Instituto de Física *'Gleb Wataghin'*, Unicamp
F-315 (Mecânica Geral I), 1ª prova, 09/04/2019
RA: , Nome: GABARITO

Q_1	Q_2	Q_3	P_1

Atenção: cada item vale ***um*** ponto, com exceção do item 3c, que vale ***dois*** pontos. Respostas dos problemas sem justificativas ou cálculos intermediários, ainda que corretas, não serão consideradas. É proibida a utilização de calculadoras, celulares ou quaisquer outros dispositivos eletrônicos.

Formulário

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1+ax}{a^2}e^{-ax}\right) = -xe^{-ax}$, $\frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{a}\ln(ax+b)-x\right] = \ln(ax+b)$, $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2a}\ln^2(ax+b)\right] = \frac{\ln(ax+b)}{ax+b}$,
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\mathrm{sen}(a\pm b) = \mathrm{sen}\,a\cos b \pm \cos a\,\mathrm{sen}\,b$, $\cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$.

1. Um barco de massa m navega com velocidade constante sobre a superfície de um lago calmo quando os motores são desligados e o barco começa a desacelerar. Supondo que nesse instante a velocidade do barco é $v_0 > 0$ e que a força de resistência da água no barco possa ser representada por $F(v) = -F_0 e^{\beta v}$, onde (F_0, β) são constantes positivas, encontre:

(a) A velocidade do barco em função do tempo $v(t)$ a partir do instante em que os motores são desligados em $t = 0$.

(b) A distância x percorrida pelo barco até ele atingir velocidade nula, tomando a origem em $t = 0$, isto é, $x(t = 0) = 0$. Dica: obtenha $v(x)$ a partir de $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$.

(c) Encontre o trabalho $W \equiv \int_0^x F\,dx'$ realizado pela força F desde o instante inicial até o barco atingir velocidade nula. Dica: ao invés de efetuar o cálculo explícito de uma integral complicada, prove um teorema geral e aplique-o a este caso particular.

(a) $F(v) = -F_0 e^{\beta v} = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow e^{-\beta v}\frac{dv}{dt} = -\frac{F_0}{m} \Rightarrow \int e^{-\beta v}dv = -\frac{F_0}{m}t + c$

$\Rightarrow -\frac{1}{\beta}e^{-\beta v} = -\frac{F_0}{m}t + c \Rightarrow e^{-\beta v} = \frac{F_0\beta t}{m} - \beta c$

$v(t=0) = v_0 \Rightarrow -\beta c = e^{-\beta v_0} \Rightarrow e^{-\beta v} = \frac{F_0\beta t}{m} + e^{-\beta v_0}$

$\Rightarrow -\beta v = \ln\left(\frac{F_0\beta t}{m} + e^{-\beta v_0}\right) \Rightarrow v = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{F_0\beta t}{m} + e^{-\beta v_0}\right)$

(a) $-F_0 e^{\beta v} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} \Rightarrow ve^{-\beta v}\frac{dv}{dx} = -\frac{F_0}{m}$

$\Rightarrow \int ve^{-\beta v}dv = -\frac{F_0}{m}x + C'$. Do formulário:

$-\frac{1+\beta v}{\beta^2}e^{-\beta v} = -\frac{F_0}{m}x + C'$ $\qquad v(x=0) = v_0 \Rightarrow C' = -\frac{1+\beta v_0}{\beta^2}e^{-\beta v_0}$

$\Rightarrow x = \frac{m}{F_0}\left[-\frac{1+\beta v_0}{\beta^2}e^{-\beta v_0} + \frac{1+\beta v}{\beta^2}e^{-\beta v}\right]$

Distância percorrida até $v=0$:

$D = \frac{m}{F_0}\left[-\frac{1+\beta v_0}{\beta^2}e^{-\beta v_0} + \frac{1}{\beta^2}\right]$

(c) Teorema trabalho-energia cinética:

$W = \int_0^x F(x')dx' = \int_0^x m\frac{dv}{dt}dx' = \int_0^x m\frac{dv}{dx'}\frac{dx'}{dt}dx' = \int_0^x mv\frac{dv}{dx'}dx'$

$= \int_{v_0}^{v(x)} mv'dv' = \frac{1}{2}mv'^2\Big|_{v_0}^{v(x)} = \frac{1}{2}mv(x)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

trabalho realizado até o banco parar:

$$\boxed{W = -\frac{1}{2}mv_0^2}$$

2. Considere uma partícula de massa m movendo-se em uma dimensão sujeita ao potencial $V(x) = \frac{V_0}{4a^3}x(x-3a)^2$, onde (V_0, a) são constantes positivas e $-\infty < x < \infty$.

