Instituto de Física *'Gleb Wataghin'*, Unicamp
F-315 (Mecânica Geral I), 3ª prova, 27/06/2019
RA: , Nome: GABARITO

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	P_3

Atenção: Não é permitido nenhum tipo de consulta, em particular, o uso de calculadoras, celulares ou qualquer outro equipamento eletrônico. Não será permitida a saída da sala após o início da prova, por exemplo, para ir ao banheiro. O tempo mínimo de permanência na sala após o início da prova é de 30 min.

A prova contém quatro questões, onde ***somente três questões serão corrigidas. As questões 3 e 4 são obrigatórias.*** A questão remanescente deve ser ***escolhida entre as questões 1 e 2.***

Formulário

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f-y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'_j}\right)+\sum_k \lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial y_j}=0,\quad g_k=g_k(\{y_j\};x)=0,\quad \cosh x\equiv\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}),\quad \operatorname{senh}x\equiv\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}),\quad \operatorname{tgh}x\equiv\frac{\operatorname{senh}x}{\cosh x},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x\pm1}=\frac{1}{2\sqrt{x\pm1}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arccosh}x=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsenh}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcsen}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots,\quad \operatorname{sen}x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots,$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{x}\hat{\boldsymbol{x}}+\dot{y}\hat{\boldsymbol{y}}+\dot{z}\hat{\boldsymbol{z}}=\dot{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\dot{z}\hat{\boldsymbol{z}}=\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}+r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\operatorname{sen}\theta\,\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}},\quad \boldsymbol{F}=-\nabla V(\boldsymbol{r}),$$

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=T-V,\quad p_k\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k},\quad \dot{p}_k=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}=\frac{\partial T}{\partial q_k}+Q_k,\quad Q_k\equiv-\frac{\partial V}{\partial q_k}=\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_k},\quad \dot{p}_k=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}+Q_k^*,$$

$$Q_k^*\equiv\sum_i\lambda_i\frac{\partial f_i(\{q_j\})}{\partial q_k},\quad \mathscr{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\equiv-\mathscr{L}+\sum_k p_k\dot{q}_k,\quad \dot{p}_k=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_k},\quad \dot{q}_k=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_k}.$$

1. ***Questão para escolher (3 pontos):*** Considere um vidro com índice de refração variável dado por $n = n(y)$, onde $n(y) \equiv \frac{c}{v(y)}$, sendo c a velocidade da luz no vácuo e $v(y)$ a velocidade da luz neste meio.

a) Usando o *Princípio de Fermat* e o cálculo variacional, encontre o funcional que descreve a minimização do tempo para a trajetória da luz entre dois pontos genéricos $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ no plano xy em termos de $n(y)$.

b) Encontre a equação diferencial $\frac{dy}{dx}$ para a trajetória da luz $y(x)$ neste meio escrevendo seu resultado em termos de $n = n(y)$ e constantes. Dica: use a 2ª forma da equação de Euler–Lagrange.

c) Supondo que $n(y) = \sqrt{y/a} > 1$, onde $a > 0$ representa um comprimento característico, encontre uma *expressão geral* para $y(x)$ em termos de duas constantes de integração.

a) $dt = \frac{ds}{v(\vec{r})} \Rightarrow T = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{ds}{v(\vec{r})}$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$v(\vec{r}) = \frac{c}{n(y)} = v(y)$

Portanto $T = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{c}\, n(y)\, dx$ é o funcional

que deve ser minimizado.

b) Pela equação de Euler (2ª forma)

$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$, onde $f(x; y, y') = n(y)\sqrt{1+y'^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y'} = n(y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

$\Rightarrow 0 - \frac{d}{dx}\left(n(y)\sqrt{1+y'^2} - n(y)\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$

$\Rightarrow n(y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - n(y)\frac{(dy/dx)^2}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = cte = C_1$

Multiplicando os dois lados por $\sqrt{1+(dy/dx)^2}$, temos:

$$m(y)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - \cancel{m(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = c_1\sqrt{1+(dy/dx)^2}$$

$$\Rightarrow m(y) = c_1\sqrt{1+(dy/dx)^2} \Rightarrow m^2(y) = c_1^2\left[1+(dy/dx)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{m^2(y)}{c_1^2} + 1 = 0$$

c). Se $m(y) = \sqrt{y/a}$, então:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{ac_1^2} + 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1 + c_2 y, \text{ onde } c_2 \equiv \frac{1}{ac_1^2}$$

