Formalismo hamiltoniano.

Refs.: Caps. 8-10, Goldstein
Caps. 2 e 3, Nolting
Caps. 4 e 5, Aguiar

ideia: introdução ao formalismo hamiltoniano:

- formulação alternativa mecânica;
- maior entendimento: estrutura matemática teoria;
- solução problemas
  mecânica: determinação eqs. de movimento ⊕ solução : equivalente mec. lagrangiana;

entretanto, útil p/ extensões:
- mec. clássica: teoria de Hamilton-Jacobi;
- física estatística (sistemas muitas partículas);
- mecânica quântica;

· lagrangiana: descrição sistema através variáveis $(q_j, \dot{q}_j, t)$

· hamiltoniana: " " " " (q_j, p_j, t)

· função hamiltoniana $H = H(q_j, p_j, t)$ determinada a partir $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ via transformada de Legendre.

inicial: transformada de Legendre;

considerar sistema descrito pelas variáveis (x, y)

se $f = f(x, y)$, temos que o diferencial de f assume a forma:

tilibra

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \equiv u\,dx + v\,dy \qquad (257.1)$$

onde $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$

ideia: determinar transformação tal que sistema descrito pelas variáveis (u,y)

notar: $df = u\,dx + v\,dy = u\,dx + x\,du - x\,du + v\,dy$

$$= d(ux)$$

↳ $d(f - ux) = -x\,du + v\,dy$

se $g \equiv f - ux$

$$(257.2)$$

↳ $dg = -x\,du + v\,dy \rightarrow g = g(u,y)$

como:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial y}dy = -x\,du + v\,dy$$

$$(257.3)$$

↳ $x = -\frac{\partial g}{\partial u}$ e $v = \frac{\partial g}{\partial y}$; $x = x(u,y)$ e $v = v(u,y)$

Eq. (257.2): define uma mudança de variáveis:
sistema descrito pelas variáveis (x,y)
p/ " " " " (u,y)

Ex.: relação entre potenciais termodinâmicos:
: funções de estado, dimensão = energia;

p/ sistema hidrostático, temos que:

tilibra

$U = U(S,V)$: energia interna

$H = H(S,p)$: entalpia

$F = F(T,V)$: energia livre de Helmholtz :

$G = G(T,p)$: " " " Gibbs

: potenciais termodinâmicos em termos de suas variáveis independentes naturais;

onde: S: entropia; V: volume; p: pressão e T: temperatura

(1) energia interna:

lembrar 1ª Lei : $dU = dQ + dW$;

p/ processo reversível: $dQ = TdS$ e $dW = -pdV$

↳ $dU = TdS - pdV \rightarrow U = U(S,V)$

como $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV = TdS - pdV$

↳ $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$ e $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$ (258.1)

(2) entalpia:

notar: $dU = TdS - pdV - Vdp + Vdp = TdS - d(pV) + Vdp$

↳ $d(U + pV) \equiv dH = TdS + Vdp$

(258.2)

↳ $H = U + pV$ e $H = H(S,p)$: entalpia

como $dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p dS + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S dp$

tilibra

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p \quad \text{e} \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S \tag{259.1}$$

notar Eq. (258.2): transf. de Legendre associada à mudança de variável (S,V) → (S,p)

(3) energia livre de Helmholtz:

notar: $dU = TdS + SdT - SdT - pdV = d(TS) - SdT - pdV$

↳ $d(U - TS) \equiv dF = -SdT - pdV$ (259.2)

↳ $F = U - TS$ e $F = F(T,V)$: energia livre de Helmholtz

como $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV$ (259.3)

↳ $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad \text{e} \quad p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$

Eq. (259.3): transf. de Legendre associada à mudança de variável (S,V) → (T,V)

(4) energia livre de Gibbs:

notar: $dF = -SdT - pdV - Vdp + Vdp = -SdT - d(pV) + Vdp$

↳ $d(F + pV) \equiv dG = -SdT + Vdp$ (259.4)

↳ $G = F + pV$ e $G = G(T,p)$: energia livre de Gibbs

como $dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp$ (259.5)

↳ $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \quad \text{e} \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$

tilibra

Eq. (259.4): transf. de Legendre associada à mudança de variável $(T,V) \to (T,p)$

ou

Eq. (259.2): sistema hidrostático descrito via variáveis (T,V) e

Eq. (259.4): " " " " " (T,p) !

· sobre a função hamiltoniana:

hipótese: vínculos holonômicos e forças monogênicas : veja pg. 260.1

notação: $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$

$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$: variáveis independentes

considerar: sistema c/ n graus de liberdade;

como $L = L(q, \dot{q}, t)$

$\hookrightarrow dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$: soma sob índices repetidos!

(260.1)

como $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$: momento canonicamente conjugado

⊕ eq. de Lagrange: $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$

$\hookrightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

dessa forma: $dL = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$ (260.2)

notar:

tilibra

$$dL = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$d(\dot{q}_i p_i)$$

$$\hookrightarrow d(L - \dot{q}_i p_i) \equiv -dH = \dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\text{ou} \quad dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\hookrightarrow H(q,p,t) = \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t) : \text{função hemiltoniana} \qquad (261.1)$$

Eq. (261.1) : tranf. de Legendre associada à mudança de variável $(q,\dot{q},t) \to (q,p,t)$

como $H = H(q,p,t)$, temos que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (261.2)$$

comparando Eqs. (261.1) e (261.2), temos que:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{2n eqs. diferenciais 1ª ordem:} \\ \text{Eqs. de Hemilton} \\ \text{(eqs. canônicas de movimento)} \end{array} \qquad (261.3)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

notar a diferencial exata:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

tilibra

· Lembrar: vínculos holonômicos: eq do vínculo pode ser escrita como uma igualdade, i.e.,

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad (260.3)$$

↑ índice de partícula!

· Lembrar: sistema monogênico: sistema tal que todas as forças (exceto vínculos) são derivadas de um potencial escalar generalizado $U = U(q_i, \dot{q}_i, t)$;

caso particular: $U = U(q_i)$: sistema conservativo.

tilibra

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i}_{-\dot{p}_i} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i}_{+\dot{q}_i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad : \text{Eq. (261.3)}$$

$$\hookrightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (262.1)$$

i.e., H depende $\underline{t}$ apenas explicitamente

NOT implicitamente via q_i e p_i!

se $L = L(q_i, \dot{q}_i) \dashrightarrow H = H(q_i, p_i) \dashrightarrow \frac{dH}{dt} = 0$, i.e.,

H : cte de movimento (262.2)

· Resumo: sistema n graus de liberdade,

· formalismo lagrangiano: n eqs. de movimento 2ª ordem;
$2n$ condições iniciais;
estado do sistema: $q_1, q_2, \ldots, q_n$:
pto no espaço de configurações.

· formalismo hamiltoniano: $2n$ eqs. de movimento 1ª ordem;
$2n$ condições iniciais;
estado do sistema: $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$:
pto no espaço de fase.

Obs.: q_i e p_i : par variáveis canonicamente conjugadas!

tilibra

Ex. 1: oscilador harmônico 1-D: partícula massa m sob potencial $U = \frac{1}{2} K x^2$, K: cte > 0;

determinar hamiltoniano e eqs. de Hamilton;

coordenada generalizada: x

$$L = L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2$$

momento canonicamente conjugado:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \rightarrow \dot{x} = p/m \qquad (263.1)$$

Eq. (261.1): $$H(x,p) = \dot{x} p - L = \frac{p^2}{2m} - \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} K x^2 \right)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2 \qquad (263.2)$$

eqs. canônicas de movimento (261.3):

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad : \text{OK c/ Eq. (263.1)}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Kx$$

$\hookrightarrow \dot{p} = m\ddot{x} = -Kx \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0 = \sqrt{K/m}$: eq. de movimento O.H. !

