

Sistemas contínuos.

Refs.: Cap. 13, Marion

Cap. 8, Symon

Cap. 16, Teylon

Secs. 13.1 e 13.2, Goldstein

Lembrar:

· corpo rígido: sistema n partículas, distâncias relativas fixas;

· sist. contínuo: " " " " " " variáveis;

1ª parte discussão: propagação de ondas: longitudinais
e transversais;

2ª " " : introdução formalismo Lagrangiano

ideia: corda elástica $N \rightarrow +\infty$ → corda :

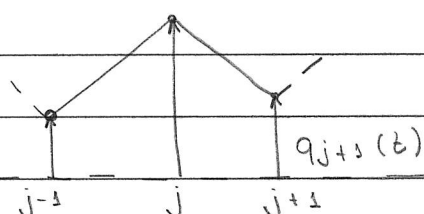
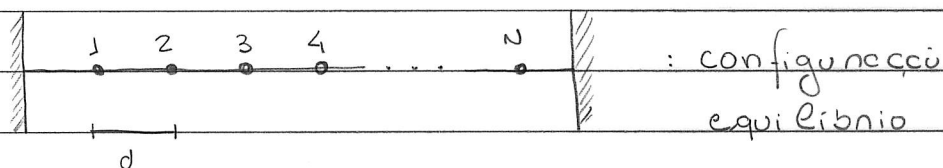
⊕ N partículas: vibrante

: Fig. (209.1)

: equação de onda

= solução " " " em 1-D!

novamente: corda elástica ⊕ N partículas (209.1):



: configuração
fora equilíbrio

(218.1)

hipótese: massas $m_i = m$ e massa corda $\rightarrow 0$;

notas: comprimento corda: $L = (N+1)d$

solução geral (214.3):

$$q_j(t) = \sum_{n=1}^N \sin\left(jd \frac{n\pi}{L}\right) C_n e^{i\omega_n t}; \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$q_n(t)$: coordenada (219.1)

$C_n \in \mathbb{C}$

normais

e frequências normais (213.1):

$$\omega_n = 2 \sqrt{\frac{\tau}{m/d}} \sin\left(\frac{n\pi d}{2L}\right); \quad n = 1, 2, \dots, N$$

considerar o limite:

$$N \rightarrow +\infty$$

$$(N+1)d = L$$

(219.2)

$$m \rightarrow 0$$

tais que $\frac{m}{d} = \rho$: densidade linear: cte

$$d \rightarrow 0$$

de massa

$\hookrightarrow$ Eq. (219.1): $jd \rightarrow x$: variável contínua

$$q_j(t) \rightarrow q(x, t)$$

$$\omega_n = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\tau}{m/d}} \sin\left(\frac{n\pi d}{2L}\right) \xrightarrow{d \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{2}{d} \cdot \frac{n\pi d}{2L}$$

(219.3)

$$\hookrightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} : \text{frequências de vibração}$$

modos normais

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n e^{i\omega_n t}}_{\eta_n(t)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \begin{array}{l} \text{: deslocamento} \\ \text{transversal} \\ \text{da corda} \end{array} \quad (220.1)$$

notar Eq. (220.1): série de Fourier p/ $q(x,t)$: veja Cap. 14, Anken

considerar: $C_n = A_n + iB_n$; temos que

$$q(x,t) = \sum_{n \geq 0} (A_n + iB_n) e^{i\omega_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{L Re} \rightarrow q(x,t) = \sum_{n \geq 0} (A_n \cos \omega_n t - B_n \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(220.2)

lembrar: p/ $N < +\infty$: A_n e $B_n \sim$ condições iniciais;

p/ $N \rightarrow +\infty$, temos que:

$$q(x,0) = \sum_{n \geq 0} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

↑
forma (perfil) inicial de corda

(220.3)

$$\dot{q}(x,0) = - \sum_{n \geq 0} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{notar: } \int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \text{Eq. (220.3):}$$

em particular, temos que:

$$\int_0^L dx q(x,0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_{n \geq 0} A_n \underbrace{\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}_{\frac{L}{2} \delta_{n,m}}$$

$$\hookrightarrow A_m = \frac{2}{L} \int_0^L dx q(x,0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

e, similar:

(22.1)

$$B_m = -\frac{2}{\omega_m L} \int_0^L dx \dot{q}(x,0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Obs. 1: compare Eq. (216.2) (discreto) c/ Eq. (221.1) (contínuo):

$$\text{Eq. (216.2)} \xrightarrow{d \rightarrow 0} \text{Eq. (221.1)!}$$

$$\sum_j d \rightarrow \int_0^L dx$$

Obs. 2: Eqs. (214.2) e (219.3):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{P}} \underbrace{\frac{n\pi}{L}}_{=k} \rightarrow \omega = \omega(k) = \sqrt{\frac{g}{P}} k \equiv c k$$

velocidade característica (221.2)

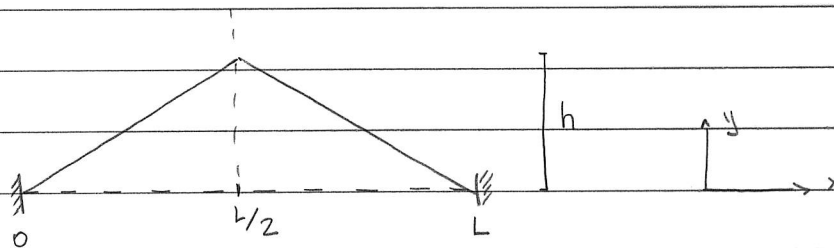
$$[c^2] = \frac{[g]}{[P]} = \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{kg} = \frac{m^2}{s^2}$$

Ex.: Ex. 13.1, Menion:

considerar corda comprimento L

e densidade linear de massa $\rho = \mu/L$;

perfil inicial de corda $q(x,0)$:



(222.1)

é movimento transversal a partir do repouso: $\dot{q}(x,0) = 0$;

determinar $q(x,t)$;

nesse caso:

$$q(x,0) = \begin{cases} x \cdot \frac{h}{L/2} = \frac{2xh}{L} & ; 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{2h(L-x)}{L} & ; L/2 \leq x \leq L \end{cases} \quad (222.2)$$

como $\dot{q}(x,0) = 0$ Eq. (221.1) $\rightarrow B_m = 0$

Eq. (221.1) e (222.2):

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} dx \cdot \frac{2xh}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L dx \cdot \frac{2h(L-x)}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$t = L - x \rightarrow dt = -dx$$

$$\frac{2h}{L} \int_0^{L/2} dt \cdot \underbrace{2 \sin\left(\frac{n\pi(L-t)}{L}\right)}_{-\cos(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)}$$

$$\hookrightarrow A_n = \frac{4h}{L^2} (1 - \cos(n\pi)) \int_0^{L/2} dx \cdot x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(-1)^L L^2 \cdot \frac{1}{2n^2\pi^2} \left(n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

Verifican! $\rightarrow A_n = \frac{8h}{n^2\pi^2} (-1)^{1/2(n-1)}$; $n = 1, 3, 5, 7, \dots$

↳ Eq. (220.2):

$$q(x,t) = \sum'_{\substack{n \geq 1 \\ \text{ímpar}}} \frac{8h}{n^2 \pi^2} (-1)^{(n-1)/2} \cos \omega_n t \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

se $n = 2m+1$, $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\hookrightarrow q(x,t) = \sum_{m \geq 0} \frac{8h}{\pi^2} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \cos \omega_{2m+1} t \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right)$$

(223.1)

notas: $m=0 \sim$ modo fundamental ω_1

$\hat{=}$ $m \geq 1 \sim$ harmônicos ímpares $\omega_3, \omega_5, \omega_7, \dots$;

nesse caso, p/ c.c. (222.1) $\rightarrow$ harmônicos pares $\omega_2, \omega_4, \dots$
ausentes!

