Instituto de Física *'Gleb Wataghin'*, Unicamp
F-315 (Mecânica Geral I), 2ª prova, 16/05/2019
RA: , Nome: GABARITO

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	P_2

Atenção: Não é permitido nenhum tipo de consulta, em particular, o uso de calculadoras, celulares ou qualquer outro equipamento eletrônico. Não será permitida a saída da sala após o início da prova, por exemplo, para ir ao banheiro. O tempo mínimo de permanência na sala após o início da prova é de 30 min.

A prova contém quatro questões, onde ***somente três questões serão corrigidas. As questões 2 e 3 são obrigatórias.*** A questão remanescente deve ser ***escolhida entre as questões 1 e 4.***

Formulário

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}', \quad I_z = \int (x'^2+y'^2)\rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}', \quad I_z^O = I_z^C + MR^2, \quad I_z^O = I_x^O + I_y^O, \quad \boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p},$$

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}, \quad \dot{L}_z = I_z\ddot{\theta} = \tau_z, \quad E = \tfrac{1}{2}I_z\dot{\theta}^2 + U(\boldsymbol{r}), \quad \Phi(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}', \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) =$$

$$-G\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}', \quad \oint_{S=\partial V} \boldsymbol{g}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}'\,\mathrm{d}S' = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = -4\pi G\int_V \rho(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}', \quad \nabla^2\Phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{r}),$$

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\nabla^2\psi \equiv \nabla\cdot\nabla\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$

1. ***Questão para escolher (3 pontos):*** Um astronauta de massa m_0 (incluindo a massa do seu traje espacial) encontra-se em repouso na origem do sistema de coordenadas no espaço livre, ou seja, no vácuo e na ausência de campos gravitacionais. Adicionalmente, ele carrega consigo duas pedras, ambas de massa m, não incluídas na massa m_0 definida acima.

a) O astronauta precisa se movimentar no espaço livre. Para isso, ele arremessa uma das pedras. Qual é a velocidade v_1 adquirida pela primeira pedra em termos da velocidade v_a adquirida pelo astronauta? Qual das duas velocidades possui maior módulo? Como o astronauta pode controlar o valor de sua velocidade adquirida v_a?

b) Após ter atingido o seu destino planejado, o astronauta deseja cessar seu movimento, arremessando para tanto a segunda pedra. Expresse a velocidade v_2 adquirida pela segunda pedra em termos da velocidade v_1 adquirida pela primeira pedra, ambas medidas no *sistema de referência fixo.*

c) Mostre que a velocidade v_2' adquirida pela segunda pedra no *sistema de referência do astronauta* imediatamente antes do seu arremesso satisfaz $|v_2'| < |v_1|$. Justifique sucintamente a plausibilidade deste resultado.

a) $p_{ANTES} = 0$

$p_{DEPOIS} = p_{ANTES} = 0 \Rightarrow m v_1 + (m_0 + m) v_a = 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{(m_0+m)}{m} v_a$

$\Rightarrow v_1 = -\left(1 + \frac{m_0}{m}\right) v_a \Rightarrow |v_1| = \left(1 + \frac{m_0}{m}\right)|v_a| > |v_a|$

Portanto a pedra possui maior módulo da velocidade que o astronauta.

O astronauta pode controlar sua velocidade escolhendo a velocidade da pedra v_1, aplicando diferentes impulsos.

b) Neste caso aplicamos o teorema da conservação do momento linear para o conjunto astronauta + 2ª pedra.

$p_{ANTES} = (m_0 + m) v_a = -m v_1$

$p_{DEPOIS} = m v_2$

$\Rightarrow m v_2 = -m v_1 \Rightarrow v_2 = -v_1$

c) $v_2' = v_2 - v_a = -v_1 + \frac{m}{m_0+m} v_1 = -\left(1 - \frac{m}{m_0+m}\right) v_1 = -\frac{m_0}{m_0+m} v_1$

Portanto $|v_2'| = \left(\frac{m_0}{m_0+m}\right)|v_1| \Rightarrow |v_2'| < |v_1|$.