Ex. 2: partícula massa m sob potencial central $U = U(r)$;
determinar hamiltoniano e eqs. de Hamilton;

coord. generalizadas = coord. esféricas r, θ, φ:

$$L = L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$$

tilibra

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

momentos canonicamente conjugados:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \longrightarrow \dot{r} = p_r/m$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = p_\theta/mr^2 \qquad (264.1)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \longrightarrow \dot{\varphi} = p_\varphi/mr^2\sin^2\theta$$

Eq. (261.1): $H = \dot{q}_i p_i - L = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\varphi}p_\varphi - L$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2\sin^2\theta} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\frac{p_\theta^2}{m^2r^4} + r^2\sin^2\theta\frac{p_\varphi^2}{m^2r^4\sin^4\theta}\right)$$

$$+ U(r)$$

$$\hookrightarrow H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U(r) \qquad (264.2)$$

eqs. canônicas de movimento (261.3):

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \longrightarrow p_r = m\dot{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \longrightarrow p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad : \text{OK c/ (264.1)}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \longrightarrow p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

(264.3)

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\theta} - \frac{dU}{dr}$$

tilibra

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^2}{m r^2 \sin^3\theta}\cos\theta \qquad (265.1)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow p_\varphi : \text{cte de movimento: } \varphi \text{ é variável cíclica}$$

alternativa: como $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$: cte de movimento
↳ movimento plano $\perp$ a $\vec{\ell}$

coord. generalizadas = coord. polares r e θ:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r) = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) \qquad (265.2)$$

momentos canonicamente conjugados:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \longrightarrow \dot{r} = p_r/m \qquad (265.3)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = p_\theta/m r^2$$

Eq. (261.1): $H = \dot{q}_i p_i - L = \dot{r} p_r + \dot{\theta} p_\theta - L$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{m r^2} - \frac{1}{2} m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2\frac{p_\theta^2}{m^2 r^4}\right) + U(r)$$

↳ $H = H(r, p_r, p_\theta) = \dfrac{p_r^2}{2m} + \dfrac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r)$ (265.4)

eqs. canônicas de movimento (261.3):

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r/m \longrightarrow p_r = m\dot{r}$$

: OK c/ (265.3)

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = p_\theta/m r^2 \longrightarrow p_\theta = m r^2\dot{\theta}$$

tilibra

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{dU}{dr}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow p_\theta : \text{cte de movimento:}$$

θ é variável cíclica!

notar:

(i) $p_\theta = m r^2 \dot{\theta} = \ell_z = \ell$: cte de movimento

(ii) $\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{dU}{dr} = m\ddot{r} = \frac{\ell^2}{m r^3} - \frac{dU}{dr}$

$\hookrightarrow m\left(\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m^2 r^3}\right) = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{dU}{dr}$: comparar c/ Eqs. (10.2) e (11.2)

Ex. 3: partícula massa m, carga q sob campo EM; determinar a hemiltoniana;

coord. generalizadas = coord. cartesianas $q_i : x, y, z$:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t), \qquad (266.1)$$

onde potenciais escalar e vetor são tais que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

como: $L = \frac{1}{2} m v_j v_j - q\Phi + q v_j A_j$

$\hookrightarrow$ momentos canonicamente conjugados:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = m v_i + q A_i \longrightarrow v_i = \frac{1}{m}(p_i - q A_i)$$

(266.2)

$\hookrightarrow$ vetorialmente: $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$ e $\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A})$

tilibra

Eq. (261.1): $H = \dot{q}_i p_i - L = \dot{x}_i p_i - L = v_i p_i - L$

↳ $H = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)p_i - \frac{1}{2}m\frac{1}{m^2}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i)$

$+ q\Phi - q\frac{1}{m}(p_i - qA_i)A_i$

$= \frac{1}{m}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i) - \frac{1}{2}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\Phi$

↳ $H = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\Phi = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi$ (267.1)

· Notação simplética.

notar eqs. de movimento (261.3): ∄ cssimetria ~ sincis ± !

ideia: introduzir notação que permite combinar os dois pares de eqs. de movimento;

considerar vetores $\vec{\eta}$ e $\vec{\nabla}_\eta$ tais que:

$\vec{\eta}^T = (q_1\ q_2 \dots q_n\ p_1\ p_2 \dots p_n)$ (267.2)

$\frac{\partial}{\partial \eta}^T = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}\ \frac{\partial}{\partial q_2} \dots \frac{\partial}{\partial q_n}\ \frac{\partial}{\partial p_1}\ \frac{\partial}{\partial p_2} \dots \frac{\partial}{\partial p_n}\right)$,

p/ um sistema c/ n graus de liberdade;

considerar matriz $\hat{J}_{2n\times 2n}$ tal que:

$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{I}_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}$; $\hat{I}_{n\times n}$: identidade (267.3)

$\hat{J}$: matriz simplética fundamental;

tilibra

verifica-se que (exercício):

$$\hat{J}^T = -\hat{J}\,; \qquad \hat{J}^2 = -\hat{I}_{2n\times 2n}\,; \qquad \hat{J}\hat{J}^T = \hat{I} \tag{268.1}$$

verifica-se que as $2n$ eqs. de movimento (261.3) podem ser escritas como:

$$\dot{\vec{\eta}} = \hat{J}\,\partial H/\partial \eta \tag{268.2}$$

Ex.: considerar sistema c/ 2 graus de liberdade; nesse caso, Eq. (268.2) assume a forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} \partial H/\partial q_1 \\ \partial H/\partial q_2 \\ \partial H/\partial p_1 \\ \partial H/\partial p_2 \end{pmatrix}$$

↳ $\dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}$ $\quad \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}$ $\quad \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}$ $\quad \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}$

· Variáveis cíclicas e teoremas de conservação,

Lembrar: se q_j variável cíclica $\to \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

como $\dfrac{\partial L}{\partial q_j} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \to \dot{p}_j = \dfrac{\partial L}{\partial q_j} \longrightarrow \dot{p}_j = 0$

ou $p_j = $ cte

Eq. (261.3): $\dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} = \dfrac{\partial L}{\partial q_j}$

↳ se q_j variável cíclica $\to$ H independe q_j;

tilibra

VOLTA: se H independe $q_j \rightarrow \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \rightarrow p_j$ cte

↳ teoremas de conservação derivados p/ lagrangiana = " " " " " hamiltoniana!

· Hamiltoniana v.s. energia,

ideia: determinar a relação entre H e E;

lembrar: em termos coord. generalizadas, a energia cinética assume a forma:

$$T = a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + b_j\dot{q}_j + c \quad : \text{soma sob índices repetidos} \qquad (269.1)$$

$$\equiv T_2 + T_1 + T_0 \; ; \; T_n \propto (\dot{q}_i)^n$$

↳ em geral, temos que:

$$L = L_0(q_i,t) + L_1(q_i,\dot{q}_i,t) + L_2(q_i,\dot{q}_i,t) \; ; \; L_n \propto (\dot{q}_i)^n$$

notar: $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = a_{kj}\dot{q}_j + a_{ik}\dot{q}_i + b_k$

↳ $\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k a_{kj}\dot{q}_k q_j + a_{ik}\dot{q}_i q_k + b_k\dot{q}_k = 2T_2 + T_1$

(269.2)

hipótese: $U = U(q_i,t) \rightarrow L = L_0 + L_1 + L_2$

notar Eq. (269.2): $\dot{q}_k\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_k p_k = 2T_2 + T_1 = 2L_2 + L_1$

↳ $\dot{q}_i p_i = 2L_2 + L_1$

tilibra

Eq. (261.1): $H = \dot{q}_i p_i - L = (2L_2 + L_1) - (L_0 + L_1 - L_2)$

$= L_2 - L_0$

lembrar pg. 184: se a relação entre coord. cartesianas $\vec{r}_\alpha$ e coord. generalizadas q_j é t-independente, i.e.,

$x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(q_j)$ ou $q_j = q_j(x_{\alpha i})$; $i = 1,2,3$

α: índice de partícula

↳ coeficientes $b_j = c = 0$ → $L_2 = T_2$; $L_1 = 0$ e $L_0 = -U$

↳ $H = L_2 - L_0 = T_2 + U = T + U = E$ (270.1)

Se $U = U(q_j)$: sistema conservativo

↳ $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ $\xrightarrow{\text{Eq. (262.1)}}$ $\frac{dH}{dt} = 0$ → $H = E$ = cte de movimento!

Ex. 1: oscilador harmônico 1-D: veja pg. 263;

coord. generalizada: x (*)

momento canonicamente conjugado: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

como sistema conservativo ⊕ (*):

↳ $H = T + U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K x^2$: Eq. (263.2)!

Ex. 2: partícula massa m sob potencial central $U = U(r)$: veja pg. 263;

tilibra

coord. generalizadas = coord. esféricas r, θ, φ;

momentos canonicamente conjugados:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

como sistema conservativo e a relação entre (x, y, z) e (r, θ, φ) é t-independente

$$\hookrightarrow H = T + U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + U(r)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + U(r): \quad \text{Eq. (264.2)!}$$

Em resumo: se sistema conservativo $\Leftrightarrow \vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_j)$

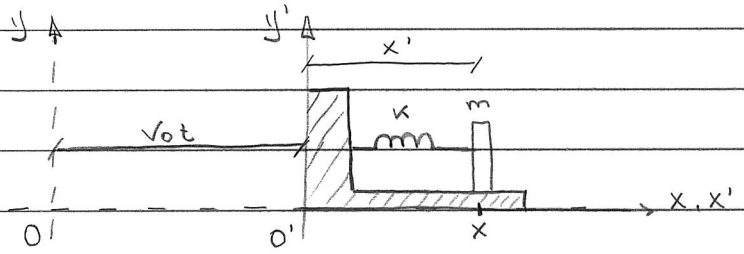
$\hookrightarrow H = E =$ cte de movimento.