- sobre a energia da corda vibrante,

- energia cinética (210.3):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} m \dot{q}_j^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{d}{dt} m \dot{q}_j^2(t)$$

$$\mid \text{Eq. (219.2)} \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L dx \rho \dot{q}^2(x,t) \quad (223.2)$$

- energia potencial (210.4):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{d} (q_{j-1} - q_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{d} (q_{j-1} - q_j)^2$$

$$\mid \text{Eq. (219.2)} \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L dx \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \quad (223.3)$$

$$L \rightarrow E = T + U = \frac{1}{2} \int_0^L dx \, \rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 + \tau \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \quad (224.1)$$

próxima etapa: expressar E em termos coordenadas
normais $q_n(t)$;

$$\text{Eq. (220.1)} \rightarrow \dot{q}(x,t) = \sum_n \dot{q}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (224.2)$$

$$\partial_x q(x,t) = \sum_n \left(\frac{n\pi}{L}\right) q_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

notas:

$$\int_0^L dx \, \dot{q}^2(x,t) = \sum_{n,m} \dot{q}_n(t) \dot{q}_m(t) \underbrace{\int_0^L dx \, \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}_{\frac{L}{2} \delta_{n,m}}$$

$$\int_0^L dx \, q^2(x,t) = \sum_{n,m} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \left(\frac{m\pi}{L}\right) q_n(t) q_m(t) \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\int_0^L dx \, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}_{L/2 \delta_{n,m}}$$

$$L \rightarrow \text{Eq. (224.1)}: E = \frac{1}{4} \rho L \sum_{n \geq 1} \dot{q}_n^2 + \underbrace{\tau \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}_{\omega_n^2 : \text{Eq. (219.3)}} q_n^2 \quad (224.3)$$

como $q_n(t) = (A_n + iB_n) e^{i\omega_n t}$; $A_n, B_n \in \mathbb{R}$

$$| \text{Re} \rightarrow q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

$$\dot{q}_n(t) = -\omega_n (A_n \sin \omega_n t - B_n \cos \omega_n t)$$

$$\hookrightarrow T = \frac{1}{4} \rho L \sum_{n \gg 1} \omega_n^2 (A_n^2 \sin^2 \omega_n t + B_n^2 \cos^2 \omega_n t - 2 A_n B_n \sin \omega_n t \cos \omega_n t)$$

(225.1)

$$\dot{q}_n U = \frac{1}{4} \rho L \sum_{n \gg 1} \omega_n^2 (A_n^2 \cos^2 \omega_n t + B_n^2 \sin^2 \omega_n t + 2 A_n B_n \sin \omega_n t \cos \omega_n t)$$

$$\hookrightarrow E = \frac{1}{4} \rho L \sum_{n \gg 1} \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) = c E ! \quad (225.2)$$

$$\underbrace{\quad}_{|C_n|^2}$$

notas: E : soma sob modos normais!

• Como $T = T(t)$ e $U = U(t)$

$\hookrightarrow$ é interessante calcular $\langle T \rangle$ e $\langle U \rangle$:

: valor médio sob 1 período;

$$\text{Como } \langle \sin^2 \omega_n t \rangle = \langle \cos^2 \omega_n t \rangle = 1/2$$

$$\dot{q}_n \langle \sin \omega_n t \cos \omega_n t \rangle = 0$$

$$\text{Eq. (225.1)} \rightarrow \langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{8} \rho L \sum_{n \gg 1} \omega_n^2 (A_n^2 + B_n^2) : \quad (225.3)$$

: lembrar Teorema Virial: veja Sec. 7.13, Marion.

Equação de onda,

ideia: determinar a equação de movimento cuja solução é dada pela Eq. (220.1);

Lembrar: eqs. de movimento (210.2) p/ corda elástica

⊕ $N < +\infty$ partículas:

$$m \ddot{q}_j = \frac{\tau}{d} (q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) ; \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\hookrightarrow m \ddot{q}_j = - \frac{\tau}{d} \underbrace{\frac{1}{d} (q_j - q_{j-1})}_{(I)} + \frac{\tau}{d} \underbrace{\frac{1}{d} (q_{j+1} - q_j)}_{(II)}$$

$$\text{notar: } (I) \xrightarrow{\text{Eq. (219.2)}} (\partial_x q)_{j-1}$$

$$(II) \quad " \quad (\partial_x q)_j$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{d} \left((II) - (I) \right) = \frac{1}{d} \left((\partial_x q)_j - (\partial_x q)_{j-1} \right) \xrightarrow{\text{Eq. (219.2)}} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

$$\text{similar: } \frac{m}{d} \ddot{q}_j \xrightarrow{\text{Eq. (219.2)}} \rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

$\hookrightarrow$ eq. de movimento (210.2) ⊕ Limite contínuo (219.2):

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0 \quad : \text{ eq. de onda 1-D !} \quad (226.1)$$

Obs.: veja Sec. 13.4, Marion p/ método alternativo p/ determinar

Eq. (226.1): similar discussão Física Básica II.

como $c^2 = \tau/\rho$: Eq. (221.2), podemos escrever (226.1) como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

(227.1)

onde $\psi = \psi(x, t)$: função de onda

próximo etapa: considerar Eq. (227.1) como equação fundamental e determinar solução geral

inicial: sobre a forma solução eq. de onda:

Eq. (227.1) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0$$

definindo: $\xi = x + ct \rightarrow x = \frac{1}{2}(\xi + \mu)$ (227.2)

$$\mu = x - ct \quad ct = \frac{1}{2}(\xi - \mu)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \mu} = 0$$

funções arbitrárias!

$$\hookrightarrow \text{sol. geral: } \psi(\xi, \mu) = f(\mu) + g(\xi)$$

(227.3)

$$\text{ou } \psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) :$$

: solução tipo onda plana

notas:

• $f(x-ct) = \text{cte}$ p/ plos $(x,t) \in \text{plano } x-ct = \text{cte}'$;
propagação + $\hat{x}$; velocidade de propagação = c ;

