INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" – UNICAMP
Teste 2 - F 315, 02/05/2019

RA:_____ Nome: GABARITO Turma: ____ Nota:_____

Sabendo-se que a solução do oscilador harmônico sub-amortecido não forçado é: $x(t) = e^{-\gamma t}[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)]$
encontre $x(t)$ para um oscilador harmônico sub-amortecido inicialmente em repouso e em sua posição de equilíbrio quando submetido a uma força dada por:

$$\frac{F(t)}{m} = \begin{cases} 0 & ; para\ t \leq 0 \\ \alpha t & ; para\ t > 0 \end{cases}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} = \alpha t \qquad (t > 0)$$

A eq. homogênea $\ddot{x}_H + 2\gamma\dot{x}_H + \omega_0^2 x_H = 0$ tem solução

$$x_H(t) = e^{-\gamma t}[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)] \qquad (\omega_1^2 \equiv \omega_0^2 - \gamma^2)$$

Buscamos uma solução particular para

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \alpha t$$

Propomos uma solução linear $x_p(t) = Ct + D$ tal que $\dot{x}_p(t) = C$ e $\ddot{x}_p(t) = 0$. Assim:

$$2\gamma C + \omega_0^2(Ct + D) = \alpha t \Rightarrow \begin{cases} C\omega_0^2 = \alpha \Rightarrow C = \alpha/\omega_0^2 \\ 2\gamma C + \omega_0^2 D = 0 \Rightarrow D = -\frac{2\gamma}{\omega_0^2}C = -\frac{2\gamma\alpha}{\omega_0^4} \end{cases}$$

Portanto $x_p(t) = \frac{\alpha}{\omega_0^2}t - \frac{2\gamma\alpha}{\omega_0^4}$

E a solução geral será

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t) = e^{-\gamma t}[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)] + \frac{\alpha t}{\omega_0^2} - \frac{2\gamma\alpha}{\omega_0^4}$$

Portanto

$$\dot{x}(t) = -\gamma e^{-\gamma t}[A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)] + \omega_1 e^{-\gamma t}[-A\sin(\omega_1 t) + B\cos(\omega_1 t)] + \frac{\alpha}{\omega_0^2}$$

As condições iniciais são:

$$x(t=0) = 0 \Rightarrow A - 2\gamma\alpha/\omega_0^4 = 0 \Rightarrow A = 2\gamma\alpha/\omega_0^4$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow -\gamma A + \omega_1 B + \frac{\alpha}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{\omega_1}\left[\frac{2\gamma^2\alpha}{\omega_0^4} - \frac{\alpha}{\omega_0^2}\right] = -\frac{\alpha}{\omega_1\omega_0^2}\left[1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}\right]$$

Assim, ficamos com:

- $x(t) = 0 \quad p/ \; t \leq 0$
- $x(t) = e^{-\gamma t}\left[\frac{2\gamma\alpha}{\omega_0^4}\cos(\omega_1 t) - \frac{\alpha}{\omega_1\omega_0^2}\left(1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}\right)\sin(\omega_1 t)\right] + \frac{\alpha t}{\omega_0^2} - \frac{2\gamma\alpha}{\omega_0^4}$

$p/ \; t > 0$