· entretanto, os seguintes casos são possíveis:

· $H = E \not\Leftrightarrow H \neq$ cte de movimento

· $H \neq E \Leftrightarrow H =$ cte de movimento

Ex. 3: considerar sistema massa-mola sob plataforma, velocidade $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ w.r.t. REF 0;
determinar hamiltonianas p/ REFs 0 e 0';



(271.1)

· hipótese : $O = O'$ em $t = 0$

↳ $x = x' + v_0 t$

· REF O (LAB) : coordenada generalizada : x

$$L = L(x, \dot{x}, t) = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x'^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2$$

momento canonicamente conjugado :

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \dot{x} = p/m$$

Eq. (261.1) : $H = \dot{q}p - L = \dot{x}p - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2$

↳ $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k (x - v_0 t)^2 = T + U = E$

nesse caso :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k(x - v_0 t)(-v_0) = -k(x - v_0 t) \cdot v_0$$

F_{ext} ~ movimento uniforme plataforma :

↳ $H = E$ e $H \neq$ cte de movimento ;

· REF O' (plataforma) : coordenada generalizada : x'

$$L = L(x', \dot{x}') = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x'^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}' + v_0)^2 - \frac{1}{2} k x'^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}'^2 + m v_0 \dot{x}' + \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} k x'^2$$

notar termo linear em $\dot{x}$ ~ termo L₁ Eq. (269.1) !

tilibra

momento canonicamente conjugado:

$$p' = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' + mv_0 \rightarrow \dot{x}' = \frac{1}{m}p' - v_0$$

Eq. (261.1): $H = \dot{q}p - L = \dot{x}'p' - L$

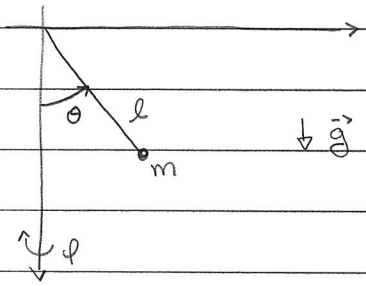
$$= \left(\frac{1}{m}p' - v_0\right)p' - \frac{1}{2}m\left(\frac{p'}{m}\right)^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

$$\hookrightarrow H = \underbrace{\frac{p'^2}{2m} + \frac{1}{2}kx'^2}_{E = T + U \text{ p/ REF } O'} - p'v_0$$

$\hookrightarrow H \neq E$ e H = cte de movimento, pois $L = L(x', \dot{x}')$

Exercício: determinar eqs. canônicas de movimento p/ REFs O e O'.

Ex. 4: Ex. 7.12, Marion: pêndulo esférico:
considerar partícula massa m, haste (s/ massa) comprimento ℓ sob $\vec{g}$;
determinar hamiltoniano e eqs. de Hamilton:



(274.1)

coord. generalizadas = coord. esféricas r, θ, φ ⊕
vínculo $r = \ell$ → variáveis independentes: θ e φ;

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$$

$$U = -mg\ell\cos\theta$$

↳ $L = T - U = \frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) + mg\ell\cos\theta$: notar: φ é variável cíclica!

momentos canonicamente conjugados:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta} \longrightarrow \dot{\theta} = p_\theta/m\ell^2$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} \longrightarrow \dot{\varphi} = p_\varphi/m\ell^2\sin^2\theta$$

como sistema conservativo e relação entre (x,y,z) e (r,θ,φ) é t-independente

↳ $H = T + U = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{p_\theta}{m\ell^2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{m\ell^2\sin^2\theta}\right)^2 - mg\ell\cos\theta$

tilibra

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta$$

eqs. canônicas de movimento (261.3):

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta + \frac{p_\varphi^2}{ml^2\sin^3\theta}\cos\theta$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = cte$$

(275.1)

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \rightarrow p_\theta = ml^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta} \rightarrow p_\varphi = ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

lembrar: $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = mr\hat{r}\times(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\hat{\varphi})$

$$= mr^2\dot{\theta}\hat{\varphi} - mr^2\sin\theta\,\dot{\varphi}\hat{\theta}$$

verificar $\equiv$

$$l_x\hat{x} + l_y\hat{y} + (mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi})\hat{z}$$

↳ $p_\theta = l_\varphi$ e $p_\varphi = l_z$ = cte de movimento

Eqs. (275.1):

$$\dot{p}_\theta = ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta + (ml^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi})^2\frac{\cos\theta}{ml^2\sin^3\theta}$$

↳ $$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \qquad (275.2)$$

tilibra

se $\varphi = cte \rightarrow \dot{\varphi} = 0$

↳ Eq. (275.2): $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$: eq. de movimento pêndulo simples

· procedimento alternativo:

Eq. (275.2): $m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta + \frac{p_\varphi^2}{m\ell^2\sin^3\theta}\cos\theta$ (276.1)

se $\theta = \theta_0$: pêndulo cônico

(276.2)

↳ $m^2 g\, \ell^3 \sin^4\theta_0 = p_\varphi^2 \cos\theta_0$: relação entre θ_0, p_φ e parâmetros do sistema m e ℓ!

Eq. (275.1): $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\ell^2\sin^2\theta_0}$: comparar c/ Eq. (153.4)

p/ $\psi = 0$ e $\theta = \theta_0 \rightarrow p_\psi = 0$

⊕ Eq. (276.2): $\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{m^2\ell^4\sin^4\theta_0} \cdot \frac{m^2 g\, \ell^3 \sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}$

↳ $\dot{\varphi}^2 = \frac{g/\ell}{\cos\theta_0}$: velocidade angular precessão w.r.t. eixo $\hat{z}$! (276.3)

· vamos verificar a estabilidade do movimento c/ $\theta = \theta_0$:

se $\theta = \theta_0 + \alpha$; $\alpha/\theta_0 << 1$

↳ $\sin\theta = \sin(\theta_0 + \alpha) \simeq \sin\theta_0 + \alpha\cos\theta_0$

$\cos\theta = \cos(\theta_0 + \alpha) \simeq \cos\theta_0 - \alpha\sin\theta_0$

exercício: $\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \simeq \frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} - \alpha\frac{(1 + 2\cos^2\theta_0)}{\sin^4\theta_0}$

tilibra

Eq. (276.1): $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{p_\varphi^2}{m^2\ell^4}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = 0$

p/ $\theta = \theta_0 + \alpha$, verifica-se que (exercício):

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha + \underbrace{\left(\frac{g}{\ell}\sin\theta_0 - \frac{p_\varphi^2\cos\theta_0}{m^2\ell^4\sin^3\theta_0}\right)}_{=0 \;:\; \text{Eq. (276.2)}} \approx 0$$

onde $\omega^2 = \frac{g/\ell}{\cos\theta_0}(1 + 3\cos^2\theta_0)$: frequência pequenas oscilações angulares w.r.t. $\theta = \theta_0$;

p/ $0 \leq \theta_0 < \pi/2 \rightarrow \omega^2 > 0$

· Princípio de Hamilton modificado.

Lembrar Eq. (2.1) : Princípio de Hamilton → eq. de Lagrange;

ideia : determinar princípio variacional que permita
" as eqs. de Hamilton (261.3);

Eq. (2.1): $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t) = 0$ ~ trajetória no espaço de configurações que corresponde a extremo S;

p/ hamiltoniana : princípio variacional ~ trajetória no espaço de fase p-q !

considerar: Eqs. (2.1) e (261.1) e 2n variáveis q_i e p_i independentes; temos que:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{q}_i p_i - H(q, p, t) \right) = 0 \quad : \qquad (278.1)$$

: princípio de Hamilton modificado

notar: se $f(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t) \equiv \dot{q}_i p_i - H(q, p, t)$, temos que

$$\text{Eq. (278.1)} : \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, f(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t) = 0 \quad : \qquad (278.2)$$

: similar princípio variacional (2.1) p/ as 2n variáveis independentes q_i e p_i;

temos que : Eq. (278.2) → 2n eqs. de Lagrange:

tilibra

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j}\right) = 0 \; ; \qquad (279.1)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

como $f = \dot{q}_i p_i - H(q_i, p_i, t)$, temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad \frac{\partial f}{\partial p_j} = \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} = p_j \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j} = 0$$

↳ $-\frac{\partial H}{\partial p_j} - \dot{p}_j = 0 \quad \text{e} \quad \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$: Eqs. de Hamilton (261.3)

· sobre os termos de superfície relacionados ao cálculo variacional:

lembrar pg. 2.1:

se $q_j(t)$: trajetória ~ extremo S e

$\bar{q}_j(t) = q_j(t) + \delta q_j(t)$: variação w.r.t. $q_j(t)$, (279.2)

foi considerado que $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$;

em princípio, p/ Eq. (278.2), seria necessário considerar:

$\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0 \quad \text{e} \quad \delta p_j(t_1) = \delta p_j(t_2) = 0$,

(I) (II)

pois, nesse caso, temos $2n$ variáveis independentes q_i e p_i;

entretanto, seguindo o mesmo procedimento de pg. 2.1, verifica-se que os termos de superfície associados a (278.2) são dados por:

tilibra

$$\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j}}_{=0} \delta q_j(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_j}}_{=0} \delta p_j(t) \right)_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad (280.1)$$

↑ pois condição (I) ; pois $f \neq f(\dot{p}_j)$

↳ apenas condição (I) é necessária, similar ao princípio de Hamilton (2.1)!