• $g(x+ct) = \text{cte}$ p/ plos $(x,t) \in \text{plano } x+ct = \text{cte}''$;
propagação - $\hat{x}$; velocidade de propagação = c ;

• determinação solução eq. de onda (227.1): via método de separação de variáveis;

hipótese: $\psi(x,t) = \psi(x) X(t)$ (228.1)

$$\text{Eqs. (227.1) } \oplus \text{ (228.1): } \quad x \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \psi \frac{d^2 X}{dt^2} = 0$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\frac{c^2}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2}}_{\text{apenas função}} = \underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dt^2}}_{\text{apenas função}} = \text{cte} \equiv -\omega^2$$

apenas função
variável x $\oplus$ apenas função
variável t

$$\hookrightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = 0 \quad (228.2)$$

soluções (228.1):

$$\psi(x) = A \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

$$X(t) = C \cos \omega t + D \sin(\omega t)$$

ou

$$\psi(x) = A e^{i\omega x/c} + B e^{-i\omega x/c}$$

$$X(t) = C e^{i\omega t} + D e^{-i\omega t}$$

onde determinacão $\omega, A, B, C, D \sim$ condições de contorno /

" iniciais

solução geral (227.1) : Eqs. (228.1) e (228.3) :

$$\psi(x,t) = A \exp\left(+i\frac{\omega}{c}(x-ct)\right) + B \exp\left(-i\frac{\omega}{c}(x-ct)\right)$$

(1)

(2)

(229.1)

$$+ C \exp\left(i\frac{\omega}{c}(x+ct)\right) + D \exp\left(-i\frac{\omega}{c}(x+ct)\right)$$

(3)

(4)

comparamos Eqs. (227.3) e (229.1) :

(1) e (2) : Ondas planas, propagação $+\hat{x}$

(3) e (4) : " " , " $-\hat{x}$

Definição : $k = \frac{\omega}{c}$: número de onda ; $[k]$: comprimento⁻¹

$\hookrightarrow$ comprimento de onda λ :

(229.2)

$$\lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k} \text{ ou } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\hookrightarrow \text{Eq. (229.1)} : \psi(x,t) = A e^{ik(x-ct)} + B e^{-ik(x-ct)}$$

$$+ C e^{ik(x+ct)} + D e^{-ik(x+ct)}$$

ou

(229.3)

$$\psi(x,t) = A e^{i(kx-\omega t)} + B e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$+ C e^{i(kx+\omega t)} + D e^{-i(kx+\omega t)}$$

sobre as condições de contorno;

considerar: corda vibrante, comprimento L

e extremidades fixas;

nesse caso, temos as condições de contorno:

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \rightarrow \psi(0) = \psi(L) = 0 \quad (230.1)$$

$$\text{Eq. (228.3): } \psi(0) = A = 0 \rightarrow \psi(x) = B \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

$$\psi(L) = B \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \rightarrow \frac{\omega L}{c} = n\pi$$

ou $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$: frequências de vibração

modos normais : OK c/ Eq. (221.2)

como $\omega \rightarrow \omega_n \rightarrow \psi(x,t) = \psi(x)\chi(t) \rightarrow \psi_n(x,t)$:

$$\psi_n(x,t) = (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(230.2)

$$\text{ou } \psi(x,t) = (C_n e^{i\omega_n t} + D_n e^{-i\omega_n t}) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) :$$

: OK c/ Eq. (220.2)

notar: condições de contorno (230.1)

(extremidades fixas)

→ possíveis freqs. de

oscilação são

discretas !

solução geral Eq. de onda (227.1) :

combinação linear (superposição) modos normais :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(231.1)

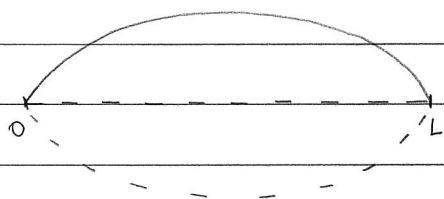
$$\text{ou } \psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{i\omega_n t} + D_n e^{-i\omega_n t}) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) :$$

: OK c/ Eq. (220.2)

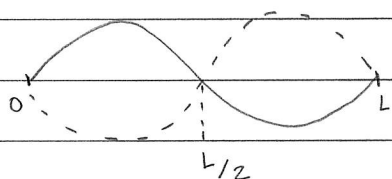
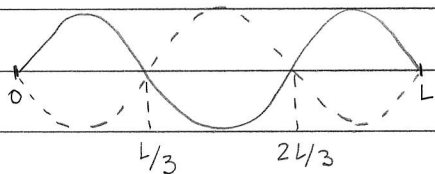
notas Eq. (231.1): movimento corda: superposição de modos
normais

onde: $n=1 \sim \omega_1$: modo fundamental

$n > 1 \sim \omega_n$: harmônicos

: $n=1$: modo fundamental

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{L} \rightarrow \kappa = \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{L} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = 2L$$

: $n=2$: $\omega_2 = \frac{2\pi c}{L} \rightarrow \kappa = \frac{2\pi}{L} \rightarrow \lambda = L$ : $n=3$: $\omega_3 = \frac{3\pi c}{L} \rightarrow \kappa = \frac{3\pi}{L} \rightarrow \lambda = \frac{2L}{3}$

• sobre as condições iniciais;

considerando: $\psi(x,0) = u_0(x)$

(231.2)

$$\text{e } \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sigma_0(x)$$

Eqs. (231.1) e (232.2):

$$\psi(x,0) = u_0(x) = \sum_n C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

: Séries de (232.1)

$$\text{e } \partial_t \psi(x,0) = v_0(x) = \sum_n \omega_n D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{Fourier!}$$

notar: $\int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \text{Eq. (232.1)}:$

$$\int_0^L dx u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_n C_n \underbrace{\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}_{\frac{L}{2} \delta_{n,m}}$$

$$\hookrightarrow C_m = \frac{2}{L} \int_0^L dx u_0(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

: (232.2)

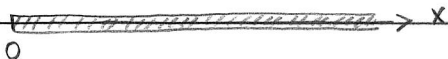
$$\text{e } D_m = \frac{2}{\omega_m L} \int_0^L dx v_0(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

: comparar c/ Eq. (221.1)

Ex.: Ex. 13.3, Marion: reflexão e transmissão;

considerar corda c/ densidade linear de massa

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & x < 0 \\ \rho_2, & x > 0 \end{cases} \quad ; \rho_1 \text{ e } \rho_2 \text{ cte} \quad (232.3)$$



ideia: estudar processo de reflexão e transmissão em $x=0$;

considerar: propagação direção $+\hat{x}$;