(a) Determine o(s) ponto(s) de equilíbrio da partícula, classifique-o(s) e esboce um gráfico qualitativo do potencial $V(x)$.

(b) Calcule a frequência ω de pequenas oscilações em torno do ponto de equilíbrio estável, justificando a fórmula empregada.

(c) Qual é a velocidade máxima $v_{\max}$ que a partícula pode ter ao passar pelo ponto de equilíbrio estável para que seu movimento mantenha-se confinado?

a) $V(x) = \frac{V_0}{4a^3} x (x-3a)^2$

Pontos de equilíbrio: $F = -\frac{dV}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = \frac{V_0}{4a^3}\left[(x-3a)^2 + 2x(x-3a)\right] = 0 \Rightarrow (x-3a)^2 + 2x(x-3a) = 0$

$\Rightarrow (x-3a)(x-3a+2x) = 0 \Rightarrow 3(x-3a)(x-a) = 0$

Raízes: (i) $x = a$
(ii) $x = 3a$

Para determinarmos se são pontos de equilíbrio estável ou instável, calculamos a concavidade do potencial $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)$.

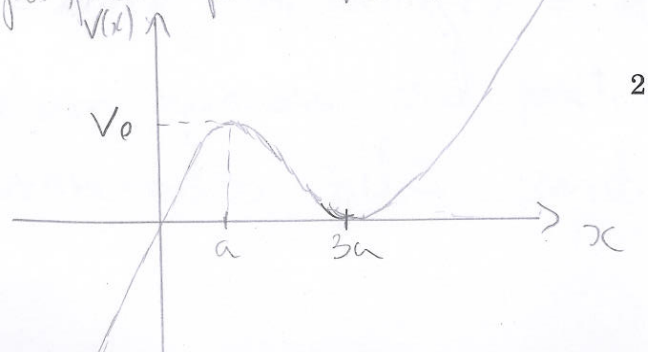
$\frac{dV}{dx} = \frac{3V_0}{4a^3}(x-3a)(x-a) \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{3V_0}{4a^3}\left[(x-a) + (x-3a)\right]$

Para (i) $x = a$, temos $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=a} = -\frac{3V_0}{2a^2} < 0$ (Equilíbrio instável)

Para (ii) $x = 3a$, temos $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=3a} = \frac{3}{2}\frac{V_0}{a^2} > 0$ (Equilíbrio estável)

Note também que $V(x=a) = V_0$; $V(x=3a) = 0$ e $V(x=0) = 0$.

Considerando todos os resultados acima, podemos esboçar um gráfico para $V(x)$:



b) Fazemos uma expansão em Taylor de $V(x)$ em torno do ponto de equilíbrio estável $x = 3a$

$$V(x) = V(x=3a) + \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=3a}(x-3a) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=3a}(x-3a)^2 + \dots$$

Utilizando os resultados de (a), temos:

$$V(x) = 0 + 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{V_0}{a^2}(x-3a)^2 + \dots$$

$$\simeq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{V_0}{a^2}\right)(x-3a)^2 = \frac{1}{2}k(x-3a)^2, \text{ onde } k \equiv \frac{3}{2}\frac{V_0}{a^2}$$

Para vermos o significado desta expansão mais claramente, podemos deslocar a origem do sistema de coordenadas, definindo $x' \equiv x - 3a$. Assim, da 2ª lei de Newton

$$F = -\frac{dV}{dx} = -kx' = m\frac{d^2x'}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{k}{m}x' = 0.$$

Esta é a equação de movimento de oscilador harmônico, que admite solução do tipo $x' = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$, onde a frequência angular é dada por $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{3V_0}{2ma^2}}$

c) Analisando o gráfico para $V(x)$ feito em (a), vemos que a partícula ficará confinada se $E < V_0$. Ao passar pelo ponto de equilíbrio, temos que $V(x=0) = 0$, e $E = \frac{1}{2}mv_{MAX}^2$. Portanto, a condição para existir confinamento é:

$$\frac{1}{2}mv^2(x=0) < V_0 \Rightarrow v_{MAX} = \sqrt{\frac{2V_0}{m}}$$

3. Considere um oscilador harmônico unidimensional de massa m e constante elástica k na presença de força viscosa $-b\dot{x}$ e uma força externa imposta $F(t)$.

(a) A partir da segunda lei de Newton e definindo os parâmetros $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\gamma \equiv \frac{b}{2m}$, obtenha a equação diferencial ordinária satisfeita por $x(t)$. Utilizando o *Ansatz* $x(t) = e^{pt}$, obtenha os valores de p associados à solução da equação homogênea.

