

RA: _____ Nome: GABARITO Turma: _____ Nota: _____

Sabendo-se que a solução do oscilador harmônico sub-amortecido não forçado é:
 $x(t) = e^{-\gamma t} [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)]$

encontre $x(t)$ para um oscilador harmônico sub-amortecido inicialmente em repouso e em sua posição de equilíbrio quando submetido a uma força dada por:

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ at & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = at \quad (t > 0)$$

A eq. homogênea $\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$ tem solução

$$x_h(t) = e^{-\gamma t} [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)] \quad (\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2)$$

Buscamos uma solução particular para

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = at$$

Proponemos uma solução linear $x_p(t) = Ct + D$ tal que
 $\dot{x}_p(t) = C$ e $\ddot{x}_p(t) = 0$. Assim:

$$2\gamma C + \omega_0^2 (Ct + D) = at \Rightarrow \begin{cases} C\omega_0^2 = \alpha \Rightarrow C = \alpha/\omega_0^2 // \\ 2\gamma C + \omega_0^2 D = 0 \Rightarrow D = -\frac{2\gamma C}{\omega_0^2} \Rightarrow D = -\frac{2\gamma \alpha}{\omega_0^4} \end{cases}$$

$$\text{Portanto } x_p(t) = \frac{\alpha}{\omega_0^2} t - \frac{2\gamma\alpha}{\omega_0^4}$$

é a solução geral real

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = e^{-\gamma t} [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)] + \frac{\alpha}{\omega_0^2} t - \frac{2\gamma\alpha}{\omega_0^4}$$

Portanto

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t} [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)] + \omega_1 e^{-\gamma t} [-A \sin(\omega_1 t) + B \cos(\omega_1 t)] + \frac{\alpha}{\omega_0^2}$$

As condições iniciais são:

$$x(t=0) = 0 \Rightarrow A - 2\gamma\alpha/\omega_0^4 = 0 \Rightarrow A = 2\gamma\alpha/\omega_0^4$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow -\gamma A + \omega_1 B + \frac{\alpha}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{\omega_1} \left[\frac{2\gamma^2\alpha}{\omega_0^4} + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \right] = -\frac{\alpha}{\omega_1 \omega_0^2} \left[1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2} \right]$$

Assim, ficam com:

$$- x(t) = 0 \quad \text{p/ } t \leq 0$$

$$- x(t) = e^{-\gamma t} \left[\frac{2\gamma a}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega_0^2(1-2\gamma^2)}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t) \right] + \frac{\alpha t}{\omega_0^2} - \frac{2\gamma \alpha}{\omega_0^2}$$

p/t > 0

$$(0 < t) \quad \dot{x}_0 = \underline{\dot{x}} = \underline{x}'_0 u + \underline{x}''_0 v + \underline{x}'''_0$$

Então tem $\dot{x} = \underline{x}'_0 u + \underline{x}''_0 v + \underline{x}'''_0$ solução p/ A:

$$\underline{x}'_0 (\dot{x} - \omega^2 u) = [(\omega_0 u) \omega_0 \dot{u} + (\dot{\omega}_0 u) \omega_0 u] \dot{x} = (\dot{\omega}_0 u) \dot{x}$$

ou seja, é solução da equação

$$\dot{x} = \underline{x}'_0 u + \underline{x}''_0 v + \underline{x}'''_0$$

explicando que $\underline{x}'_0 = (0)$ é uma solução trivial.

$$\underline{x}''_0 (\dot{x} - \omega^2 u) = \underline{x}''_0 \dot{x} = \underline{x}''_0 \dot{x} = (\dot{\omega}_0 u) \dot{x} = (\dot{\omega}_0 u) \dot{x}$$

$$\underline{x}''_0 = \frac{\dot{x} - \dot{x}''_0 u}{\dot{x}}$$

$$\frac{\dot{x} - \dot{x}''_0 u}{\dot{x}} = \frac{(\dot{\omega}_0 u) \dot{x}}{\dot{x}} = \dot{\omega}_0 u$$

que é função constante em J.

$$\frac{\dot{x} - \dot{x}''_0 u}{\dot{x}} + [(\dot{\omega}_0 u) \omega_0 \dot{u} + (\dot{\omega}_0 u) \omega_0 u] \dot{x} = (\dot{\omega}_0 u) \dot{x} = (\dot{\omega}_0 u) \dot{x}$$

$$\dot{x} + [(\dot{\omega}_0 u) \omega_0 \dot{u} + (\dot{\omega}_0 u) \omega_0 u] \dot{x} = (\dot{\omega}_0 u) \dot{x} + [(\dot{\omega}_0 u) \omega_0 \dot{u} + (\dot{\omega}_0 u) \omega_0 u] \dot{x} = (\dot{\omega}_0 u) \dot{x}$$

$$\dot{x} + \left[\frac{\dot{\omega}_0 u}{\omega_0} \dot{x} + \left[\frac{\dot{\omega}_0 u}{\omega_0} \dot{x} + \frac{\dot{\omega}_0 u}{\omega_0} \dot{x} \right] \frac{1}{\omega_0} \right] \dot{x} = \dot{x} + \left[\frac{\dot{\omega}_0 u}{\omega_0} \dot{x} + \frac{\dot{\omega}_0 u}{\omega_0} \dot{x} + \frac{\dot{\omega}_0 u}{\omega_0} \dot{x} \right] \dot{x} = \dot{x} + (\dot{\omega}_0 u) \dot{x}$$