_i = t(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1})$: Eq. (210.2)

· soluções eqs. de movimento (210.2): considerando soluções oscilatórias:

$$q_j(t) = a_j e^{-i\omega t} \quad ; \quad a_j \in \mathbb{C}$$ (211.2)

temos que $\ddot{q}_j(t) = -\omega^2 a_j e^{-i\omega t}$

$\hookrightarrow e^{-i\omega t}\left(-t a_{j-1} + (2t - m\omega^2)a_j - t a_{j+1}\right) = 0 \; ; \; j = 1, 2, \ldots, N$

c/ $a_0 = a_{N+1} = 0$: extremidades fixas

$\hookrightarrow \underbrace{\left(2 - \frac{m\omega^2}{t}\right)}_{\equiv \lambda} a_j - a_{j-1} - a_{j+1} = 0$: sistema eqs. homogêneas p/ a_j (211.3)

em forma matricial, temos que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & \lambda & -1 \\ 0 & \cdots & & & & -1 & \lambda \end{bmatrix}}_{\hat{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix}}_{\vec{a}} = 0 \qquad (212.1)$$

$\exists$ solução não trivial $\rightarrow$ $\det \hat{D} = 0$: polinômio grau $\underline{N}$ p/ ω^2 !

Obs.: p/ avaliação $\det \hat{D}$, veja Sec. 24, Fetter;

alternativa: como sistema (209.1) apresenta invariância translacional w.r.t. translações direção x e parâmetro d

↳ podemos considerar:

$$a_j = A e^{i k (dj)} \quad ; \quad A \in \mathbb{C} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \qquad (212.2)$$

CUIDADO: $\neq$ parâmetro $\underline{k}$ de mola!

↳ Eq. (211.2): $q_j(t) = A e^{i(jkd - \omega t)}$ (212.3)

notar: $q_{j+1}(t) = q_j(t) e^{ikd}$

$q_{j-1}(t) = q_j(t) e^{-ikd}$

$\ddot{q}_j(t) = -\omega^2 q_j(t)$

↳ eqs. de movimento (210.2):

$$m\ddot{q}_j = \tau\,(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1})$$

$$-m\omega^2 q_j = \tau\,\underbrace{\left(e^{-ikd} - 2 + e^{ikd}\right)}_{-2(1+\cos kd)\,=\,-4\sin^2\frac{kd}{2}} q_j$$

$$\hookrightarrow \omega^2 = \frac{4\tau}{m}\sin^2\frac{kd}{2}$$

ou $\omega = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}}\,\sin\frac{kd}{2}$: frequências características/normais de oscilação do sistema (213.1)

de fato, podemos considerar : $\omega = \omega(k)$: relação de dispersão ;

notar: em princípio, ω e k : variáveis contínuas; entretanto, vamos verificar que condições de contorno $\longrightarrow$ ω e k discretos !

· condições de contorno: $q_0(t) = q_{N+1}(t) = 0$

notar Eq. (212.3) : $q_0(t) = A e^{-i\omega t} = 0 \rightarrow A = 0$: not ok !

entretanto : $q_j(t) = B e^{-i(jkd+\omega t)}$: solução eqs. de movimento (210.2) c/ $\omega = \omega(k)$: Eq. (213.1)

dessa forma, podemos considerar:

$$q_j(t) = A e^{i(jkd-\omega t)} + B e^{-i(jkd+\omega t)} \qquad (213.2)$$

temos que:

$q_0(t) = Ae^{-i\omega t} + Be^{-i\omega t} = 0 \rightarrow A = -B$

$\hookrightarrow q_j(t) = A\sin(jkd)\, e^{-i\omega t} \quad ; \quad A \in \mathbb{C}$ (214.1)

$q_{N+1}(t) = A\sin\left((N+1)kd\right) e^{-i\omega t} = 0$

$\hookrightarrow (N+1)kd = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$

ou $k = \dfrac{n\pi}{(N+1)d} = \dfrac{n\pi}{L}$ (214.2)

Eq. (213.1) : $\omega = 2\sqrt{\dfrac{\tau}{md}} \sin\dfrac{kd}{2} \rightarrow \omega_n = 2\sqrt{\dfrac{\tau}{md}} \sin\left(\dfrac{n\pi d}{2L}\right);$

$n = 1, 2, \ldots, N$

$\hookrightarrow$ # modos normais!

dessa forma, temos que:

$q_j(t) = A\sin\left(jd \cdot \dfrac{n\pi}{L}\right) e^{-i\omega_n t} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, N;$

de fato, solução geral:

$$q_j(t) = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\sin\left(jd \cdot \frac{n\pi}{L}\right)}_{a_{jn}} \underbrace{A_n e^{-i\omega_n t}}_{\eta_n(t)}$$ (214.3)

A_n: $\hookrightarrow \sim$ c.i.