$\hookrightarrow \psi_{\text{INC}}(x,t) = A e^{-i(k_1 x - \omega t)}$; $A \in \mathbb{R}$: onda incidente

considerando processos de reflexão e transmissão, temos que a solução geral da eq. de onda (227.1) assume a forma:

$$\psi_1(x,t) = \psi_{\text{INC}} + \psi_{\text{REF}} = A e^{-i(k_1 x - \omega t)} + B e^{+i(k_1 x + \omega t)}, \quad x < 0$$

$$\psi_2(x,t) = \psi_{\text{TRANS}} = C e^{-i(k_2 x - \omega t)}, \quad x > 0$$

(233.1)

onde $A \in \mathbb{R}$; $B, C \in \mathbb{C}$

$$\omega_i = k_i c_i = k_i \sqrt{b/\rho_i} : \text{Eq. (221.2)}$$

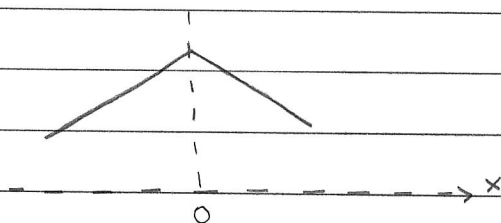
nesse caso, temos as seguintes condições de contorno em $x=0$:

$$\psi_1(0,t) = \psi_2(0,t) \quad (233.2)$$

$$\partial_x \psi_1(x,t)|_{x=0} = \partial_x \psi_2(x,t)|_{x=0} : \quad (233.3)$$

: continuidade de $\psi(x,t)$ e $\partial_x \psi(x,t)$ em $x=0$ p/ $x \neq 0$!

de fato, se $\partial_x \psi(x,t)$ descontinua em $x=0$, temos, e.g.:



(233.4)

$$\hookrightarrow \partial_x \psi(x,t)|_{x=0^+} \neq \partial_x \psi(x,t)|_{x=0^-} \rightarrow \partial_x^2 \psi(x,t)|_{x=0} \rightarrow +\infty$$

como $\partial_x^2 \psi(x,t) \propto \partial_t^2 \psi(x,t)$: Eq. (227.1), temos que

$$\partial_x^2 \psi(0,t) \rightarrow +\infty \rightarrow \partial_t^2 \psi(0,t) \sim \text{aceleração} \rightarrow +\infty!$$

Eqs. (233.1), (233.2) e (233.3):

$$A e^{i\omega_1 t} + B e^{i\omega_2 t} = C e^{i\omega_2 t}$$

(234.1)

$$-k_1 A e^{i\omega_1 t} + k_1 B e^{i\omega_1 t} = -k_2 C e^{i\omega_2 t}$$

como $e^{i\omega_1 t} \neq e^{i\omega_2 t}$ c/ $\omega_1 \neq \omega_2$ são linearmente independentes

$\hookrightarrow \exists$ soluções $\rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega$: não há mudança

na freq. da onda em $x=0$

$$\text{como } \omega_i = k_i c_i \rightarrow k_i = \frac{\omega}{c_i} = \omega \sqrt{\frac{\rho_i}{E}}$$

$\hookrightarrow k_1 \neq k_2$, pois $\rho_1 \neq \rho_2$: número de onda / comp. onda

distintos p/ regiões $x < 0$ e $x > 0$.

$$\text{Eq. (234.1): } A + B = C$$

$$-k_1 A + k_1 B = -k_2 C$$

$$\hookrightarrow B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A \quad \text{e} \quad C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A \quad (234.2)$$

notas:

• k_1, k_2 e $A \in \mathbb{R} \rightarrow C \in \mathbb{R}$ e $C > 0 \rightarrow \psi_{\text{inc}}$ e ψ_{trans} em fase

• se $\kappa_1 > \kappa_2 \rightarrow B \in \mathbb{R} \text{ e } B > 0 \rightarrow \psi_{\text{inc}} \text{ e } \psi_{\text{REF}}$ em fase
($p_1 > p_2$)

• se $\kappa_1 < \kappa_2 \rightarrow B \in \mathbb{R} \text{ e } B < 0 \rightarrow \text{" " " } \text{ fora de fase}$
($p_1 < p_2$)

nesse caso, é interessante definir:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2 : \text{coeficiente de reflexão}$$

(235.1)

$$T = 1 - R = \frac{4\kappa_1\kappa_2}{(\kappa_1 + \kappa_2)^2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \cdot \frac{|C|^2}{|A|^2} : \text{coeficiente de transmissão}$$

Obs.: $T + R = 1 \sim$ conservação de energia!

• novamente: solução (229.3) da eq. de onda (227.1):

$$\psi(x, t) = A e^{-i(\kappa x - \omega t)}$$

$\uparrow$ amplitude $\uparrow$ número de onda $\uparrow$ frequência definida = onda plana monocromática

(235.2)

Definição: $\phi = \kappa x - \omega t$: fase da onda

notas: se $\phi = \text{cte} \rightarrow \psi(x, t)$ se propaga (na direção $+\hat{x}$)
mantendo sua forma!

$$\phi = \text{cte} \rightarrow d\phi = 0 \rightarrow d\phi = \kappa dx - \omega dt = 0$$

$$\hookrightarrow v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} : \text{velocidade de fase} \quad (236.1)$$

em particular, p/ onda plana monocromática:

$$\omega = ck : \text{Eq. (229.2)}$$

$$\hookrightarrow v_p = \frac{\omega}{k} = c : \text{velocidade} = \text{velocidade de} \\ \text{de fase} \quad \text{propagação} \quad (236.2)$$

• p/ onda plana monocromática: $v_p = cte$;

se $v_p = v_p(k)$: meio dispersivo;

Ex.: $v_p(k) = \frac{g}{k} \tanh(kh)$: velocidade de propagação
ondas na superfície de um
fluido em um canal profundidade h ;

: p/ detalhes, veja Sec. 54, Fetter.

• hipótese: número de onda $k = \bar{k} - i\beta$; $\bar{k}, \beta > 0$ e $\omega \in \mathbb{R}$;

$$\text{Eq. (235.2)} : \psi(x,t) = A e^{-\beta x} e^{-i(\bar{k}x - \omega t)} \quad (236.3)$$

atenuação espacial da amplitude

nesse caso, fase $\phi = \bar{k}x - \omega t$

$$\hookrightarrow d\phi = \bar{k}dx - \omega dt = 0 \rightarrow v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\bar{k}} = \frac{\omega}{\text{Re } k} \neq \frac{\omega}{k} = c$$

como $\omega \in \mathbb{R}$ e $\omega = ck \rightarrow c \in \mathbb{C}$!

