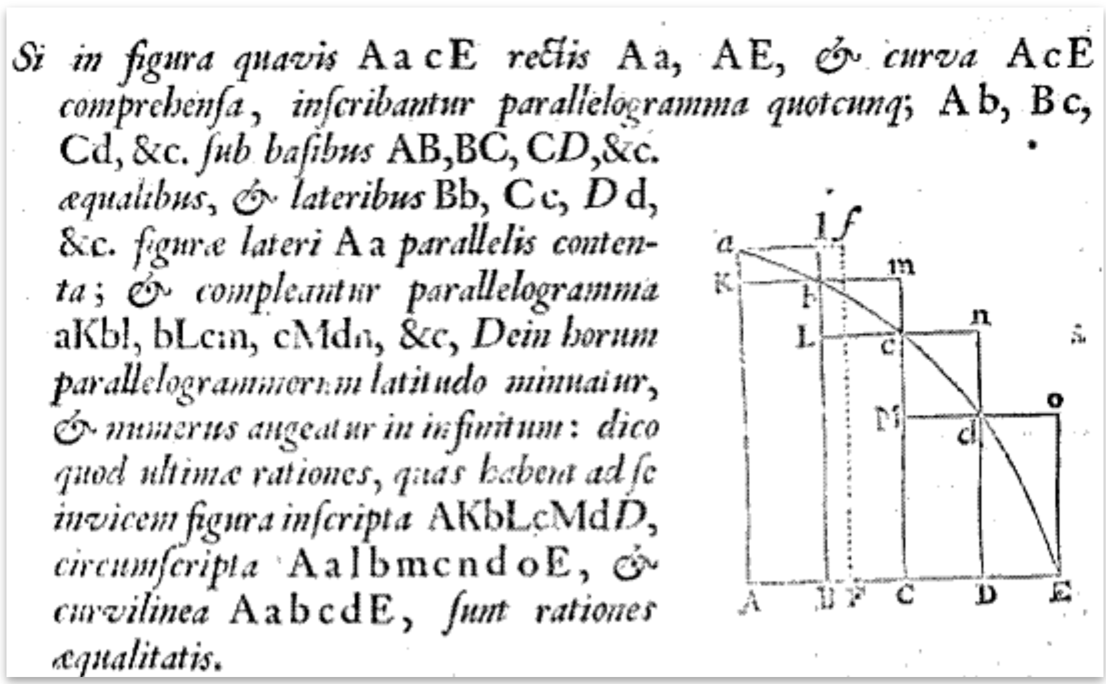
Aula - 2
Movimento em uma dimensão

Física Geral I - F-128

2º semestre, 2012

Ilustração dos "Principia" de Newton mostrando a ideia de integral



Si in figura quavis AacE *rectis* Aa, AE, *& curva* AcE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq;* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*

Movimento 1-D

<u>Conceitos:</u> posição, movimento, trajetória

Velocidade média
Velocidade instantânea
Aceleração média
Aceleração instantânea
Exemplos

- Entender o movimento é uma das metas das leis da Física.
- A Mecânica estuda o movimento e as suas causas.
- A sua descrição é feita pela Cinemática.
- As suas causas são descritas pela Dinâmica.
- Iniciamos com o movimento em 1-D.

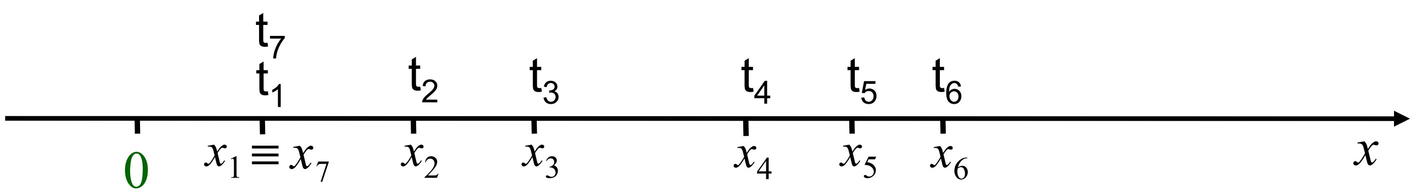
Questão 1:

Quais são, no SI, as unidades referentes a distância, velocidade e aceleração?