$\eta_n(t)$: comparar c/ (191.1)

$\hookrightarrow$ coordenada normal

Obs.: considerar $N = 2$: sistema (176.1);

identificando $\tau/d \rightarrow k$: cte molas

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi d}{2\cdot 3\cdot d}\right)}_{1/2} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

: comparar c/ (178.2)

$$\omega_2 = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi d}{3\cdot d}\right)}_{\sqrt{3}/2} = \sqrt{\frac{3K}{m}}$$

p/ $K_{12} = K$

$$q_1(t) = A_1 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi d}{3d}\right)}_{\sqrt{3}/2} e^{-i\omega_1 t} + A_2 \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi d}{3d}\right)}_{\sqrt{3}/2} e^{-i\omega_2 t}$$

$$q_2(t) = A_1 \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi d}{3d}\right)}_{\sqrt{3}/2} e^{-i\omega_1 t} + A_2 \underbrace{\sin\left(\frac{4\pi d}{3d}\right)}_{-\sqrt{3}/2} e^{-i\omega_2 t} \quad :$$

: comparar c/ Eq. (180.2)

· determinação $A_n \in \mathbb{C}$:

notar: $A_n \in \mathbb{C} \to 2N$ cttes a determinar

$\sim 2N$ c.i.: $q_j(0)$ e $\dot{q}_j(0)$; $j = 1, 2, \ldots, N$

se $A_n \to A_n + iB_n$; A_n e $B_n \in \mathbb{R}$

Re Eq. (214.3) $\to$

$$q_j(t) = \sum_{n=1}^{N} \sin\left(jd\frac{n\pi}{L}\right)\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right) \tag{215.1}$$

$$\hookrightarrow \dot{q}_j(t) = \sum_n \omega_n \sin\left(jd\frac{n\pi}{L}\right)\left(-A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t\right)$$

$\hookrightarrow \quad q_j(0) = \sum_n A_n \sin\left(j d \frac{n\pi}{L}\right)$

(216.1)

$\dot{q}_j(0) = \sum_n \omega_n B_n \sin\left(j d \frac{n\pi}{L}\right)$

notar:

$\sum_j$ Eq. (216.1) $* \sin\left(j d \frac{m\pi}{L}\right)$:

$$\hookrightarrow \sum_j q_j(0) \sin\left(j d \frac{m\pi}{L}\right) = \sum_n \underbrace{\sum_j \sin\left(j d \frac{n\pi}{L}\right) \sin\left(j d \frac{m\pi}{L}\right)} \cdot A_n$$

$$= \frac{1}{2}(N+1)\,\delta_{m,n} = \frac{1}{2}\frac{L}{d}\,\delta_{m,n}$$

$$\hookrightarrow A_m = \frac{2d}{L} \sum_j q_j(0) \sin\left(j d \frac{m\pi}{L}\right)$$

de modo análogo, verifica-se que: (216.2)

$$B_m = \frac{2d}{L\omega_m} \sum_j \dot{q}_j(0) \sin\left(j d \frac{m\pi}{L}\right)$$

Obs.: identidade (veja P.14.6.1, Anfken):

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \sin\left(j \frac{p\pi}{N}\right) \sin\left(j \frac{q\pi}{N}\right) = N\,\delta_{p,q}$$

p/ $N \to \frac{1}{2}(N+1) \to$ Eq. (216.2) !

Ex.: considerar N ímpar e

condições iniciais: $q_j(0) = 0$

$\dot{q}_j(0) = v_0\, \delta_{j,\frac{(N+1)}{2}}$; $j = 1, 2, \ldots N$

Eq. (216.2) : $A_m = 0$

$$B_m = \frac{2d}{L\omega_m} V_0 \sin\left(\underbrace{\frac{1}{2}(N+1)\cdot d \cdot \frac{m\pi}{(N+1)d}}_{m\pi/2}\right)$$

se $m = 2p+1 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}(2p+1)\right) = (-1)^p \; ; \; p = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(N-1)$

↳ Eq. (215.1):

$$q_j(t) = \frac{2dV_0}{L} \sum_{p=0}^{1/2(N-1)} \frac{(-1)^p}{\omega_{2p+1}} \sin\left(jd\frac{\pi}{L}(2p+1)\right) *$$

$$* \sin\left(\omega_{2p+1} t\right) \qquad (217.1)$$