Ex.: propagação onda EM em um meio condutor.

hipótese: frequência $\omega = \bar{\omega} + i\beta$; $\bar{\omega}, \beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Eq. (235.2)}: \psi(x, t) = A e^{-\beta t} e^{-i(\kappa x - \bar{\omega} t)}$$

(237.1)

atenuação temporal da amplitude

nesse caso, $\phi = \kappa x - \bar{\omega} t$

$$\hookrightarrow d\phi = \kappa dx - \bar{\omega} dt = 0 \rightarrow v_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\bar{\omega}}{\kappa} = \frac{\text{Re } \omega}{\kappa}$$

Ex.: onda estacionária;

considerar Eq. (229.3) c/ $A = C = 0$ e $B = -D$:

$$\psi(x, t) = B e^{-i(\kappa x - \omega t)} - B e^{-i(\kappa x + \omega t)}$$

$$= B e^{-i\kappa x} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = 2iB e^{-i\kappa x} \sin \omega t$$

$$\text{Re} \rightarrow \psi(x, t) = 2B \sin \kappa x \sin \omega t \neq f(\kappa x - \omega t):$$

: onda estacionária

se $B \rightarrow B e^{-\beta t}$: atenuação temporal da amplitude!

pacote de ondas,

Lembrar: onda plana (235.2): função especialmente estendida;
verifica-se que é possível obter $\psi(x, t)$ c/ extensão espacial
finita;

considerar a seguinte função de onda:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{i(K_n x - \omega_n t)} \quad : \text{superposição de ondas planas} \quad (238.1)$$

onde $\omega_n = c \cdot \frac{n\pi}{L} = c k$: Eq. (221.2)

no limite $N \rightarrow +\infty$, temos que:

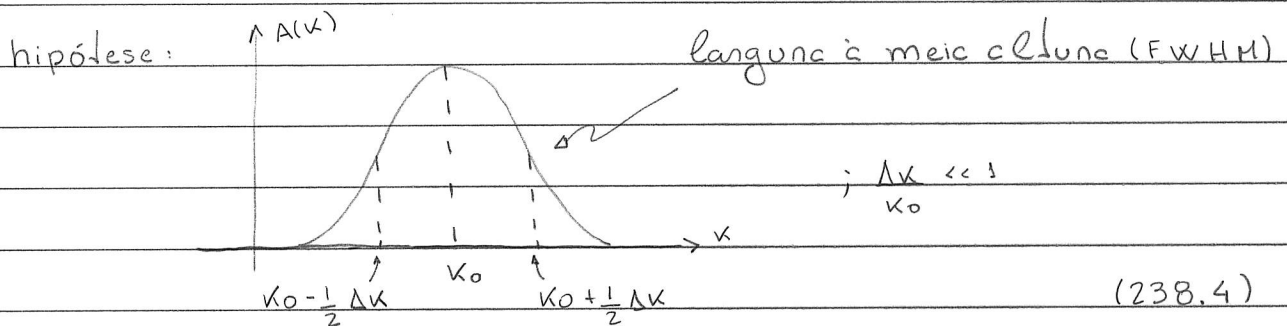
$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{i(kx - \omega t)} \quad : \text{pacote de ondas} \quad (238.2)$$

onde $\omega = \omega(k)$

notas: $\psi(x,0) = \int \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{ikx}$

$$\int dx e^{-iqx} * : \int dx \psi(x,0) e^{-iqx} = \int dk A(k) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dx e^{i(k-q)x}}_{\delta(k-q)}$$

$$\hookrightarrow A(q) = \int dx \psi(x,0) e^{-iqx} \quad (238.3)$$



Ex.: pacote gaussiano:

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma^2}} e^{-(k-k_0)^2 / \sigma^2} \quad ; \quad \Delta k \sim \sigma \quad (238.5)$$

hipótese (238.4) $\rightarrow$ expansão $w(k)$ em torno de k_0 :

$$w(k) \approx \underbrace{w(k_0)}_{\equiv w_0} + \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right)_{k_0}}_{\equiv v_g : \text{velocidade de grupo}} (k - k_0) + \dots \quad (239.1)$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{fase } kx - \omega t &\approx kx - k_0 x + k_0 x - (\omega_0 + v_g(k - k_0))t \\ &= (k_0 x - \omega_0 t) + (k - k_0)(x - v_g t) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Eq. (238.2):

$$\psi(x, t) \approx \left(\int \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{i(k - k_0)(x - v_g t)} \right) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$$

$$\text{se } \bar{A}(x) = \int \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{i(k - k_0)x} : \text{transformada de Fourier } A(k)$$

$$\hookrightarrow \psi(x, t) \approx \underbrace{\bar{A}(x - v_g t)}_{\text{"envelope"}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}_{\text{"portadora"}}$$

notas:

• envelope: vel. de propagação = vel. de grupo v_g

• portadora: " " " = vel. de fase $v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$

Obs.: informação transmitida via pacote de onda:

velocidade de transmissão sinal = v_g !

novamente: pacote gaussiano (238.5);

Eq. (238.2):

$$\psi(x,0) = \int \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-(k-k_0)^2/\sigma^2} e^{ikx}$$

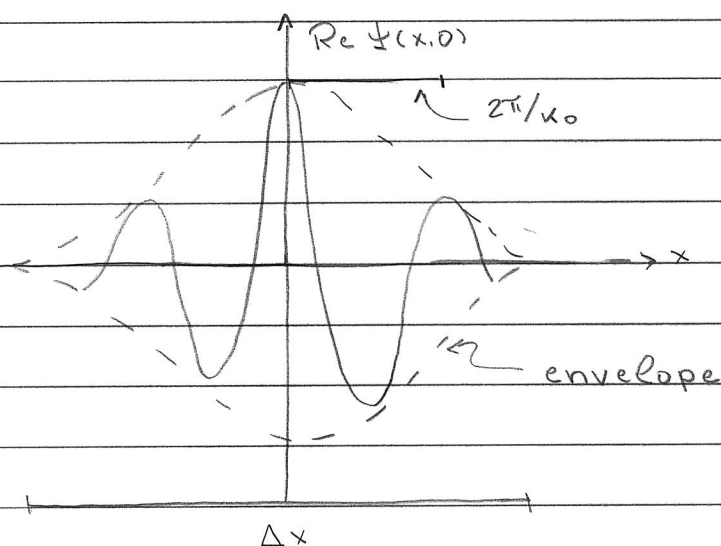
$$t = k - k_0 \rightarrow dt = dk$$

$$\exp(ik_0 x) \int dt e^{-t^2/\sigma^2 + iqt}$$

$$\sqrt{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2\sigma^2}{4}\right)$$

$$\hookrightarrow \psi(x,0) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2\sigma^2/4} e^{ik_0 x}$$

função gaussiana c/ $\Delta x \sim 2/\sigma$



(240.3)

Obs.: identidade: $\int dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$

notas: $\Delta x \Delta k \sim \frac{2}{\sigma} \cdot \sigma = 2$

(241.1)

de fato, Eq. (241.1): propriedade transf. de Fourier:

considera:

Eq. (238.2): $\psi(x,0) = \int \frac{dk}{2\pi} A(k) e^{ikx} \neq 0$ p/ $-\frac{\Delta k}{2} < x < +\frac{\Delta k}{2}$

Eq. (238.3): $A(k) = \int dx \psi(x,0) e^{-ikx} \neq 0$ p/ $k_0 - \frac{\Delta k}{2} < k < k_0 + \frac{\Delta k}{2}$:

: Fig. (238.4)

se $k = u + k_0$, temos que:

$$\psi(x,0) = e^{ik_0 x} \int \frac{du}{2\pi} A(u+k_0) e^{iux} \quad (241.2)$$

c/ $A(u+k_0) \neq 0$ p/ $-\frac{1}{2} \Delta k < u < +\frac{1}{2} \Delta k$

notas: p/ x fixo a fase do integrando de (241.2)

$\in$ intervalo $[-\frac{1}{2} \Delta k x; +\frac{1}{2} \Delta k x] = (I)$;

considerando os extremos do intervalo (I):

• se $\Delta k \Delta x \approx 1 \rightarrow$ poucas oscilações fase $\rightarrow \psi(x,0) \neq 0$

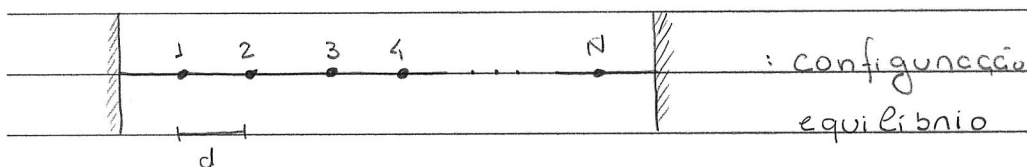
• se $\Delta k \Delta x \gg 1 \rightarrow$ várias " " $\rightarrow \psi(x,0) \rightarrow 0$
(interferência destrutiva)

$\hookrightarrow \Delta x \Delta k \approx 1$

(241.2)

Formalismo Lagrangiano para meios contínuos
(p/ detalhes, veja Secs. 13.1 e 13.2, Goldstein),

novamente: corda elástica @ N partículas (209.1):



lembrar: energias cinética e potencial no limite $N \rightarrow \infty$:

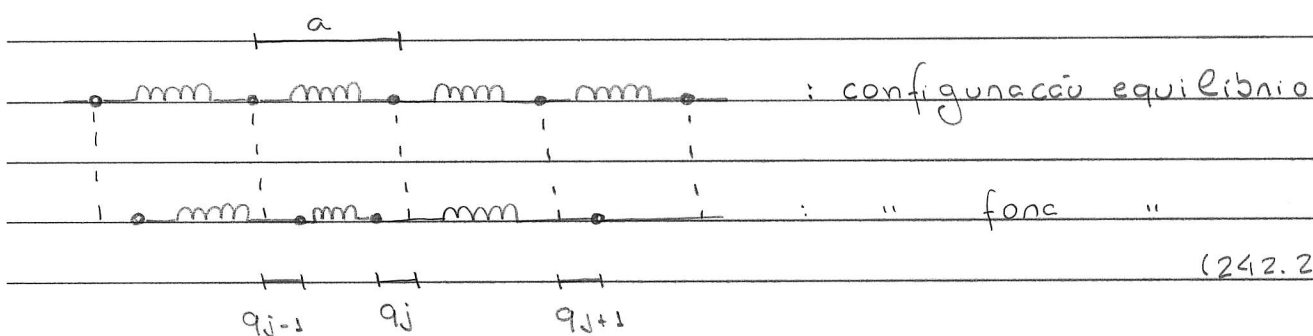
Eq. (223.2): $T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N+1} m \dot{q}_j^2(t)$ Eq. (219.2) $\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L dx \rho \dot{q}^2(x,t)$

Eq. (223.3): $U = \frac{1}{2} \frac{\tau}{d} \sum_{j=1}^{N+1} (q_{j-1} - q_j)^2$ Eq. (219.2) $\rightarrow \frac{1}{2} \tau \int_0^L dx \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2$

$L \rightarrow L = \frac{1}{2} \int_0^L dx \rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \tau \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2$: Lagrangiana
limite contínuo (242.1)

lembrar que, nesse caso, $q_j(t)$ descreve movimento
transversal massa m_j : veja Fig. (218.1)!

de modo análogo, é possível determinar a Lagrangiana
p/ um sistema de N partículas de massa $m_j = m$ e
conectadas por molas de cte elásticas $K_{ij} = K$:



(242.2)

a : distância de equilíbrio entre as massas.

nesse caso, $q_j(t)$ descreve o movimento longitudinal da massa m_j ;

temos que:

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m \dot{q}_j^2 - \kappa (q_{j+1} - q_j)^2 : \text{lagrangiana (243.1)} \\ \text{sistema discreto}$$

Eq. (243.1) pode ser escrita como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a \left(\frac{m}{a} \dot{q}_j^2 - \kappa a \frac{1}{a^2} (q_{j+1} - q_j)^2 \right)$$

considerando o limite (243.2): $N \rightarrow +\infty$ e $a \rightarrow 0$, temos que

$$L = \int_0^L dx \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] : \text{lagrangiana} \\ \text{sistema} \quad \quad \quad (243.2) \\ \text{contínuo}$$

onde ρ : densidade linear de massa

e Y : módulo de Young

a lagrangiana (243.2) pode ser escrita como:

$$L = \int_0^L dx \mathcal{L} \quad (243.3)$$

onde $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2$: densidade de lagrangiana

notas: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_x q, \partial_t q)$; $q = q(x, t)$;

• nova notação:

$q_j(t) \rightarrow q(x,t) \rightarrow \phi(x,t)$: campo escalar

$\dot{q}_j(t) \rightarrow \partial_t q(x,t) \rightarrow \partial_t \phi(x,t)$

caso geral: densidade de Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \partial_t \phi, x, t) \quad (244.1)$$

lembrar: ação (2.1):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_0^L dx \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L} \quad (244.2)$$

↑
Eq. (243.3)

dessa forma, o princípio de Hamilton p/ meios contínuos assume a forma:

$$\delta S = \delta \int_0^L dx \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L} = 0 \quad (244.3)$$

próximo etapa: determinar eq. de Lagrange p/ campo escalar $\phi = \phi(x,t)$ a partir de (244.3)!

ideia: seguir procedimento análogo pg. 2.1;

seja $\phi_0(x,t)$: configuração campo escalar que corresponde a extremo ação S ;

considerar variação: $\phi(x,t) = \phi_0(x,t) + \alpha \zeta(x,t)$

tal que: $\zeta(x=x_1, t) = \zeta(x=x_2, t) = 0$

$\zeta(x, t=t_1) = \zeta(x, t=t_2) = 0$

$\hookrightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_0 + \alpha \zeta, \partial_x \phi_0 + \alpha \partial_x \zeta, \partial_t \phi_0 + \alpha \partial_t \zeta, x, t)$: Eq. (244.1)

$$\hookrightarrow S = S[\alpha]$$

nesse caso, SS pode ser determinada via:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_1^2 dx dt \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial (\partial_x \phi)} \frac{\partial (\partial_x \phi)}{\partial \alpha}}_{\partial_x \text{I}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial (\partial_t \phi)} \frac{\partial (\partial_t \phi)}{\partial \alpha}}_{\partial_t \text{I}} \right)$$

notas:

(I)

(II)

$$(I) = -\partial_x \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial_x \phi)} \right) \text{I} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial_x \phi)} \text{I} \right)$$