1. m/s; m; s;
2. km; km/h; m/s^2
3. m/s; m/s; m/s^2
4. m; m/s; m/s^2
5. nenhuma das alternativas

Posição – 1D

Em cinemática, os conceitos de *tempo* e *posição* são primitivos. Um objeto é localizado pela sua posição ao longo de um eixo orientado, relativamente a um ponto de referência, geralmente tomado como a origem ($x = 0$). Exemplo:



O *movimento* de um objeto consiste na mudança de sua posição com o decorrer do tempo.

Um conceito importante é o da *relatividade* do movimento: sua descrição depende do observador. Já a escolha da origem é arbitrária.

A *trajetória* é o lugar geométrico dos pontos do espaço ocupados pelo objeto que se movimenta.

Deslocamento e Velocidade média

O *deslocamento* unidimensional de um objeto num intervalo de tempo (t_2-t_1) é a diferença entre a posição final (x_2) no instante t_2 e a posição inicial (x_1) no instante t_1.

A velocidade média é definida como:

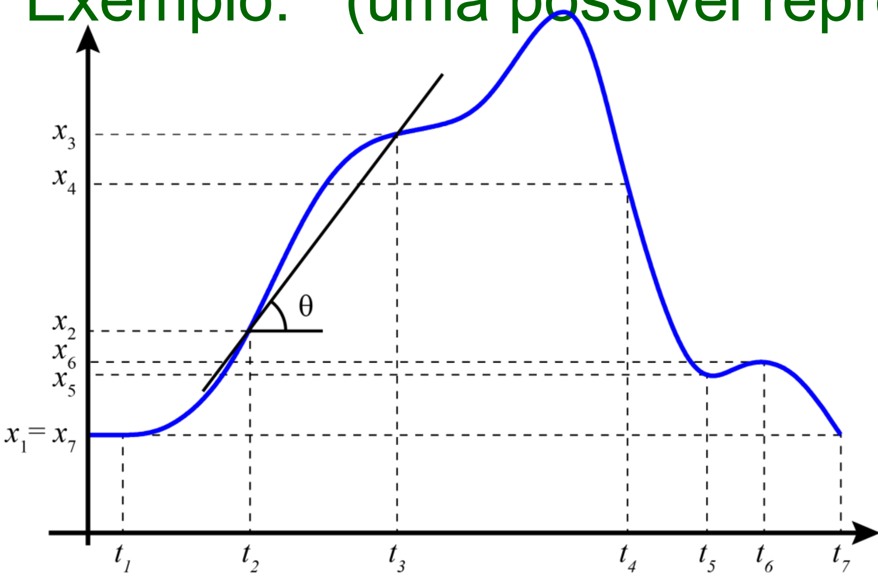
$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(unidade: m/s)}$$

- Se $\Delta x > 0 \Rightarrow v_m > 0$ (movimento para a direita, ou no sentido de x crescente);

- Se $\Delta x < 0 \Rightarrow v_m < 0$ (movimento para a esquerda, ou no ou no sentido de x decrescente).

Exemplo:

Exemplo: (uma possível representação do movimento)

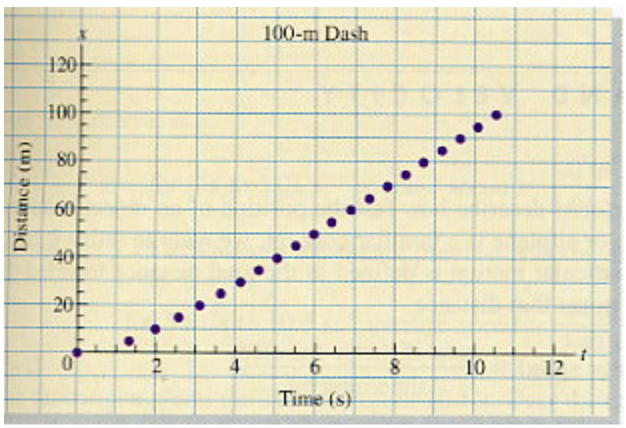


$$v_m = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} > 0 \quad (v_m \text{ entre } t_2 \text{ e } t_3)$$

$$v_m = \frac{x_7 - x_1}{t_7 - t_1} = 0 \quad (v_m \text{ entre } t_1 \text{ e } t_7)$$

$$v_m = \frac{x_6 - x_4}{t_6 - t_4} < 0 \quad (v_m \text{ entre } t_4 \text{ e } t_6)$$