(b) A partir dos valores de p encontrados no item (a), obtenha a solução geral $x(t)$ da equação homogênea para o caso $\omega_0 > \gamma$.

(c) Encontre a solução geral do problema para o caso $\omega_0 > \gamma$ na presença de uma força externa cossenoidal $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \psi)$, onde (F_0, ω, ψ) são constantes.

(a) $F = -kx - b\dot{x} + F(t) = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = F(t) \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$

Para a eq. homogênea, procuramos soluções do tipo $x = e^{pt}$; $\dot{x} = p e^{pt}$; $\ddot{x} = p^2 e^{pt}$

$\Rightarrow p^2 e^{pt} + 2\gamma p e^{pt} + \omega_0^2 e^{pt} = 0 \Rightarrow p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0$

$$p = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

(b) Para o caso $\gamma < \omega_0$, definimos $\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, portanto as soluções de (a) são $p_1 = -\gamma + i\omega_1$ e $p_2 = -\gamma - i\omega_1$. Assim:

$x_1(t) = e^{-\gamma t} e^{i\omega_1 t}$

$x_2(t) = e^{-\gamma t} e^{-i\omega_1 t}$

e a solução geral da homogênea será

$x_H(t) = A x_1(t) + B x_2(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t}\right]$

Como $x_H(t)$ é real, então $x_H^* = x_H \Rightarrow e^{-\gamma t}\left[A^* e^{-i\omega_1 t} + B^* e^{i\omega_1 t}\right] = e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1 t}\right]$

$\Rightarrow B = A^*$. Qualquer número complexo pode ser colocado na forma $A = |A| e^{i\varphi} = |A|\cos\varphi + i|A|\sin\varphi$. Assim:

$x_H(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega_1 t} + A^* e^{-i\omega_1 t}\right] = |A| e^{-\gamma t}\left[e^{i(\omega_1 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_1 t + \varphi)}\right]$

$= 2|A| e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi) = A' e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi)$, onde

A' é um número real positivo e $0 \leq \varphi < 2\pi$, ambos determinados pelas condições iniciais

(c) Precisamos encontrar uma solução particular para a equação diferencial

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = F_0\cos(\omega t+\psi) = \mathrm{Re}\{F_0 e^{i\psi} e^{i\omega t}\} = \mathrm{Re}\{F_0' e^{i\omega t}\}$$

onde $F_0' \equiv F_0 e^{i\psi}$

Para isso, basta encontrar uma solução complexa para a equação:

$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = F_0' e^{i\omega t}$, e depois tomar apenas a parte real da solução. Propomos uma solução do tipo $x_p = De^{i\omega t}$

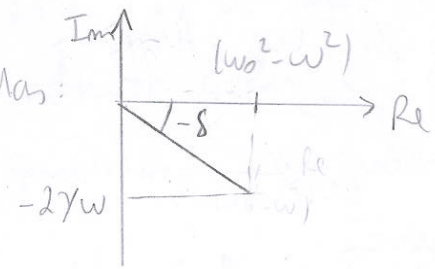
$\Rightarrow \dot{x}_p = i\omega De^{i\omega t}$; $\ddot{x}_p = -\omega^2 De^{i\omega t}$. Portanto ficamos com

$$-\omega^2 D\cancel{e^{i\omega t}} + 2i\gamma\omega D\cancel{e^{i\omega t}} + \omega_0^2 D\cancel{e^{i\omega t}} = F_0'\cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{F_0'}{(\omega_0^2-\omega^2)+2i\gamma\omega} = \frac{F_0'}{(\omega_0^2-\omega^2)+2i\gamma\omega}\cdot\frac{(\omega_0^2-\omega^2)-2i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)-2i\gamma\omega}$$

$$= \frac{F_0'\cdot[(\omega_0^2-\omega^2)-2i\gamma\omega]}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}$$

Mas:



$$(\omega_0^2-\omega^2)-2i\gamma\omega = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\; e^{-i\delta},$$

onde $\mathrm{tg}\,\delta = \dfrac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}$ //

Portanto $D = \dfrac{F_0'}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\cdot\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\; e^{-i\delta}$

$$= \frac{F_0' e^{-i\delta}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} = \frac{F_0 e^{i(\psi-\delta)}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

Portanto

$$x_p(t) = \mathrm{Re}\{De^{i\omega t}\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{F_0 e^{i(\omega t+\psi-\delta)}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\gamma^2}}\right\}$$

$$x_p = \frac{F_0\cos(\omega t+\psi-\delta)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}.$$ A solução geral será

$$x(t) = x_H + x_p = A' e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\varphi) + \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t+\psi-\delta)$$ //