$\hookrightarrow 0$, pois $\text{I}(x_1, t) = \text{I}(x_2, t) = 0$

$$(II) = -\partial_t \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial_t \phi)} \right) \text{I} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial_t \phi)} \text{I} \right)$$

$\hookrightarrow 0$, pois $\text{I}(x, t_1) = \text{I}(x, t_2) = 0$

$$\hookrightarrow \frac{dS}{d\alpha} = \int dx dt \left(\frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial_t \phi)} \right) \right) \text{I}(x, t)$$

como $\text{I}(x, t)$ é arbitrária, a condição $dS/d\alpha = 0$

$$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial_t \phi)} \right) = 0 :$$

(245.1)

: Eq. de Lagrange

Ex.: considerar a densidade de Lagrangiana (242.1)

c/ $q(x, t) \rightarrow \psi(x, t)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho (\partial_t \psi)^2 - \frac{1}{2} \tau (\partial_x \psi)^2$$

notas: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi)} = \rho \partial_t \psi$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \psi)} = -\tau \partial_x \psi$

$\hookrightarrow$ Eq. (245.1): $-(-\tau) \partial_x^2 \psi - \rho \partial_t^2 \psi = 0$

$\hookrightarrow \partial_x^2 \psi - \frac{\rho}{\tau} \partial_t^2 \psi = 0$: eq. de onda (227.1)

Vamos considerar a seguinte notação:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{e} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad ; \quad \mu = 0, 1$$

$\hookrightarrow$ Eq. de Lagrange (245.1) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \right) = 0$$

ou $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$: Eq. de Lagrange (246.1)

Eq. (246.1) permite generalizar o formalismo lagrangiano
pr um sistema 3-D descrito por um conjunto de campos
 $\phi_i(\vec{r}, t)$, i.e.,

Eq. (244.3) $\rightarrow S = \int d^3r dt \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, x^\mu, t)$; $\phi_i = \phi_i(\vec{r}, t)$; $i = 1, 2, \dots, n$
 $\mu = 0, 1, 2, 3$

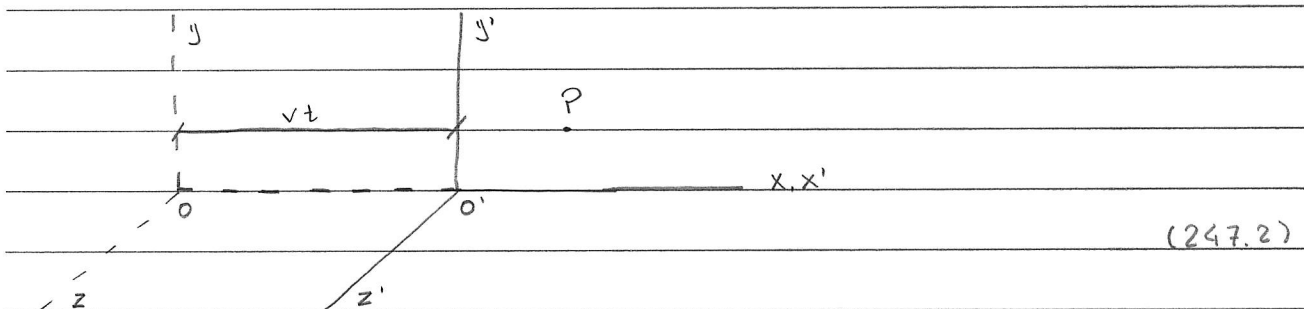
$x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$

$$\text{Eq. (246.1): } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3 \quad (247.1)$$

Transformação de Lorentz e quadri-velones (4-velones),

consideram 2 REFs inerciais K e K' ,



$\vec{v} = v\hat{x}$: velocidade REF K' w.r.t. REF K

pto P : (x, y, z) : coordenadas REF K

(x', y', z') : " REF K'

hipótese: origem $O =$ origem O' p/ $t = t' = 0$

temos que: $x' = x - vt$

$y' = y$: transformação

$z' = z$ de Galileu

(247.3)

$t' = t$

caso geral: se $\vec{v}$ velocidade REF K' w.r.t. REF K

$\hat{e}_i$ eixos $\hat{e}_i \parallel$ eixos $\hat{e}_i$

$$\text{Eq. (247.3)} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$t' = t$$

(247.4)

entretanto, p/ $v \approx c$, é necessário considerar uma transformação de Lorentz!

notação: $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$; (248.1)

nesse caso, p/ $\vec{v} = v\hat{x}$: Fig. (247.3), verifica-se que a relação entre as coordenadas do plo P nos REFs K e K' é dada por:

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x_1)$$

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta x_0)$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

: Transformação

de Lorentz

(248.2)

$$\text{onde } \beta = \frac{v}{c} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

caso geral: $\vec{v}$ e eixos $\hat{e}_i \parallel$ eixos $\hat{e}'_i$:

$$\text{Eq. (248.2)} \rightarrow x'_0 = \gamma(x_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{r})$$

(248.3)

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\beta} \left(\frac{(r-1)(\vec{r} \cdot \vec{\beta}) - r x_0}{\beta^2} \right)$$

$$\text{onde } \vec{\beta} = \vec{v}/c$$

similar definição (114.1) de um vetor

↳ Definição quadri-vetor: objeto formado por 4 componentes (A_0, A_1, A_2, A_3) que se transformam como (248.2) sob uma transformação (boost) de Lorentz;

em detalhes:

se $(A_0, \vec{A})$: componentes 4-velon w.r.t. REF K e

$(A'_0, \vec{A}')$: " " " " REF K'

$$\hookrightarrow A'_0 = \gamma (A_0 - \beta A_1)$$

$$A'_1 = \gamma (A_1 - \beta A_0)$$

$$A'_2 = A_2$$

(249.1)

$$A'_3 = A_3$$

$$\text{notar: } A'^2_0 - |\vec{A}'|^2 = \gamma^2 (A_0 - \beta A_1)^2 - \gamma^2 (A_1 - \beta A_0)^2 - A_2^2 - A_3^2$$

$$= \gamma^2 (1 - \beta^2) (A_0^2 - A_1^2) - A_2^2 - A_3^2 = A_0^2 - |\vec{A}|^2 : \quad (249.2)$$

$= 1$

: invariante sob transf. de Lorentz!

$\hookrightarrow$ pr dois 4-velones $(A_0, \vec{A})$ e $(B_0, \vec{B})$, temos que

$$A'_0 B'_0 - \vec{A}' \cdot \vec{B}' = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B} : \quad (249.3)$$

: produto escalar entre 4-velones $(A_0, \vec{A})$ e $(B_0, \vec{B})$;

invariante sob ~ produto escalar usual entre
transf. Lorentz 2 velones em 3-D!