Exemplo numérico: corrida de 100 metros.



de 0 a 5,0 s : v_m = 40 m/5,0s = 8,0 m/s

de 5,0 a 10,5 s: v_m = 60 m/5,5s = 10,9 m/s

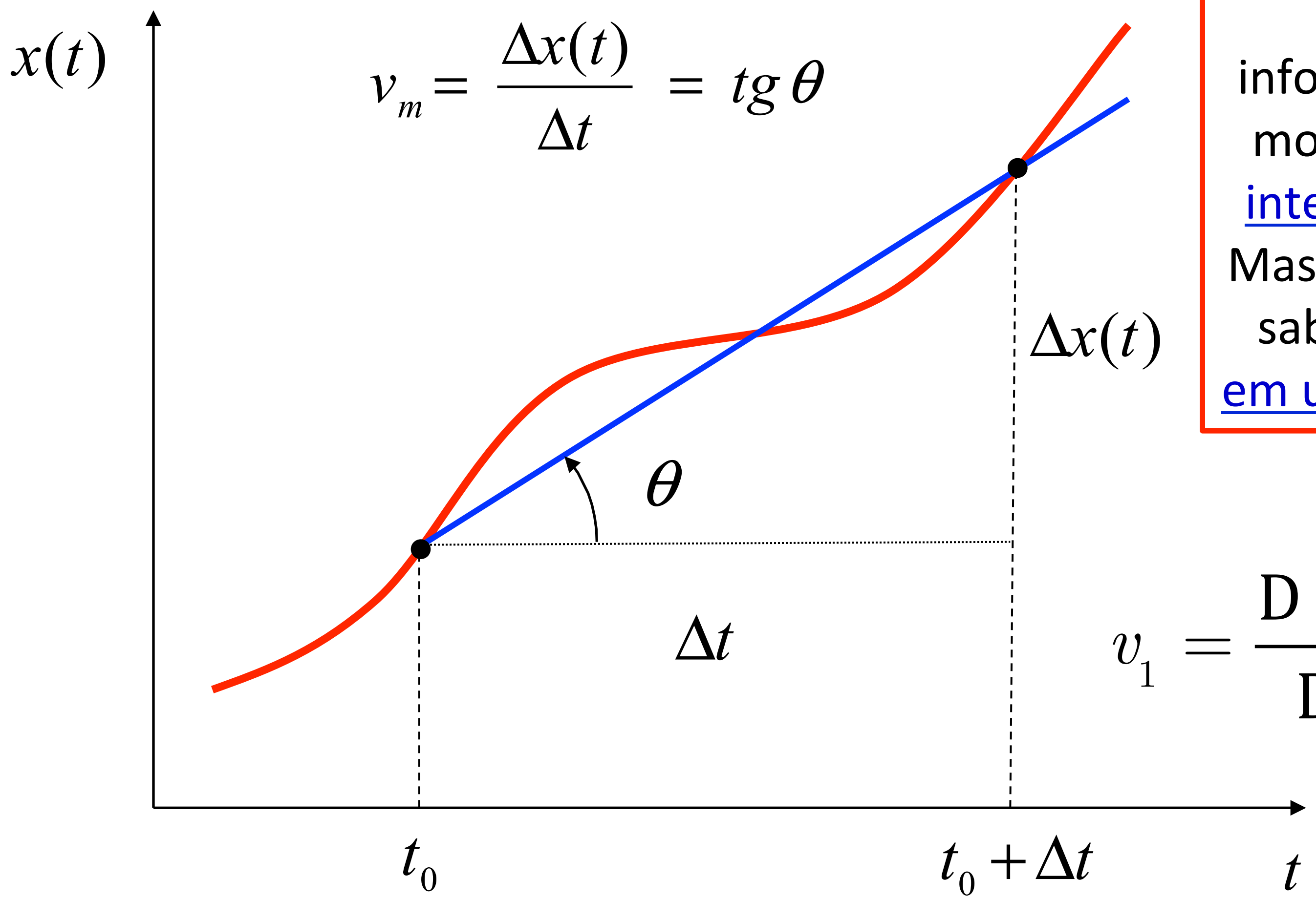
Em todo o intervalo (de 0 a 10,5 s) :

