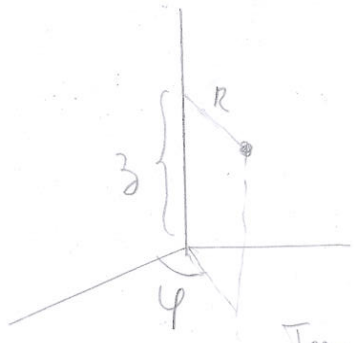
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN" – UNICAMP
Teste 3 - F 315 , 11/06/2019

RA:_____ Nome: GABARITO Nota:_____

Uma helicoide é uma curva definida na superfície de um cilindro onde a altura tem uma dependência linear com o ângulo azimutal. Use a equação de Euler-Lagrange e <u>mostre</u> que a geodésica sobre a superfície de um cilindro reto é o segmento de uma helicoide.

Dica: Equação de Euler-Lagrange na forma genérica: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$



Neste caso usamos coordenadas cilíndricas (R, z e φ), onde neste caso R é constante.

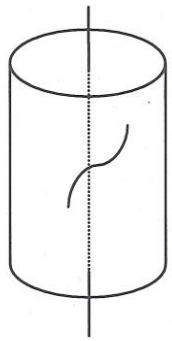


Figura ilustrativa.

Temos que $(ds)^2 = (dz)^2 + (R\,d\varphi)^2$

$$\Rightarrow S = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{(dz)^2 + (R\,d\varphi)^2} = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + R^2}\, d\varphi ,$$

onde consideramos que a trajetória é descrita por uma função $z(\varphi)$ (com R constante). Ou seja:

$$S = \int_1^2 \sqrt{z'^2 + R^2}\, d\varphi \quad , \text{ onde } z' \equiv \frac{dz}{d\varphi} .$$

A eq. de Euler fica:

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial f}{\partial z'} = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{z'}{\sqrt{z'^2 + R^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{\sqrt{z'^2 + R^2}} = cte \equiv a \Rightarrow z'^2 = a^2(z'^2 + R^2)$$

$$\Rightarrow z'^2(1 - a^2) = a^2R^2 \Rightarrow z'^2 = \frac{a^2R^2}{1-a^2} \Rightarrow z' = \pm\frac{aR}{\sqrt{1-a^2}} = cte$$

Como $z' \equiv \frac{dz}{d\varphi} = cte \equiv b \Rightarrow z = b\varphi + d$, onde b e d são constantes.

Assim $z(\varphi)$ é um segmento de helicóide.