Obs.:

Goldstein: é possível modificar o integrando da Eq. (278.1) de modo que é possível obter eqs. de Hamilton via princípio variacional, porém, nesse caso, seria necessário considerar as duas hipóteses (I) e (II): veja Sec. 8.5, G.;

Aguiar: utilizar princípio variacional que considera (II) não é necessário, sendo, além disso, inconveniente: veja Sec. 4.5, Aguiar.

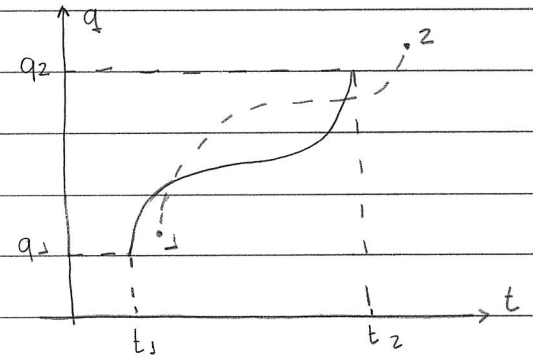
· Princípio da ação mínima.

Lembrar Eq. (279.2): $\bar{q}_j(t) = q_j(t) + \delta q_j(t)$;

princípios de Hamilton (2.1) e Hamilton modificado (278.1) baseados na condição (I): $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$: variação - δ;

entretanto, seria interessante considerar um princípio variacional (→ eqs. de Hamilton) menos restritivo; por exemplo, poderíamos considerar que $q_j(t) \to q(t)$ e $\bar{q}_j(t) \to \bar{q}(t)$ são tais que:

tilibra



$q(t)$: ——

$\bar{q}(t)$: - - - -

(281.1)

$q(t_1) = q_1$ e $q(t_2) = q_2$

$\bar{q}(t_1 + \Delta t_1) = q_1 + \Delta q_1$ e $\bar{q}(t_2 + \Delta t_2) = q_2 + \Delta q_2$:

: notar : instantes de tempo iniciais e finais

e pelos " " " de

$q(t)$ e $\bar{q}(t)$ são, em princípio, distintos : variação - Δ ;

Definição : variação - Δ :

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L \equiv \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} dt\, \bar{L} - \int_{t_1}^{t_2} dt\, L \qquad (281.2)$$

onde $\bar{L} = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ e $L = L(q, \dot{q}, t)$: comparar c/ pg. 2.1

inicial : vamos determinar a relação entre Δq_i e δq_i :

como $\dot{\bar{q}}(t_1) = \frac{1}{\Delta t_1}\left(\bar{q}(t_1 + \Delta t_1) - \bar{q}(t_1)\right)$

$\hookrightarrow \Delta q_1 = \bar{q}(t_1 + \Delta t_1) - q(t_1) = \bar{q}(t_1) - q(t_1) + \dot{\bar{q}}(t_1)\Delta t_1$

$\delta q_1 \equiv \delta q(t_1)$: como definido em (279.2)

$\hookrightarrow \Delta q_1 = \delta q_1 + \dot{\bar{q}}(t_1)\Delta t_1$

(281.3)

$\simeq \delta q_1 + \dot{q}(t_1)\Delta t_1 = \delta q_1 + \dot{q}_1 \Delta t_1$: Veja abaixo

tilibra

e, similar: $\Delta q_2 = \delta q_2 + \dot{q}_2 \Delta t_2$

· Eq. (281.2) pode ser escrita como:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \underbrace{\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2} dt\, \bar{L}}_{} + \int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} dt\, \bar{L} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} dt\, \bar{L}}_{} + \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_1} dt\, \bar{L} -$$

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} dt\, \bar{L} \right]$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$$

$$= \underbrace{\int_{t_2}^{t_2+\Delta t_2} dt\, \bar{L}}_{\bar{L}(t_2)\Delta t_2} - \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+\Delta t_1} dt\, \bar{L}}_{\bar{L}(t_1)\Delta t_1} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, \bar{L} - L}_{\text{variação - } \delta}$$

$$\Rightarrow \Delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \bar{L}(t_2)\Delta t_2 - \bar{L}(t_1)\Delta t_1 + \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L \qquad (282.1)$$

similar à Eq. (281.3), temos que:

$$\bar{L}(t_1)\Delta t_1 \simeq L(t_1)\Delta t_1 \quad \text{e} \quad \bar{L}(t_2)\Delta t_2 \simeq L(t_2)\Delta t_2 ;$$

similar pg. 2.1, temos que:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right)}_{=0,\ \text{pois } q(t):\ \text{OK c/ Eq. de Lagrange}} \delta q_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i \neq 0\ \text{nesse caso}} \delta q_i(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

como (notação):

$$p_i \delta q_i(t)\Big|_{t_1}^{t_2} \to p\,\delta q(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = p(t_2)\delta q(t_2) - p(t_1)\delta q(t_1)$$

$$= p_2 \delta q_2 - p_1 \delta q_1$$

$$\hookrightarrow \Delta \int_1^2 dt\, L = L(t_2)\Delta t_2 + p_2 \delta q_2 - \left(L(t_1)\Delta t_1 + p_1 \delta q_1\right)$$

$$= \underbrace{\left(L(t_2) - \dot{q}_2 p_2\right)\Delta t_2}_{-H(t_2)} - \underbrace{\left(L(t_1) - \dot{q}_1 p_1\right)\Delta t_1}_{-H(t_1)}$$

Eq. (281.3)

$$+ p_2 \Delta q_2 - p_1 \Delta q_1$$

$$= \underbrace{p_2 \Delta q_2 - H(t_2)\Delta t_2}_{\text{p/o final}} - \underbrace{\left(p_1 \Delta q_1 - H(t_1)\Delta t_1\right)}_{\text{p/o inicial}} \qquad (283.1)$$

hipóteses: - $L = L(q, \dot{q})$, i.e. $L \neq L(t) \to H \neq H(t)$

↳ H: cte de movimento;

- H cte de movimento p/ trajetórias ótima $q(t)$ e variada $\bar{q}(t)$;

- $\Delta q(t_1) = \Delta q_1 = \Delta q(t_2) = \Delta q_2 = 0$, (283.2)

mas $\Delta t_1 \neq 0$ e $\Delta t_2 \neq 0$;

$$\hookrightarrow \Delta \int_1^2 dt\, L = (\Delta t_2 - \Delta t_1)(-H) \qquad (283.3)$$

por outro lado, p/ H = cte, temos que:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \int_{t_1}^{t_2} dt\,(\dot{q}p - H) = -(t_2 - t_1)H + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{q}p \qquad (283.4)$$

tilibra

$$\hookrightarrow \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} dt\, L = -(t_2+\Delta t_2 - t_1 - \Delta t_1)H + \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} dt\, \dot{q}p \qquad (284.1)$$

temos que: Eqs. (283.4) e (284.1)

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = -(t_2+\Delta t_2 - t_1 - \Delta t_1)H + (t_2 - t_1)H + \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} dt\, \dot{q}p - \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{q}p$$

$$= -(\Delta t_2 - \Delta t_1)H + \Delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{q}p$$

Eq. (283.3)

$$= -(\Delta t_2 - \Delta t_1)H$$

⊕ notação $\dot{q}p \rightarrow \dot{q}_i p_i$

$$\hookrightarrow \Delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{q}_i p_i = 0 \qquad \text{: princípio de ação mínima} \qquad (284.2)$$

Eq. (284.2): permite determinar a trajetória de partículas se as variações são tais que hipóteses (283.2) ok!