Ao atirar a segunda pedra, o astronauta já está mais leve que ao atirar a primeira, portanto precisa transferir menos momento para alcançar a mesma variação no módulo da velocidade

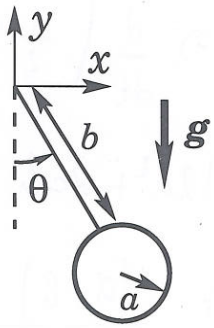
2. ***(4 pontos):*** Um pêndulo físico, conforme mostra a figura abaixo, é formado por uma haste rígida de comprimento b e massa desprezível e um aro circular homogêneo de massa m e raio a na presença do campo gravitacional $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{y}}$. O pêndulo pode oscilar no plano xy ($z = 0$) em torno do eixo z que passa pela origem do sistema de coordenadas.

a) Qual é a distância entre o centro de massa do pêndulo e a origem do sistema de coordenadas? Justifique sucintamente, sem calcular integrais!

b) Encontre o momento de inércia do pêndulo em questão em relação ao eixo z que passa pela origem do sistema de coordenadas.

c) Utilizando o torque da força gravitacional ou conservação de energia, encontre a equação de movimento (equação diferencial) para o ângulo $\theta(t)$ formado entre a haste e o eixo y, sem efetuar a aproximação de pequenas oscilações, $\theta(t) \ll 1$. Não é necessário resolvê-la!

d) Determine a frequência angular de oscilação ω_0 para o caso de pequenas oscilações, $\theta(t) \ll 1$, escrevendo também a sua solução geral.



a) Como a haste tem massa desprezível, o centro de massa estará no centro do aro, a uma distância $a+b$ da origem.

b) Em relação ao eixo paralelo passando pelo C.M., temos

$$I^z_{C.M} = \sum_i m_i r_i^2 = a^2 \sum_i m_i = ma^2.$$

Portanto, em relação ao eixo z passando pela origem, invocamos o teorema dos eixos paralelos:

$$I^z_0 = I^z_{CM} + m(b+a)^2 = ma^2 + m(a+b)^2 = m(2a^2 + 2ab + b^2)$$

c) O torque gravitacional é dado por $\vec{\tau} = \vec{R} \times (m\vec{g})$, onde $\vec{R}$ é o vetor que liga a origem ao centro de massa. Portanto $\vec{\tau} = -(a+b) \cdot mg \sin\theta \, \hat{z}$. Já o momento angular em torno do eixo z passando pela origem será $L_z = I^z_0 \cdot \dot{\theta} = m(2a^2 + 2ab + b^2)\dot{\theta}$

Mas $\tau_z = \frac{dL_z}{dt} \Rightarrow -(a+b) mg \sin\theta = m(2a^2 + 2ab + b^2)\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(a+b)}{2a^2 + 2ab + b^2} g \sin\theta = 0$$

Poderíamos chegar ao mesmo resultado por construção de energia. Temos que

$$V = -mg(a+b)\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m (2a^2 + 2ab + b^2)\dot{\theta}^2$$

$$E = T + V = cte$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m (2a^2 + 2ab + b^2)\dot{\theta}^2 - mg(a+b)\cos\theta\right] = 0$$

$$\Rightarrow m(2a^2 + 2ab + b^2)\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + mg(a+b)\sin\theta\,\cancel{\dot{\theta}} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(a+b)g}{2a^2 + 2ab + b^2}\sin\theta = 0$$

d) No caso de pequenas oscilações, $\sin\theta \simeq \theta$, portanto

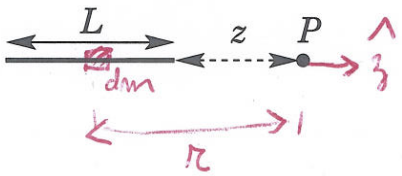
$$\ddot{\theta} + \frac{(a+b)g}{2a^2 + 2ab + b^2}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

onde $\omega_0^2 = \dfrac{(a+b)g}{2a^2 + 2ab + b^2} \Rightarrow \omega_0 = \left[\dfrac{(a+b)g}{2a^2 + 2ab + b^2}\right]^{1/2}$ //