$(c_2 > 0)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_2 y - 1} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{c_2 y - 1}} = \pm\int dx$$

$$u = c_2 y \Rightarrow du = c_2\, dy$$

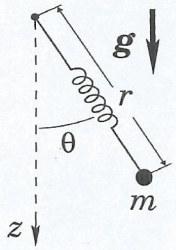
$$\Rightarrow \frac{1}{c_2}\int \frac{du}{\sqrt{u-1}} = \pm x \Rightarrow \frac{2}{c_2}\sqrt{u-1} = \pm x + C_3$$

$$\Rightarrow \frac{2}{c_2}\sqrt{c_2 y - 1} = \pm x + C_3 \Rightarrow \sqrt{c_2 y - 1} = \pm\frac{c_2 x}{2} + \frac{c_2 C_3}{2}$$

$$\Rightarrow c_2 y - 1 = \left(\frac{c_2 C_3}{2} \pm \frac{c_2 x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{c_2} + c_2\left(\frac{C_3}{2} \pm \frac{x}{2}\right)^2$$

onde c_2 e c_3 são constantes de integração

2. ***Questão para escolher (3 pontos):*** Um pêndulo é composto de uma mola de massa desprezível, constante de mola k e comprimento de repouso b, presa a uma massa m numa de suas extremidades. A outra extremidade é presa à origem e a mola mantém-se reta (p.ex., enrolando-a em torno de uma haste rígida sem massa). O sistema encontra-se sob a ação de um campo gravitacional uniforme $\boldsymbol{g} = g\hat{\boldsymbol{z}}$ e seu movimento é confinado a um plano.



a) Obtenha a lagrangiana $\mathscr{L}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})$ do sistema.

b) Obtenha as equações de Euler–Lagrange associadas à lagrangiana do item a.

c) Determine as coordenadas de equilíbrio $(\bar{r},\bar{\theta})$ e obtenha as frequências de pequenas oscilações em torno delas. Dica: expanda as equações de movimento igualando derivadas temporais de segunda ordem com contribuições lineares nos deslocamentos.

a) $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

$U = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-b)^2$

$$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-b)^2}$$

b) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-b)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = 0 \Rightarrow mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-b) - m\ddot{r} = 0$

$\Rightarrow \ddot{r} + \frac{k}{m}(r-b) - r\dot{\theta}^2 - g\cos\theta = 0$ (I)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow -\cancel{m}gr\sin\theta - 2\cancel{m}r\dot{r}\dot{\theta} - \cancel{m}r^2\ddot{\theta} = 0$

$\Rightarrow r^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + 2\cancel{r}\dot{r}\dot{\theta} + g\cancel{r}\sin\theta = 0 \Rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0$ (II)

(c) No equilíbrio, todas as derivadas temporais se anulam. Portanto:

de (I): $\frac{k}{m}(\bar{r}-b) - g\cos\bar{\theta} = 0$

de (II): $g\sin\bar{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\theta} = 0 \\ \bar{r} = b + \frac{mg}{k} \end{cases}$$

Próximo do equilíbrio, temos, de (I)

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}(r-b) + g \simeq 0 \Rightarrow \ddot{r} + \frac{k}{m}\left(r - b + \frac{mg}{k}\right) \simeq 0$$

$$\Rightarrow \ddot{r} + \frac{k}{m}(r-\bar{r}) = 0$$

Definindo $u \equiv r - \bar{r} \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{r}$, então teremos

$\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$. Esta é a eq. do oscilador harmônico,

com $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$

Próximo do equilíbrio, temos, de (II):

$$\bar{r}\ddot{\theta} + g\sin\theta \simeq 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\bar{r}}\sin\theta \simeq 0$$

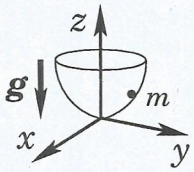
Para pequenas oscilações, $\sin\theta \simeq \theta$, e portanto:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\bar{r}}\theta \simeq 0$$