v_m = 100 m/10,5s = 9,5 m/s

Velocidade média

Velocidade média entre: $t_0 \;\; e \;\; t_0 + \Delta t$

$$v_m = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = tg\,\theta$$



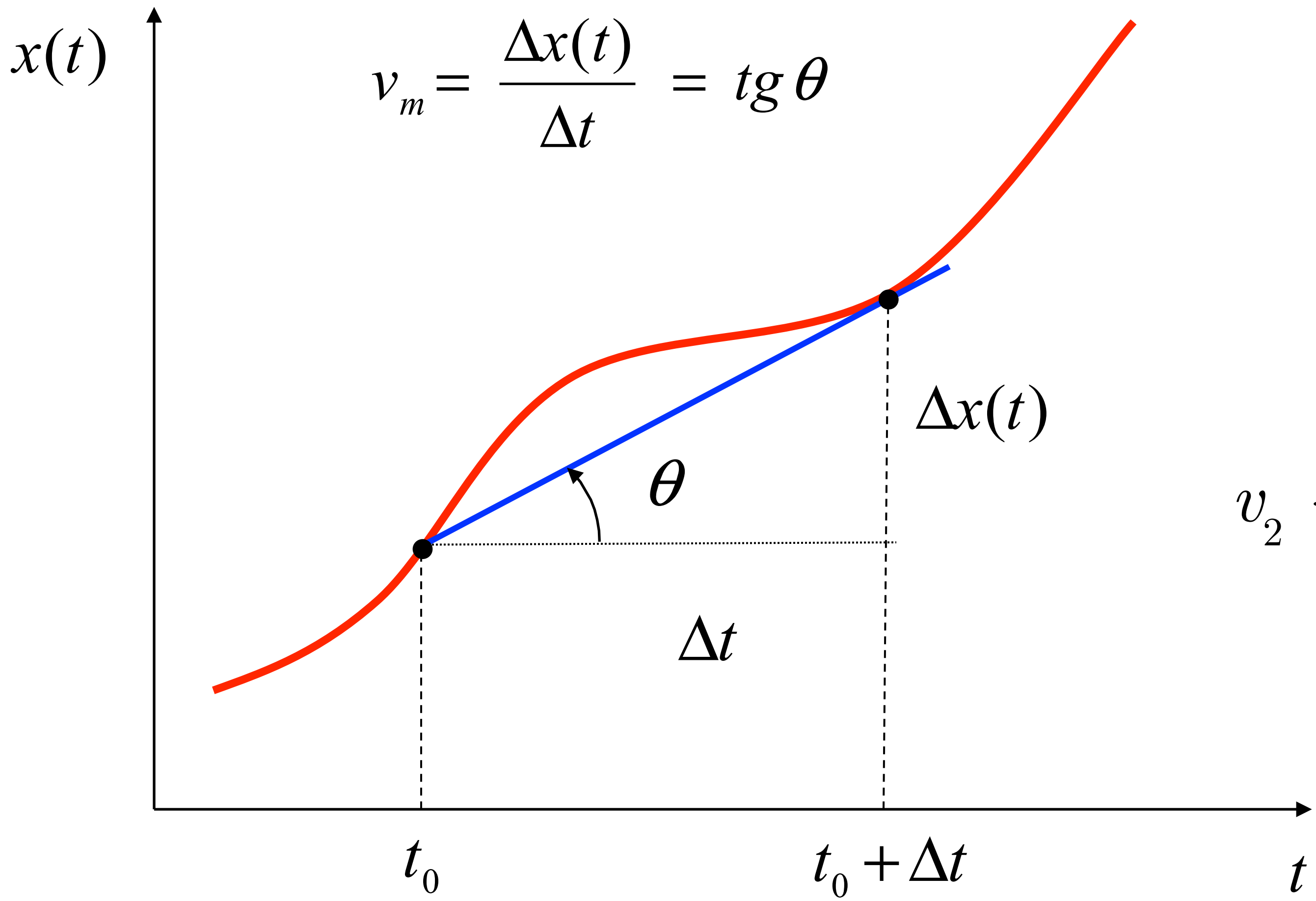
$$v_1 = \frac{D\,x(t)}{D\,t}$$

A velocidade média nos dá informações sobre o movimento em um intervalo de tempo. Mas podemos querer saber a velocidade em um dado instante.