Trata-se de uma equação diferencial correspondente ao oscilador harmônico, com solução geral

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \left(\text{ou } \theta(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\right)$$

3. ***(3 pontos):*** Calcule o potencial gravitacional $\Phi(z)$ e o campo gravitacional $\boldsymbol{g}(z)$ associado no ponto P, devido a uma barra fina de densidade linear homogênea, comprimento L e massa M, cuja extremidade mais próxima está localizada a uma distância z do ponto P, ao longo da direção do eixo da barra, conforme representado na figura ao lado.



$$d\Phi = -\frac{G\,dm}{r} = -G\lambda\frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \int_{r=z}^{z+L} -G\lambda\frac{dr}{r} = -G\lambda \ln r \Big|_{z}^{z+L} = -G\lambda\left(\ln(z+L) - \ln z\right)$$

$$\Rightarrow \Phi = -G\lambda \ln\left(\frac{z+L}{z}\right) \qquad \text{Mas } M = \lambda L \Rightarrow \lambda = M/L$$

$$\Rightarrow \Phi(z) = -\frac{GM}{L}\ln\left(\frac{z+L}{z}\right)$$

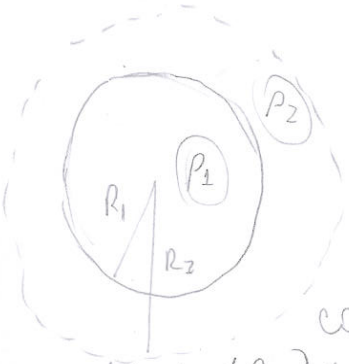
$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{GM}{L}\left(\frac{1}{z+L} - \frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{L}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+L}\right)\hat{z} = -\frac{GM}{L}\left(\frac{L}{z(z+L)}\right)\hat{z} = -\frac{GM}{z(z+L)}\hat{z}$$

//

4. ***Questão para escolher (3 pontos):*** Um planeta esférico com um núcleo de raio R_1 e densidade uniforme ρ_1 é envolto por uma densa nuvem de poeira (camada esférica concêntrica de raio interno R_1 e raio externo R_2) com densidade uniforme ρ_2. Obtenha a força gravitacional $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ exercida sobre uma partícula de massa m que se encontra a uma distância r do centro do planeta: (i) no interior da nuvem de poeira ($R_1 \leq r \leq R_2$); (ii) acima da nuvem de poeira ($r > R_2$). Dica: não é necessário o cálculo explícito de qualquer integral!



Para distribuição de massa com simetria esférica, o campo gravitacional é equivalente ao gerado se toda a massa com $r' < r$ estivesse contida no centro. Ou seja

CASO 1: $(R_1 \leq r \leq R_2)$:

$$\vec{g} = -\frac{G}{r^2} M_{DENTRO}\, \hat{r}$$

$$= -\frac{G}{r^2}\left[\rho_1 \cdot \frac{4\pi R_1^3}{3} + \rho_2\left(\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi R_1^3}{3}\right)\right]\hat{r}$$

$$= -\frac{4\pi G}{3r^2}\left[(\rho_1-\rho_2)R_1^3 + \rho_2 r^3\right]\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{g} = -\frac{4\pi G m}{3}\left[(\rho_1-\rho_2)\frac{R_1^3}{r^2} + \rho_2 r\right]\hat{r}$$

CASO 2: $(r > R_2)$

$$\vec{g} = -\frac{G}{r^2} M_{DENTRO}\, \hat{r} = -\frac{G}{r^2}\left[\rho_1 \frac{4}{3}\pi R_1^3 + \rho_2\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right)\right]\hat{r}$$

$$= -\frac{4\pi G}{3r^2}\left[(\rho_1-\rho_2)R_1^3 + \rho_2 R_2^3\right]\hat{r}$$