lembrar:

se $X_{\alpha i} = X_{\alpha i}(q_j)$: veja pg. 270

↳ energia cinética $T = a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$: Eqs. (269.1) e (270.1)

e $\dot{q}_i p_i = 2T$: Eqs. (269.2) e (270.1); p/ $U = U(q_j)$

(se $U = U(q_j, \dot{q}_j) \rightarrow \partial T/\partial \dot{q}_j \neq \partial L/\partial \dot{q}_j = p_j$)

tilibra

↳ Eq. (284.2): $\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, T = 0$

em particular, p/ partícula livre $T = E = cte$

(285.1)

↳ $\Delta \int_1^2 dt\, T = 0 \rightarrow \Delta \int_1^2 dt = 0$: similar princípio de Fermat

tilibra

· Transformações canônicas.

considerar: sistema n graus de liberdade descrito pelas
coord. generalizadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$
e momentos conj. $p_1, p_2, \ldots, p_n$;

hipótese: H = cte de movimento e todas q_i = variáveis cíclicas
↳ $p_i = \alpha_i$ = cte e $H = H(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; (286.1)

Eqs. de Hamilton (261.3): $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i = \omega_i(\alpha_j)$: cte

↳ $q_i(t)$ pode ser facilmente determinado:

$q_i(t) = \omega_i t + \beta_i$, β_i : cte ~ condições iniciais; (286.2)

em princípio, hipótese (286.1) corresponde a um caso particular;
entretanto, lembrar que um sistema pode ser descrito por vários conjuntos de coord. generalizadas!

Ex.: descrição movimento partícula em 2-D via formalismo lagrangiano:

coord. generalizadas: $q_1 = x$, $q_2 = y$
ou $Q_1 = r$, $Q_2 = \theta$;

em particular, p/ partícula sob força central, temos que
$L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$
ou $L = L(r, \dot{r}, \dot{\theta})$: θ : variável cíclica!

· em princípio, dados dois conjuntos de coord. generalizadas q_i e Q_j, é possível relacioná-las via uma

tilibra

transformação de coordenadas:

$$Q_i = Q_i(q_j, t) \quad \text{ou} \quad q_j = q_j(Q_i, t) \qquad (287.1)$$

↳ é possível mapear lagrangiana $L(q, \dot{q}, t) \to L(Q, \dot{Q}, t)$;

Eq. (287.1): transf. de coordenadas no espaço de configurações

· formalismo hamiltoniano: nesse caso, como o sistema é descrito por $2n$ variáveis independentes q_i e p_i, o equivalente Eq. (287.1) assume a forma:

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j, t) \quad \text{ou} \quad q_j = q_j(Q_i, P_i, t)$$
$$P_i = P_i(q_j, p_j, t) \qquad p_j = p_j(Q_i, P_i, t) \; : \qquad (287.2)$$

: transf. de "coordenadas" no espaço de fase!

importante: as novas variáveis Q_i e P_i devem constituir um conjunto de variáveis canonicamente conjugadas (veja pg. 262), i.e., deve ∃ uma função

$$K = K(Q_i, P_i, t) \qquad (287.3)$$

tal que: $\dot{Q}_i = \partial K / \partial P_i$ e $\dot{P}_i = -\partial K / \partial Q_i$

se (287.3) ok → transf. (287.2): transformação canônica

nesse caso: $K = K(Q, P, t)$: (nova) função hamiltoniana em termos variáveis Q_i e P_i;

· como Q_i e P_i são variáveis canônicas → princípio de Hamilton modificado (278.1) é válido, i.e.

tilibra

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{Q}_i P_i - K(Q,P,t) \right) = 0 ; \qquad (288.1)$$

similar, p/ variáveis q_i e p_i:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{q}_i p_i - H(q,p,t) \right) = 0 ; \qquad (288.2)$$

em princípio, Eqs. (288.1) e (288.2) simultaneamente satisfeitas se integrandos são tais que:

$$\dot{Q}_i P_i - K(Q,P,t) = \lambda \left(\dot{q}_i p_i - H(q,p,t) \right) \qquad (288.3)$$

onde λ: cte.

caso geral: além do fator de escala λ, a diferença entre os integrandos acima pode conter uma função arbitrária do tipo $dF(q_i,t)/dt$:

$$\dot{Q}_i P_i - K(Q,P,t) = \lambda \left(\dot{q}_i p_i - H(q,p,t) \right) - \frac{dF}{dt} ; \qquad (288.4)$$

de fato, a presença de dF/dt no integrando de (288.2) não altera as eqs. de movimento (261.3), pois

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{dF(q,t)}{dt} = \delta \left(F(q_i(t_2),t_2) - F(q_i(t_1),t_1) \right)$$

$$= F\left(q_i(t_2) + \delta q_i(t_2), t_2 \right) - F\left(q_i(t_2), t_2 \right)$$

$$- F\left(q_i(t_1) + \delta q_i(t_1), t_1 \right) - F\left(q_i(t_1), t_1 \right) = 0 ; \qquad (288.5)$$

lembrar que, p/ a variação - δ, temos que $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

tilibra

· o fator de escala λ pode ser considerado unitário;
de fato, considerar a transformação

$$Q'_i = \mu q_i \quad \text{e} \quad P'_i = \nu p_i ; \qquad \mu, \nu : \text{cte} \tag{289.1}$$

nesse caso, $K(Q', P', t) = \mu\nu H(q, p, t)$, pois

$$\frac{\partial K}{\partial P'_i} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial p_i}(\mu\nu H) = \mu\frac{\partial H}{\partial p_i} = \mu\dot{q}_i = \dot{Q}'_i \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial K}{\partial Q'_i} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_i}(\mu\nu H) = \nu\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\nu\dot{p}_i = -\dot{P}'_i$$

↳ $$\left(\dot{Q}'_i P'_i - K(Q', P', t)\right) = \mu\nu\left(\dot{q}_i p_i - H(q, p, t)\right) \tag{289.2}$$

comparando Eqs. (288.4) e (289.2) → $\mu\nu = \lambda$ e $F = 0$

↳ podemos considerar $\lambda = 1$, pois a transformação $(q, p) \to (Q, P)$ pode ser feita em duas etapas de modo a eliminar λ, i.e., $(q, p) \to (Q', P') \to (Q, P)$!

↳ a transf. canônica $(q, p) \to (Q, P)$: Eq. (287.2) deve satisfazer a condição:

$$\dot{q}_i p_i - H(q, p, t) = \dot{Q}_i P_i - K(Q, P, t) + \frac{dF}{dt} \tag{289.3}$$

· sobre a função F:
em princípio, podemos considerar $F(q, p, t)$ ou $F(Q, P, t)$; como as variáveis (q, p) e (Q, P) estão relacionadas via transf. (287.2)
↳ F pode ser escrita parcialmente em termos dos dois conjuntos de variáveis, e.g., $F_3 = F_3(q, Q, t)$;

tilibra

· Definição: F: função geratriz da transf. canônica

próxima etapa: vamos analisar 4 casos particulares da função geratriz:

(1) $F_1 = F_1(q, Q, t)$:

Eq. (289.3): $\dot{q}_i p_i - H(q,p,t) = \dot{Q}_i P_i - K(Q,P,t) - \frac{\partial F_1}{\partial t}$ (290.1)

notar: $\delta \int_{t_1}^{t_2} dt$ Eq. (290.1):

$$\delta \int_1^2 dt\,(\dot{q}_i p_i - H) = \delta \int_1^2 dt\,(\dot{Q}_i P_i - K) - \underbrace{\delta \int_1^2 dt\,\frac{dF_1(q,Q,t)}{dt}}_{(I)}$$

$$(I) = \delta\Big(F_1(q(t_2), Q(t_2), t_2) - F(q(t_1), Q(t_1), t_1)\Big)$$

$\equiv q_2, Q_2, t$ $\qquad$ $\equiv q_1, Q_1, t$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial F_1}{\partial Q_2}\delta Q_2 - \frac{\partial F_1}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial F_1}{\partial Q_1}\delta Q_1 = 0,$$

pois, para as duas variações δ:

$$\delta q_1 = \delta q_i(t_1) = \delta q_2 = \delta q_i(t_2) = 0$$
$$\delta Q_1 = \delta Q_i(t_1) = \delta Q_2 = \delta Q_2(t_2) = 0 \qquad (290.2)$$

↳ $F_1 = F_1(q,Q,t)$ pode ser considerada em (289.3)!

como $\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$, temos que:

tilibra

Eq. (290.1): $\dot{q}_i p_i - H = \dot{Q}_i P_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$

↳ $\underbrace{\left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)}_{=0}\dot{q}_i - \underbrace{\left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)}_{=0}\dot{Q}_i - H + K - \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$; pois 2n variáveis q_i e Q_i são independentes!