Esta é a eq. do oscilador harmônico, com

$$\omega_0' = \sqrt{g/\bar{r}} = \sqrt{g/(b + mg/k)}$$

3. *(4 pontos):* Uma partícula puntiforme de massa m sob a ação de um campo gravitacional uniforme $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$ se move sem atrito na superfície interna do paraboloide descrito pela superfície $x^2 + y^2 = 2bz$, onde $b > 0$ é um comprimento característico.



a) Utilizando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), obtenha a lagrangiana $\mathscr{L}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}})$ do sistema e a equação de vínculo.

b) Obtenha as equações de Euler–Lagrange na presença do vínculo, isto é, incluindo os termos com os multiplicadores de Lagrange. Discuta a conservação dos momentos generalizados (p_ρ, p_φ, p_z).

c) Mostre que a partícula pode se mover numa órbita circular horizontal no plano $z = h$, desde que ela possua uma velocidade angular $\dot{\varphi} \neq 0$. Nestas condições, obtenha $\dot{\varphi}$ em termos dos parâmetros fornecidos do problema.

d) Nas condições do item c de órbita circular horizontal, obtenha a força de reação normal atuando sobre a partícula, $\boldsymbol{N} = N_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + N_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + N_z \hat{\boldsymbol{z}}$, expressando-a em termos dos parâmetros fornecidos do problema.

a) $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$

$U = mgz$

$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - mgz$

Eq. de vínculo : $\rho^2 - 2bz = 0 = f(\rho, z)$

b) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow m\rho\dot{\varphi}^2 - m\ddot{\rho} + \lambda . 2\rho = 0$ (I)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow -mg - m\ddot{z} - \lambda . 2b = 0$ (II)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) + 0 = 0$ (III)

Segundo formulário:

$\dot{p}_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 + 2\lambda\rho \neq 0$ (p_ρ não se conserva)

$\dot{p}_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -mg - 2b\lambda \neq 0$ (p_z não se conserva)

$\dot{p}_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \lambda \partial f / \partial \varphi = 0 + 0 = 0$ (p_φ se conserva)

c) Queremos mostrar que uma órbita com $\rho =$ constante, $z =$ constante $= h$ é possível.

Neste caso $\ddot{z} = \ddot{\rho} = 0$, e as equações de movimento ficam:

$$(I)': m\rho\dot{\varphi}^2 + 2\rho\lambda = 0 \Rightarrow m\dot{\varphi}^2 + 2\lambda = 0$$

$$(II)': -mg - \lambda . 2b = 0 \Rightarrow \lambda = -mg/2b$$

$$(III)': m\rho^2\dot{\varphi} = cte \quad \text{(conservação do momento angular)}$$

Substituindo (II') em (I)', temos:

$$m\dot{\varphi}^2 - 2.\frac{mg}{2b} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = g/b \Rightarrow \dot{\varphi} = \pm\sqrt{g/b} = cte$$

d) As forças de vínculo são

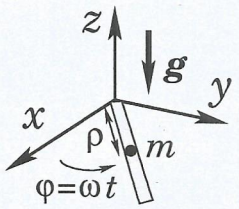
$$Q_\rho = \lambda\frac{\partial l}{\partial \rho} = -\frac{mg}{2b}.2\rho = -\frac{mg}{b}.\rho = -\frac{mg}{b}.\sqrt{2bh} = -mg\sqrt{\frac{2h}{b}}$$

$$Q_z = \lambda\frac{\partial l}{\partial z} = -\frac{mg}{2b}.(-2b) = mg$$

$$Q_\varphi = \lambda\frac{\partial l}{\partial \varphi} = 0$$

Portanto $\vec{N} = -mg\sqrt{\frac{2h}{b}}\,\hat{\rho} + mg\,\hat{z}$ //

4. ***(3 pontos + bônus 1 ponto):*** Uma partícula puntiforme de massa m se desloca, na presença de um campo gravitacional uniforme $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{z}}$, no interior de uma canaleta oca, lisa e de massa desprezível que gira em torno da origem no plano horizontal xy ($z = 0$) com velocidade angular $\dot{\varphi} = \omega$ constante, conforme mostra a figura ao lado.