Velocidade média

Velocidade média entre: $t_0 \;\; e \;\; t_0 + \Delta t$

$$v_m = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = tg\,\theta$$

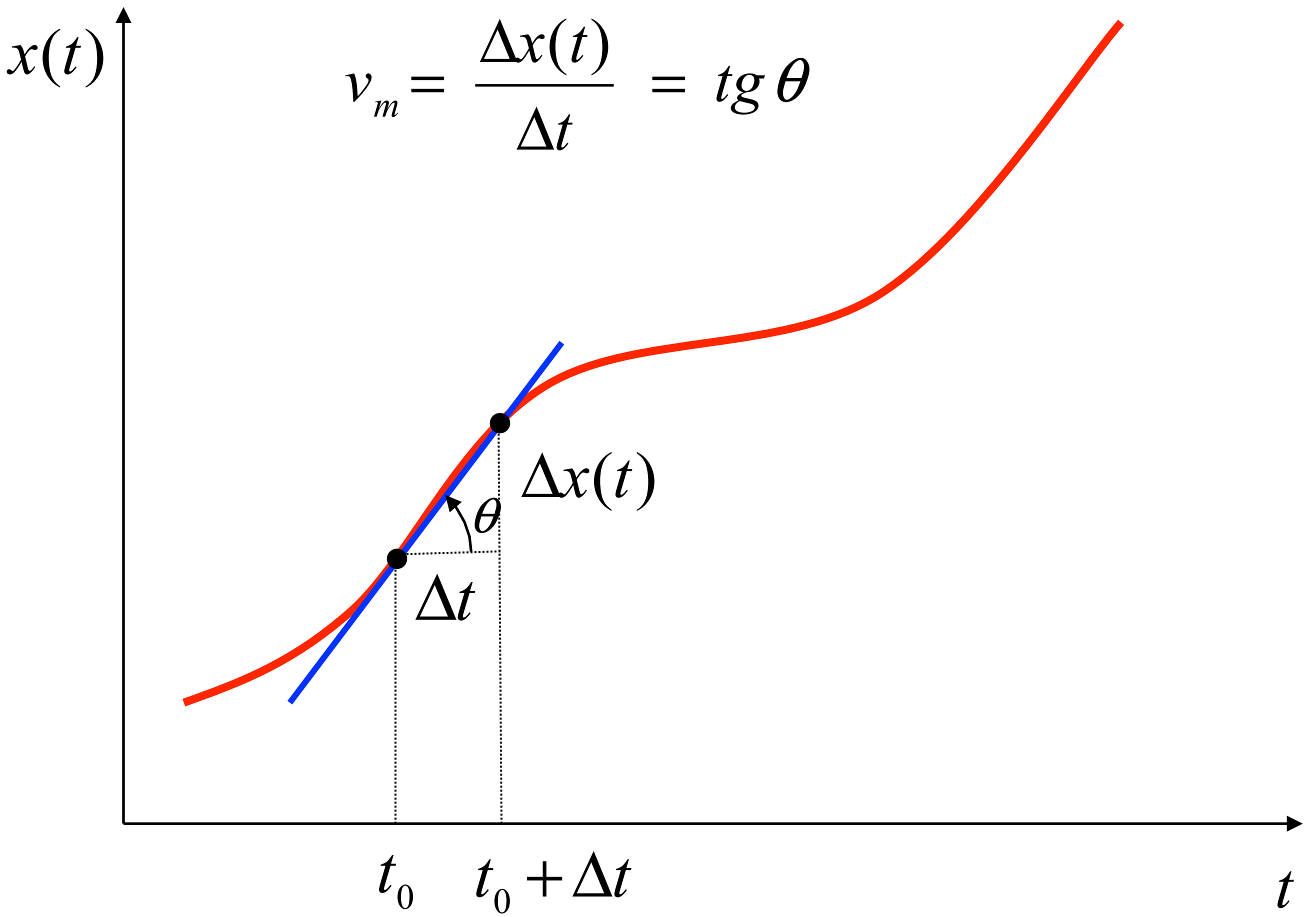


$v_2 < v_1$