↳ $\underbrace{p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}}_{(*)}$; $\underbrace{P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}}_{(**)}$; $K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$ (291.1)

notar: se $F_1 = F_1(q, Q, t)$ conhecida, temos que:

- (*) permite determinar $p_i = p_i(q, Q, t)$
  ↳ $Q_i = Q_i(q, p, t)$ (***) ;
- (**) → $P_i = P_i(q, Q, t)$
  ⊕ (***) → $P_i = P_i(q, p, t)$, i.e.,

(*) e (**) → determinação transf. canônica (287.2), daí F_1: função geratriz!

em princípio, VOLTA OK: se transf. (287.2) conhecida
↳ F_1 determinada

(2) $F_2 = F_2(q, P, t)$:

nesse caso, a condição (289.3) não é, em princípio, adequada:

como $\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}$

↳ Eq. (289.3): $\dot{q}_i p_i - H = \dot{Q}_i P_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}$

tilibra

↳ não é possível estabelecer relações similares a (291.1)!

entretanto, se considerarmos

$$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i \tag{292.1}$$

↳ Eq. (289.3):

$$\dot{q}_i p_i - H = \dot{Q}_i P_i - K + \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial t}}_{\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}} - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i \tag{292.2}$$

↳ $$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \; ; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \; ; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{292.3}$$

(3) $F_3 = F_3(p, Q, t)$:

nesse caso, é necessário considerar

$$F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i \tag{292.4}$$

na condição (289.3):

$$q_i p_i - H = \dot{Q}_i P_i - K + \underbrace{\frac{\partial F_3}{\partial t}}_{\frac{\partial F_3}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial t}} + \dot{q}_i p_i + q_i \dot{p}_i$$

↳ $$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial P_i} \; ; \quad P_i = \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \; ; \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{292.5}$$

tilibra

(4) $F_4 = F_4(p, P, t)$:

nesse caso, é necessario considerar

$$F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i \qquad (293.1)$$

Eq. (289.3): $\dot{q}_i p_i - H = \dot{Q}_i P_i - K + \underbrace{\frac{\partial F_4}{\partial t}} + \dot{q}_i P_i + q_i \dot{p}_i - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i$

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

↳ $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$; $Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$; $K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$ (293.2)

Resumo: p/ as 4 particulares funções geratrizes consideradas, as Eqs. (291.1), (292.3), (292.5) e (293.2) permitem determinar a correspondente transf. canônica (287.2);

notar: em princípio, as funções geratrizes (292.1), (292.4) e (293.1) podem ser obtidas a partir de $F_3 = F_3(q, Q, t)$ via uma transformada de Legendre: veja comentário abaixo Eq. (9.19), Goldstein;

entretanto, é possível seguir um procedimento alternativo e determinar o equivalente da condição (289.3) p/ cada caso: veja Sec. 5.1, Aguiar. (293.3)

· a fim de exemplificar a afirmação (293.3), vemos considerar o caso (2) acima;

tilibra

O princípio de Hamilton modificado (278.1) pode alternativamente ser escrito como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-q_i \dot{p}_i - H(q_i, p_i, t) \right) = 0, \qquad (294.1)$$

sendo que, aqui, a variação δ é feita sob a condição:

$$\delta p_i(t_1) = \delta p_i(t_2) = 0 \qquad (294.2)$$

Exercício: mostrar que (294.1) → eqs. de Hamilton (261.3)

Considerar: princípio variacional (278.1) p/ q_i e p_i
é " " (294.1) p/ Q_i e P_i;
estabelecendo a igualdade entre os integrandos como em (288.4), temos que:

$$\dot{q}_i p_i - H = -Q_i \dot{P}_i - K + \frac{dF_2}{dt} \qquad (294.3)$$

nesse caso, as variações δ estão associadas às condições
$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ e $\delta P_i(t_1) = \delta P_i(t_2) = 0$

↳ $F_2 = F_2(q, P, t)$: comparar c/ (290.1) - (290.2);

notar: condição (294.3) (equivalente (289.3)) =

= " (292.2)!

tilibra

· Exemplos transf. canônicas.

(1) Identidade: $F_2(q,P) = q_i P_i$ (295.1)

Eq. (292.3): $p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j$ $\quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j$ $\quad K = H$

(2) transf. de coordenadas:

$$F_2(q,P) = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; t) P_i \qquad (295.2)$$

onde $f_i(q,t)$: conjunto de funções

Eq. (292.3): $p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} P_i$ $\quad K = H$

$Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = f_j(q_1, q_2, \ldots, q_n; t)$: similar transf. de coordenadas (287.1) !

↳ transf. (usual) de coordenadas : transf. canônica !

(3) troca coordenada ↔ momento:

$$F_1(q,Q) = q_i Q_i \qquad (295.3)$$

Eq. (291.1): $p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = Q_j$ $\quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -q_j$ $\quad K = H$

↳ a distinção entre coordenadas e momentos no formalismo hamiltoniano está relacionada a uma escolha de nótulos; nótulos podem ser trocados via uma transf. canônica; ambos q_i e p_i são importantes na descrição do sistema.

tilibra

Ex: oscilador harmônico 1-D;

considerar sistema descrito pela hamiltoniana (263.2):

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Kq^2 = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m\omega^2 q^2\right) \qquad (296.1)$$

onde $\omega^2 = K/m$, K e m: cte

ideia: determinar $q(t)$ e $p(t)$ via uma transf. canônica;

notar: se $p = f(P)\cos Q$ e $q = \frac{1}{m\omega} f(P)\sin Q$ (296.2)

↳ $K = H = \frac{1}{2m} f^2(P) = K(P)$ → Q: variável cíclica

próxima etapa: determinar a função $f(P)$;

verifica-se que a transf. (296.2) pode ser determinada a partir da função gerador

$$F_2(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q \qquad (296.3)$$

de fato, Eq. (295.1):

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad \text{e} \quad P = -\frac{\partial F_2}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

↳ $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q = \frac{1}{m\omega}\sqrt{2m\omega P}\sin Q$ (296.4)

e $p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q$ → $f(P) = \sqrt{2m\omega P}$

tilibra

↳ $K = H = \frac{1}{2m} f^2(P) = \omega P \rightarrow P = E/\omega$

Eq. de Hamilton (261.3):

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega : cte \rightarrow Q(t) = \omega t + \alpha$$

↳ Eq. (296.4): $q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$

$$p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \alpha) \qquad (297.1)$$

Obs.: veja Fig. 9.1, Goldstein.

· Transformações canônicas: formulação simplética.

ideia: introduzir critério alternativo, independente da determinação de uma função geratriz F, para verificar se transf. (287.2) é uma transf. canônica;

inicial: considerar transf. (287.2) independente t:

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j) \quad e \quad P_i = P_i(q_j, p_j) \qquad (297.2)$$

notar:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\dot{p}_j = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial P_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

↑ Eq. (261.3)

como (297.2) independente t, temos que $H = K$: veja Eq. (289.3); de fato,

$$H(q,p) = K\left(Q(q,p); P(q,p)\right)$$

tilibra

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial K}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial p_j} + \frac{\partial K}{\partial P_\ell}\frac{\partial P_\ell}{\partial p_j}$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial K}{\partial Q_\ell}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_j} + \frac{\partial K}{\partial P_\ell}\frac{\partial P_\ell}{\partial q_j}$$

$$\rightarrow \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_\ell}\underbrace{\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_\ell}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_j}\right)}_{(I)} + \frac{\partial K}{\partial P_\ell}\underbrace{\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial P_\ell}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_\ell}{\partial q_j}\right)}_{(II)}$$

e, similar, verifica-se que: (298.1)

$$\dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q_\ell}\underbrace{\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_\ell}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_j}\right)}_{(III)} + \frac{\partial K}{\partial P_\ell}\underbrace{\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\frac{\partial P_\ell}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j}\frac{\partial P_\ell}{\partial q_j}\right)}_{(IV)}$$

notar: Eq.(298.1) ok c/ Eqs. de Hamilton

$\dot{Q}_i = \partial K/\partial P_i$ e $\dot{P}_i = -\partial K/\partial Q_i$ se

$$(I) = (IV) = 0 \quad \text{e} \quad (II) = -(III) = \delta_{i,\ell} \qquad (298.2)$$

próximo etapa: expressar as condições (298.1) e (298.2) utilizando a notação simplética;

similar Eq. (267.2), vamos introduzir vetores c/ 2n componentes:

$$\vec{\eta}^T \rightarrow \eta^T = (q_1\ q_2 \ldots q_n\ p_1\ p_2 \ldots p_n)$$

$$\xi^T = (Q_1\ Q_2 \ldots Q_n\ P_1\ P_2 \ldots P_n) \qquad (298.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}^T = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}\ \frac{\partial}{\partial q_2} \ldots \frac{\partial}{\partial q_n}\ \frac{\partial}{\partial p_1}\ \frac{\partial}{\partial p_2} \ldots \frac{\partial}{\partial p_n}\right)$$

e

$$\frac{\partial^T}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial}{\partial Q_1} \; \frac{\partial}{\partial Q_2} \; \cdots \; \frac{\partial}{\partial Q_n} \; \frac{\partial}{\partial P_1} \; \frac{\partial}{\partial P_2} \; \cdots \; \frac{\partial}{\partial P_n} \right)$$