a) Obtenha a lagrangiana $\mathscr{L}(\rho, \dot{\rho})$ e a equação de Euler–Lagrange associada.

b) Obtenha a hamiltoniana $\mathscr{H}(\rho, p_\rho)$ e as equações de Hamilton associadas. Verifique sua compatibilidade com as equações obtidas no item a.

c) Discuta a conservação (invariância temporal) das seguintes grandezas físicas neste sistema: p_ρ, $\mathscr{H}$, E, $\mathscr{L}$. Justifique através de argumentos gerais ou através de cálculos explícitos.

d)* Bônus: Se as condições iniciais são $\rho(t = 0) = \rho_0$ e $\dot{\rho}(t = 0) = \dot{\rho}_0 < 0$, demonstre que a partícula inverte o seu movimento radial no instante τ que satisfaz $\operatorname{tgh} \omega\tau = \frac{|\dot{\rho}_0|}{\omega\rho_0}$.

a) $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 w^2]$

$V = mgz = 0 = cte$

$\| \; \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 w^2] \; \|$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = m \rho w^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \end{array} \right.$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = 0$

$\Rightarrow m \rho w^2 - m \ddot{\rho} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\rho} - w^2 \rho = 0}$

b) $p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \Rightarrow \dot{\rho} = p_\rho / m$

$H = \dot{\rho} p_\rho - \mathcal{L} = \dot{\rho} p_\rho - \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 - \frac{1}{2} m w^2 \rho^2 = \frac{p_\rho^2}{m} - \frac{p_\rho^2}{2m} - \frac{1}{2} m w^2 \rho^2$

$\Rightarrow H = \frac{p_\rho^2}{2m} - \frac{1}{2} m w^2 \rho^2$

Eq. Hamilton: $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m} \\ \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = m w^2 \rho \end{array} \right.$

$\Rightarrow \cancel{m} \ddot{\rho} = \cancel{m} w^2 \rho \Rightarrow \boxed{\ddot{\rho} - w^2 \rho = 0}$

c) $\rightarrow \dot{p}_\rho = m\omega^2\rho \neq 0 \Rightarrow p_\rho$ não se conserva

$\rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ Hamiltoniano se conserva

$\rightarrow$ Canaleta realiza trabalho na partícula para manter $\varphi = \omega t$. $\Rightarrow$ Energia não se conserva

$\rightarrow L_0 = T - V = T = E$. Lagrangeano também não se conserva

d) $\ddot{\rho} = \omega^2\rho \Rightarrow \rho = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \Rightarrow \rho(t=0) = A + B = \rho_0$

$\dot{\rho} = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t} \Rightarrow \dot{\rho}(t=0) = \omega(A-B) = \dot{\rho}_0 < 0 \Rightarrow A - B = \dot{\rho}_0/\omega$

Assim, obtemos: $A = \frac{1}{2}(\rho_0 + \dot{\rho}_0/\omega)$

$B = \frac{1}{2}(\rho_0 - \dot{\rho}_0/\omega)$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{2}(\rho_0 + \dot{\rho}_0/\omega)e^{\omega t} + \frac{1}{2}(\rho_0 - \dot{\rho}_0/\omega)e^{-\omega t}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_0\omega + \dot{\rho}_0)e^{\omega t} + \frac{1}{2}(-\rho_0\omega + \dot{\rho}_0)e^{-\omega t}$$

Inversão do movimento: $\dot{\rho}(\tau) = 0$

$$\Rightarrow \dot{\rho}(\tau) = \frac{1}{2}(\rho_0\omega + \dot{\rho}_0)e^{\omega\tau} + \frac{1}{2}(-\rho_0\omega + \dot{\rho}_0)e^{-\omega\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho_0\omega\left[e^{\omega\tau} - e^{-\omega\tau}\right] + \frac{1}{2}\dot{\rho}_0\left[e^{\omega\tau} + e^{-\omega\tau}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\omega\tau} - e^{-\omega\tau}}{e^{\omega\tau} + e^{-\omega\tau}} = -\frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0\omega} \Rightarrow \operatorname{tgh}(\omega\tau) = \frac{-\dot{\rho}_0}{\rho_0\omega} = \frac{|\dot{\rho}_0|}{\rho_0\omega}$$