Ex.:

(1) $(x_0, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$: 4-velon posição

(2) $(U_0, \vec{U})$: 4-velocidade:

$$U_0 = \frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dx_0}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma u c$$

tempo próprio

(249.4)

$$U_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma u u_i ; i=1,2,3$$

$$\gamma u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

onde $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$: velocidade partícula

(3) $(P_0, \vec{P})$: 4-momento:

$$P_0 = mU_0 = \gamma u mc$$

(250.1)

$$P_i = mU_i = \gamma u m u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

notas: $\vec{P} = \gamma u m \vec{u} = \frac{m \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$: momento relativístico

de fato, p/ $u/c \ll 1$, temos que:

$$\vec{P} \approx m \vec{u} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right);$$

notas: $E = cP_0 = \gamma u mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$: energia total

de fato, p/ $u/c \ll 1$, temos que:

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2} m u^2 + \frac{3}{8} m \frac{u^4}{c^4} + \dots$$

energia de repouso!

$\hookrightarrow T = E - mc^2 = (\gamma u - 1) mc^2$: energia cinética relativística

notas: $P_0^2 - |\vec{P}|^2 = \gamma^2 (mc)^2 - \gamma^2 (m \vec{u})^2 = m^2 (c^2 - u^2) = (mc)^2 \frac{1}{1 - u^2/c^2}$

: invariante;

por outro lado: $P_0^2 - |\vec{P}|^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = (mc)^2$

$\hookrightarrow E = \left((mc^2)^2 + (pc)^2 \right)^{1/2}$: relação entre energia total e momento

(250.2)

de fato, é possível definir 2 tipos de 4-velones:

(1) contravariante $A^\alpha = (A^0, \vec{A})$

: (251.1)

(2) covariante $A_\alpha = (A^0, -\vec{A})$, onde $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$

: notas posição índice α em A^α e A_α ;

• produto escalar: definido como produto componentes covariante e contravariante:

$$B \cdot A = B_\alpha A^\alpha : \text{notas posição índices!} \quad (251.2)$$

se $A^\alpha = (A^0, \vec{A})$ e $B_\alpha = (B^0, \vec{B})$, temos que:

$$B_\alpha A^\alpha = B_0 A^0 + B_1 A^1 + B_2 A^2 + B_3 A^3$$

$$= B^0 A^0 + (-B^1) A^1 + (-B^2) A^2 + (-B^3) A^3$$

$$= B^0 A^0 - \vec{B} \cdot \vec{A} : \text{Eq. (249.3) : invariante}$$

$$= B^0 A_0 + B^1 (-A_1) + B^2 (-A_2) + B^3 (-A_3) = B^\alpha A_\alpha \quad (251.3)$$

• relação entre componentes A^α e A_α : via tensor métrico; temos que:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

: intervalo

$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

invariante

(251.4)

caso geral: $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$: norma ou métrica

(251.5)

do espaço-tempo

onde $g_{\alpha\beta}$: tensor métrica (tensor covariante)

em particular, p/ (251.5) : $g_{00} = 1$
 (espaço-tempo plano) $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ (252.1)
 $g_{\alpha\beta} = 0, \alpha \neq \beta$

notar: Eq. (251.5) pode ser escrita como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad \text{Eq. (251.2)}$$

pois ds^2 é um invariante, escrito como um produto escalar

$$\hookrightarrow dx_\alpha = g_{\alpha\beta} dx^\beta$$

: relação entre componentes 4-velones

$$\text{ou } x_\alpha = g_{\alpha\beta} dx^\beta \quad \text{covariante e contravariante} \quad (252.2)$$

$$\text{similar: } x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta ; \text{ onde } g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$$

notar:

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta$$

$$\hookrightarrow A^0 = g^{0\beta} A_\beta = g^{00} A_0 = A_0$$

$$A^i = g^{i\beta} A_\beta = g^{ii} A_i = -A_i ; i = 1, 2, 3$$

· sobre as derivadas parciais:

verifica-se que ∂_α e ∂^α são 4-velones onde:

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, +\vec{\nabla} \right) : \text{4-velon covariante} \quad (252.3)$$

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right) : \text{" " contravariante}$$

$$c/ \quad \partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta$$

$$L > \quad \partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} : \text{4-divergente do 4-vetor } \vec{A}$$

$$\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 : \text{4-escalar (d'Alembertiano)}$$

(253.1)

notas: $\partial^\alpha A_\alpha \sim$ eq. de continuidade

$\partial_\alpha \partial^\alpha \sim$ eq. de onda

• Sobre as equações do EM;

$$(i) \text{ eq. de continuidade: } \partial_\mu p + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (253.2)$$

onde $p = p(\vec{r}, t)$: densidade volumétrica de carga

e $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$: " de corrente

comparando Eqs. (253.1) e (253.2) $\rightarrow$ definição 4-vetor

$$J^\alpha = (cp, \vec{J}) \quad (253.3)$$

$$L > \text{ Eq. (253.2) : } \partial_\alpha J^\alpha = 0 : \quad (253.4)$$

: eq. de continuidade pode ser escrita como produto

escalar 4-vetores ∂_α e $J^\alpha \rightarrow$ Eq. (253.4) é invariante

sob transf. Lorentz $\sim$ carga elétrica (escalar)

e é invariante;

Eq. (253.4) : forma covariante eq. de continuidade!

(ii) potências escalares Φ e vetor $\vec{A}$:

Lembrando: $\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \Phi$ e $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$,

onde $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$; $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$; $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$ e $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$

verifica-se que, Eqs. de Maxwell (sistema gaussiano):

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \Phi = 4\pi \rho = \frac{4\pi}{c} (c\rho)$$

(254.1)

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

: eqs. de movimento p/ Φ e $\vec{A}$ no gauge de Lorenz, onde

$$\frac{1}{c} \partial_t \Phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 : \text{condição de Lorenz} \quad (254.2)$$

se $A^\alpha = (\Phi, \vec{A})$: 4-vetor contravariante

$$\hookrightarrow \text{Eq. (254.2)} : \partial_\alpha A^\alpha = 0 : \text{forma covariante}$$

condição de Lorenz

$$\hookrightarrow \text{eqs. de movimento (254.1)} : \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha$$

• Campo de Klein-Gordon.

consideramos: sistema descrito por campo escalar real

$\phi = \phi(\vec{r}, t)$ e pela densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

(255.1)

$$= \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) ; m = \text{cte}$$

eq. de Lagrange (247.1):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \right) = 0$$

$$\text{como: } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} = \frac{1}{2} (g^{\mu\alpha} \partial_\mu \phi + g^{\alpha\mu} \partial_\mu \phi)$$

$$\hookrightarrow -m^2 \phi - \frac{1}{2} \left(\underbrace{g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \partial_\mu \phi}_{\partial^\mu} + \underbrace{g^{\alpha\mu} \partial_\alpha \partial_\mu \phi}_{\partial^\mu} \right) = 0$$

$\mu \rightarrow \mu$

$$\hookrightarrow \partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad \text{ou} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 :$$

(255.2)

= eq. de Klein-Gordon