↳ Transf. (297.2) assume a forma (considerando caso geral, dependente t):

$$\zeta = \zeta(\eta, t) \tag{299.1}$$

na formulação simplética, Eqs. de Hamilton (265.3) assume a forma (268.2), i.e.:

$$\dot{\eta} = \hat{J} \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad ; \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{I} \\ -\hat{I} & 0 \end{pmatrix} \tag{299.2}$$

se (299.1): Transf. canônica $\rightarrow$ $\dot{\zeta} = \hat{J} \frac{\partial K}{\partial \zeta}$ (299.3)

· Eq. (299.1) $\rightarrow$ $\frac{d\zeta_i}{dt} = \dot{\zeta}_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j + \frac{\partial \zeta_i}{\partial t}$ — Eq. (299.2)

$$= M_{ij} \dot{\eta}_j + \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} = M_{ij} J_{jk} \frac{\partial H}{\partial \eta_k} + \partial_t \zeta_i$$

onde $M_{ij} \equiv \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}$: elemento matriz $\hat{M}_{2n \times 2n}$: (299.4)

: matriz jacobiana de Transf. (299.1)

como Transf. (299.1) depende t, temos que $H \neq K$; similar Eq. (291.1), podemos escrever

$$K(\zeta, t) = H(\eta, t) + A(\zeta, t) \tag{299.5}$$

ou $H(\eta, t) = K\left(\zeta(\eta, t), t\right) - A\left(\zeta(\eta, t), t\right)$

onde conexão $A(\zeta, t)$: determinada posteriormente.

tilibra

↳ $\frac{\partial H}{\partial \eta_\kappa} = \frac{\partial K}{\partial \tau_e}\frac{\partial \tau_e}{\partial \eta_\kappa} - \frac{\partial A}{\partial \tau_e}\frac{\partial \tau_e}{\partial \eta_\kappa} = \underbrace{\frac{\partial \tau_e}{\partial \eta_\kappa}}\left(\frac{\partial K}{\partial \tau_e} - \frac{\partial A}{\partial \tau_e}\right)$

$= M_{e\kappa} = M^T_{\kappa e}$

↳ $\dot{\zeta}_i = M_{ij} J_{j\kappa} M^T_{\kappa e}\left(\frac{\partial K}{\partial \tau_e} - \frac{\partial A}{\partial \tau_e}\right)$

ou $\dot{\zeta} = \hat{M}\hat{J}\hat{M}^T\frac{\partial K}{\partial \zeta} - \hat{M}\hat{J}\hat{M}^T\frac{\partial A}{\partial \zeta} + \partial_t \zeta$ (300.1)

comparando Eqs. (299.3) e (300.1), temos que a transf. (299.1) é uma transf. canônica se

$\hat{M}\hat{J}\hat{M}^T = \hat{J}$ (300.2)

e $\hat{J}\,\partial A/\partial \zeta = \partial_t \zeta$ (300.3)

Eq. (300.2): condição (simplética) que transf. (299.1) deve satisfazer p/ constituir uma transf. canônica;

Obs. 1: se matriz $\hat{M}$ satisfaz condição (300.2)
↳ $\hat{M}$ é uma matriz simplética;
verifica-se que o conjunto de matrizes simpléticas formam um grupo: veja Sec. 9.4, Goldstein
ou Sec. 5.4, Aguiar;

Obs. 2: a condição (300.2) pode ser escrita como:

$\hat{M}\hat{J} = \hat{J}(\hat{M}^T)^{-1} \rightarrow \hat{J} = M^{-1}\hat{J}(\hat{M}^T)^{-1} = (\hat{M}^T\hat{J}^{-1}\hat{M})^{-1}$

↳ $\hat{J}^{-1} = \hat{M}^T\hat{J}^{-1}\hat{M} \rightarrow \hat{J} = \hat{M}^T\hat{J}\hat{M}$. (300.4)

pois $\hat{J}^{-1} = \hat{J}^T = \hat{J}$: veja Eq. (268.1);

tilibra

Obs. 3: a condição (300.3) permite relacionar a conexão A com uma função geratriz F: veja Sec. 9.5, Goldstein ou Sec. 5.3, Aguiar.

· Colchetes de Poisson.

Definição: colchetes de Poisson entre duas funções u e v w.r.t. variáveis canônicas q_i e p_j:

$$\{u,v\}_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \tag{301.1}$$

notar: expressões (I) - (IV) em (298.1): casos particulares definição (301.1)!

· se $u = q_i$ e $v = q_j$, temos que:

$$\{q_i, q_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = 0 \tag{301.2}$$

e, similar $\{p_i, p_j\} = 0$

· se $u = q_i$ e $v = p_j$, temos que

$$\{q_i, p_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij} \tag{301.3}$$

e, similar $\{p_j, q_i\} = -\delta_{ij}$

· utilizando a notação simplética, verifica-se que Eq. (301.1) assume a forma (p/ detalhes, veja pg. 301.1):

$$\{u,v\}_\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \hat{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \tag{301.4}$$

tilibra

· sobre as Eqs. (301.4) e (302.1):

· considerando Eq. (301.3) p/ $n = 2$; temos que:

$$\{u,v\}_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial v}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial p_1}\frac{\partial v}{\partial q_1} + \frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial v}{\partial p_2} - \frac{\partial u}{\partial p_2}\frac{\partial v}{\partial q_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial q_1} & \frac{\partial u}{\partial q_2} & \frac{\partial u}{\partial p_1} & \frac{\partial u}{\partial p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial v/\partial q_1 \\ \partial v/\partial q_2 \\ \partial v/\partial p_1 \\ \partial v/\partial p_2 \end{pmatrix}$$

· Eqs. (301.2) e (301.3) p/ $n = 2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, (q_1\ q_2\ p_1\ p_2) \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} \{q_1,q_1\} & \{q_1,q_2\} & \{q_1,p_1\} & \{q_1,p_2\} \\ \{q_2,q_1\} & \{q_2,q_2\} & \{q_2,p_1\} & \{q_2,p_2\} \\ \{p_1,q_1\} & \{p_1,q_2\} & \{p_1,p_1\} & \{p_1,p_2\} \\ \{p_2,q_1\} & \{p_2,q_2\} & \{p_2,p_1\} & \{p_2,p_2\} \end{pmatrix}$$

tilibra

e as relações (301.2) e (301.3) podem ser escritas como:

$$\{\eta, \eta^T\}_\eta = \hat{J} \quad : \text{matriz } 2n \times 2n \tag{302.1}$$

· p/ variáveis Q_i e P_i relacionadas c/ as variáveis q_j e p_j via a transformação (299.1), temos que:

$$\{\xi, \xi^T\}_\eta = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^T \hat{J} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \tag{302.2}$$

como $\frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} = M_{ij} \rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \hat{M}$

↳ $\{\xi, \xi^T\}_\eta = \hat{M}^T \hat{J} \hat{M} = \hat{J}$ (Eq. (300.4)) : p/ transf. (299.1) canônica (302.3)

· Definição: colchetes de Poisson fundamentais:

" " " entre variáveis canônicas

w.r.t. variáveis canônicas;

Ex.: Eqs. (302.1) e (302.3).

· como Q_i e P_i variáveis canônicas

↳ Eq. (302.1) → $\{\xi, \xi^T\}_\xi = \hat{J}$ (302.4)

· Eqs. (302.3) e (302.4): colchetes de Poisson entre variáveis canônicas w.r.t. quaisquer variáveis canônicas são iguais

ou

= colchetes de Poisson fundamentais são invariantes sob ✓ transf. canônica

↳ Eq. (302.3): pode ser utilizada como critério p/ verificar se transf. (299.1) é uma transf. canônica!

