

O toro magnetizado

Eduardo Miranda¹

¹*Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas,
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 777 CEP 13083-859 Campinas, SP*

Seja um toro de material permanentemente magnetizado em sua direção azimutal

$$\mathbf{M} = M\hat{\phi}. \quad (1)$$

A forma da seção transversal é irrelevante, mas vamos supor uma seção retangular como na Figura 1. Queremos encontrar o campo magnético \mathbf{B} dentro do toro.

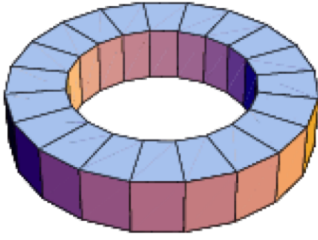


Figura 1. Toro magnetizado.

A maneira mais simples de achar \mathbf{B} é utilizar o “potencial magnético escalar”. Se não houver correntes livres

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (3)$$

Como $\mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{H} + \mathbf{M}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (5)$$

Da Eq. (5), podemos escrever

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi_m, \quad (6)$$

que levada na Eq. (4) nos dá

$$\nabla^2\psi_m = \nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (7)$$

que é a Eq. de Poisson com $-\nabla \cdot \mathbf{M}$ como densidade de “carga magnética” e $\varepsilon_0 = 1$. A solução é

$$\psi_m = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS', \quad (8)$$

onde usamos que a densidade volumétrica $-\nabla \cdot \mathbf{M}$ dá origem, na superfície do corpo magnetizado, a uma densidade superficial de “carga magnética” dada por $\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ (note a analogia com as densidades volumétrica e superficial de cargas ligadas ou de polarização $\rho_B = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ e

$\sigma_B = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$). Para o toro (usando coordenadas cilíndricas e notando que $\hat{\mathbf{n}} \perp \hat{\phi}$)

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (9)$$

e, portanto, o campo procurado é imediatamente obtido

$$\psi_m = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}. \quad (10)$$

Entretanto, podemos querer resolver o problema usando correntes ligadas ou de magnetização. Nesse caso,

$$\mathbf{J}_B = \nabla \times \mathbf{M}, \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (12)$$

É fácil mostrar, usando coordenadas cilíndricas, que

$$\mathbf{J}_B = \frac{M}{\rho} \hat{\mathbf{z}}, \quad (13)$$

$$|\mathbf{K}_B| = M. \quad (14)$$

A corrente \mathbf{K}_B circula nas paredes do toro nas bordas das seções transversais com sentido dado pela regra da mão direita. Há, portanto, duas fontes de campo magnético, que consideraremos separadamente. A corrente superficial define um toro de corrente, cujo campo é dado por^[1]

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 K_B R}{\rho} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 M R}{\rho} \hat{\phi}, \quad (15)$$

onde R é o raio interno do toro. A corrente volumétrica \mathbf{J}_B gera um campo também puramente azimutal (ver prova adiante)

$$\mathbf{B}_2 = B_2(\rho, z) \hat{\phi}, \quad (16)$$

cujo módulo só depende de ρ e z , por simetria. Usando a lei de Ampère para um circuito circular de raio ρ dentro do toro, concêntrico a ele e normal ao seu eixo,

$$\oint \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = B_2(\rho, z) 2\pi\rho \quad (17)$$

$$= \mu_0 M \int_R^\rho \frac{2\pi\rho}{\rho} d\rho = 2\pi\mu_0 M (\rho - R) \quad (18)$$

$$\Rightarrow B_2(\rho, z) = \mu_0 M \left(1 - \frac{R}{\rho}\right), \quad (19)$$

que, na verdade, independe de z . Juntando as duas contribuições

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \mu_0 M \hat{\phi} = \mathbf{M}. \quad (20)$$

• Prova da Eq. (16)

Tomemos o eixo no toro ao longo do eixo z , com origem no centro do mesmo. Um ponto de observação qualquer no plano xz tem coordenadas

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}. \quad (21)$$

Um ponto qualquer do toro tem coordenadas

$$\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}, \quad (22)$$

tal que

$$z' \in [-b/2, +b/2], \quad (23)$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} \in [R, R + a], \quad (24)$$

para uma seção transversal de lados a e b . Usando a expressão da corrente, Eq. (13), a lei de Biot-Savart nos dá

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} dz' \int dx' \int dy' \frac{M\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \times \frac{(x-x')\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + (z-z')\hat{\mathbf{z}}}{\left[(x-x')^2 + (y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}, \\ &= \frac{\mu_0 M}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} dz' \int dx' \int dy' \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \frac{(x-x')\hat{\mathbf{y}} - y'\hat{\mathbf{x}}}{\left[(x-x')^2 + (y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}. \end{aligned}$$

A região de integração, o anel entre os raios R e $R+a$ é simétrica por $y' \rightarrow -y'$ e a componente em $\hat{\mathbf{x}}$ do integrando é ímpar sob essa operação. Consequentemente, essa componente se anula e $\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{y}}$. Por simetria, para

um ponto de observação qualquer no toro, $\mathbf{B} \parallel \hat{\phi}$. Além disso, por simetria, o módulo de \mathbf{B} não pode depender de ϕ .

^[1] *Introduction to Electrodynamics*, D. J. Griffiths, Prentice-Hall, 3a. edição, Ex. 5.10, págs. 229-230.