· verifica-se q colchete de Poisson é invariante sob uma transformação canônica:

considerar variáveis $u = u(\eta)$ e $v = v(\eta)$;

Eq. (301.4): $\{u,v\}_\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \hat{J} \frac{\partial v}{\partial \eta}$

como $\frac{\partial u}{\partial \eta_i} = \frac{\partial u}{\partial \tau_j}\frac{\partial \tau_j}{\partial \eta_i} = M_{ji}\frac{\partial u}{\partial \tau_j} = M^T_{ij}\frac{\partial u}{\partial \tau_j}$

↳ $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \hat{M}^T \frac{\partial u}{\partial \tau}$

↳ $\{u,v\}_\eta = \left(\hat{M}^T\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^T \hat{J}\,\hat{M}^T\frac{\partial v}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^T \underbrace{\hat{M}\,\hat{J}\,\hat{M}^T}_{=\hat{J}} \frac{\partial v}{\partial \tau}$

↳ $\{u,v\}_\eta = \{u,v\}_\tau$ (303.1)

· Transformações canônicas infinitesimais,

lembrar Eq. (295.1): função geratriz $F_2(q,P) = q_i P_i$ associada à transf. identidade

↳ transf. canônica infinitesimal pode ser determinada via a seguinte função geratriz do tipo F_2:

$$F_2(q,P) = q_i P_i + \epsilon G(q,P,t) \quad (303.2)$$

onde $\epsilon \ll 1$ e $G(q,P,t)$ é uma função ambitrária e diferenciável;

tilibra

Eq. (292.3): $p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = P_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}$

$$\text{e} \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j}$$

como $P_j - p_j = -\epsilon \partial G/\partial q_j : O(\epsilon^1)$

↳ em ordem ϵ^1, podemos considerar $\epsilon \partial G/\partial P_j = \epsilon \partial G/\partial p_j$;

temos que: $P_j = p_j - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} + O(\epsilon^2)$ (304.1)

$$\text{e} \quad Q_j = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} + O(\epsilon^2)$$

$$\text{ou} \quad \vec{\zeta} = \vec{\eta} + \epsilon \hat{J} \frac{\partial G}{\partial \vec{\eta}} + O(\epsilon^2)$$

notar: $\zeta_i = \eta_i + \epsilon J_{ik} \frac{\partial G}{\partial \eta_k}$

↳ $M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} = \delta_{ij} + \epsilon J_{ik} \underbrace{\frac{\partial^2 G}{\partial \eta_j \partial \eta_k}}$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \eta_k \partial \eta_j} \equiv \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \vec{\eta}^2}\right)_{kj} :$$

: elemento matriz simétrica $\partial^2 G/\partial \vec{\eta}^2$

↳ $\hat{M} = \hat{I} + \epsilon \hat{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \vec{\eta}^2} + O(\epsilon^2)$: matriz jacobiana p/ a transf. canônica infinitesimal (304.2)

como $\hat{M}^T = \hat{I} + \epsilon \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \vec{\eta}^2}\right)^T \hat{J}^T = \hat{I} - \epsilon \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \vec{\eta}^2}\right) \hat{J}$,

↑ Eq. (268.1)

temos que:

tilibra

$$\hat{M}\hat{J}\hat{M}^T = (\mathbb{1} + \epsilon \hat{J}\partial^2 G)\,\hat{J}\,(\mathbb{1} - \epsilon\,\partial^2 G\,\hat{J})$$

$$= (\hat{J} + \epsilon \hat{J}\partial^2 G\hat{J})(\mathbb{1} - \epsilon\,\partial^2 G\,\hat{J})$$

$$= \hat{J} - \epsilon\hat{J}\partial^2 G\hat{J} + \epsilon\hat{J}\partial^2 G\hat{J} + O(\epsilon^2)$$

$$= \hat{J} + O(\epsilon^2) \quad : \text{condição simplética (300.2) p/ transf. canônica} \qquad (305.1)$$

· próxima etapa: derivar a identidade de Jacobi via uma transf. canônica infinitesimal;

considerar a transf. canônica infinitesimal

$$F_2 = qP + \epsilon\,\mathcal{C}(q,P,t)$$

↳ $\zeta = \eta + \epsilon\hat{J}\,\partial\mathcal{C}/\partial\eta = \eta + \delta\eta$;

p/ uma função $u(\eta)$, temos que:

$$\delta u = u(\eta+\delta\eta) - u(\eta) = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \delta\eta = \epsilon\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \hat{J}\,\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \eta}$$

↳ $\delta u = \epsilon\{u, \mathcal{C}\}$ (305.2)

p/ funções arbitrárias $A(\eta)$ e $B(\eta)$, temos que:

· se $u = \{A,B\}$ → $\delta u = \delta\{A,B\} = \epsilon\{\{A,B\},\mathcal{C}\}$ ← Eq. (305.2)

regra da cadeia → $= \{\delta A, B\} + \{A, \delta B\}$

· se $u = A$ → $\delta A = \epsilon\{A,\mathcal{C}\}$

tilibra

· se $u = B \rightarrow \delta B = \epsilon\{B, C\}$

↳ $\epsilon\{\{A,B\},C\} = \epsilon\{\{A,C\},B\} + \epsilon\{A,\{B,C\}\}$

$-\{C,A\}$ $\qquad$ $-\{\{B,C\},A\}$

como ϵ é ambidextro, temos que:

$$\{\{A,B\},C\} + \{\{B,C\},A\} + \{\{C,A\},B\} = 0 \quad \text{: identidade de Jacobi} \qquad (306.1)$$

· além de propriedade (306.1), verifica-se que

$$\begin{aligned} &\{u,u\} = 0 \\ &\{u,v\} = -\{v,u\} \\ &\{au + bv, w\} = a\{u,w\} + b\{v,w\} \\ &\{uv, w\} = u\{v,w\} + \{u,w\}v \end{aligned} \qquad (306.2)$$

onde $u = u(\eta)$, $v = v(\eta)$, $w = w(\eta)$ e $a, b \in \mathbb{C}$

· Equações de movimento,

considerar uma função $u = u(q, p, t)$,

onde q_i e p_i : variáveis canônicas ; temos que:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Eq. (261.3) ↗

↳ $$\frac{du}{dt} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (306.3)$$

ou na notação simplética:

tilibra

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \dot{\eta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \hat{J} \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t} = \{\eta, H\} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

↑ Eq. (299.2) ↑ Eq. (301.4)

$$\hookrightarrow \frac{du}{dt} = \{\eta, H\} + \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (307.1)$$

Eqs. (306.3) e (307.1) : eqs. de movimento p/ $u = u(\eta, t)$

· notar: p/ $u = q_i$ ou $u = p_i$, temos que:

Eq. (306.2): $\dot{q}_i = \{q_i, H\}$ e $p_i = \{p_i, H\}$ (307.2)

ou Eq. (307.1): $\dot{\eta} = \{\eta, H\}$

como $\{\eta, H\} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^T \hat{J} \frac{\partial H}{\partial \eta} = \hat{J} \frac{\partial H}{\partial \eta}$

$$\hookrightarrow \dot{\eta} = \{\eta, H\} = \hat{J} \frac{\partial H}{\partial \eta}$$: Eqs. de Hamilton (268.2)!

· p/ $u = H$, temos que

Eq. (306.3): $\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$: Eq. (262.1)

· como os colchetes de Poisson são invariantes sob uma transf. canônica: veja Eq. (303.1)

↳ eqs. de movimento (306.3) e (307.1) são " " "

" " !

· se u: cte de movimento

↳ $\frac{du}{dt} = 0 \xrightarrow{\text{Eq. (306.3)}} \frac{\partial u}{\partial t} = \{u, H\}$ (307.3)

tilibra

em particular, se u: cte de movimento $\Rightarrow u = u(\eta)$

↳ Eq. (307.3): $\{u, H\} = 0$ (308.1)

· novamente: considerar a transf. canônica infinitesimal (303.2); vimos que

Eq. (304.1): $\bar{\eta} = \eta + \epsilon \hat{J} \frac{\partial G}{\partial \eta} \equiv \eta + \delta\eta$ (308.2)

onde $G = G(\eta)$: função geradora da transf.

como $\{\eta, u\} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta}\right)^T \hat{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \hat{J} \frac{\partial u}{\partial \eta}$

↳ p/ $u = G$: $\{\eta, G\} = \hat{J}\, \partial G / \partial \eta$

↳ Eq. (308.2): $\delta\eta = \epsilon \{\eta, G\}$ (308.3)

p/ caso particular: transf (303.2) ~ variação parâmetro contínuo tempo $t \rightarrow \epsilon = dt$; gerador G = hamiltoniana H;

Eq. (308.3): $\delta\eta = dt \{\eta, H\} = dt\, \dot{\eta} = dt \frac{d\eta}{dt} = d\eta$:

↑ Eq. (307.2)

: transf. infinitesimal (308.2) → variação temporal $\eta(t) \rightarrow \eta(t + dt)$

ou evolução temporal de um sistema pode ser descrita como conjunto de transf. canônicas infinitesimais

ou

hamiltoniana H: gerador da evolução temporal do sistema!

tilibra