Velocidade média

Velocidade média entre: $t_0 \;\; e \;\; t_0 + \Delta t$

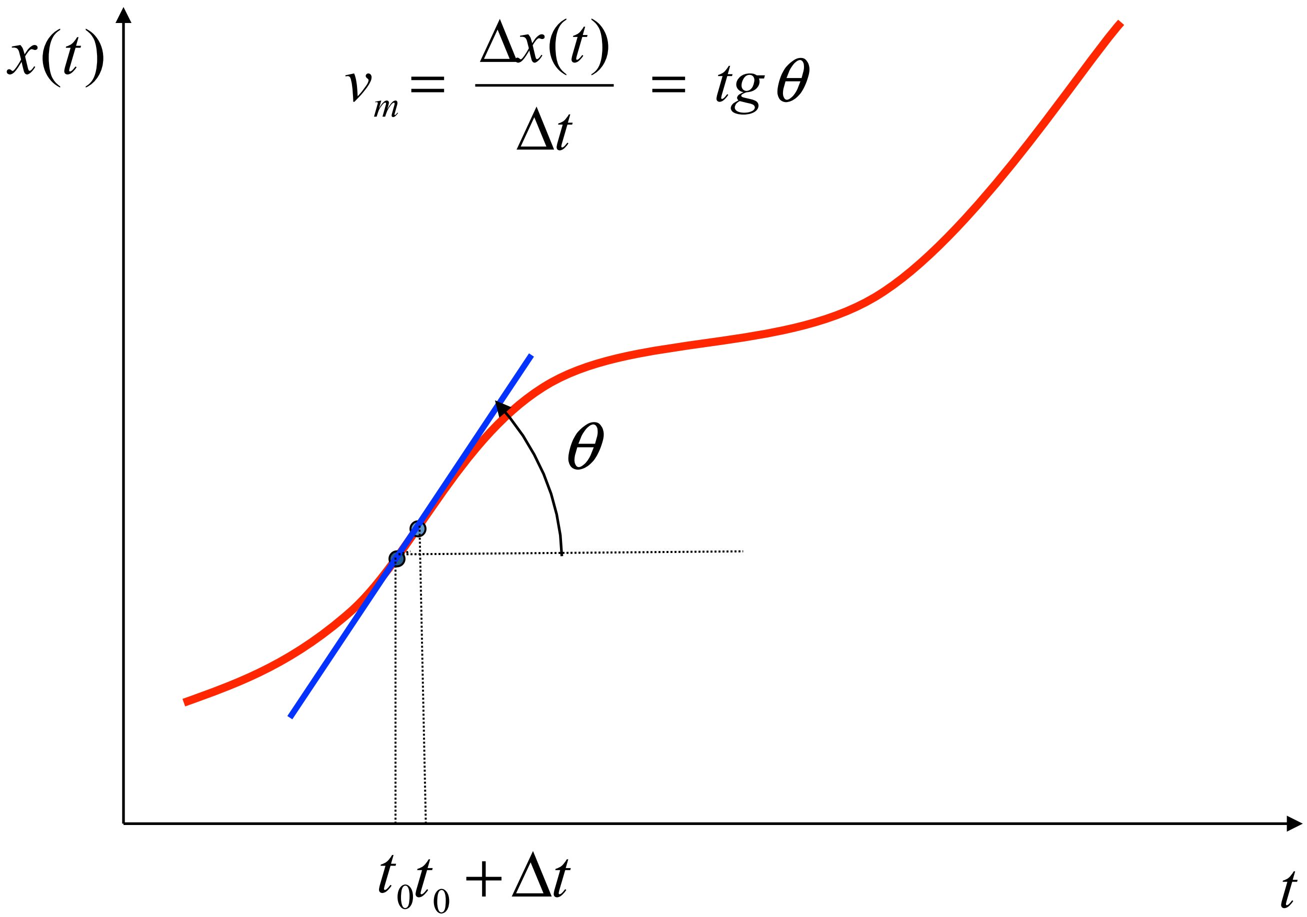
$$v_m = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = tg\,\theta$$



Velocidade média

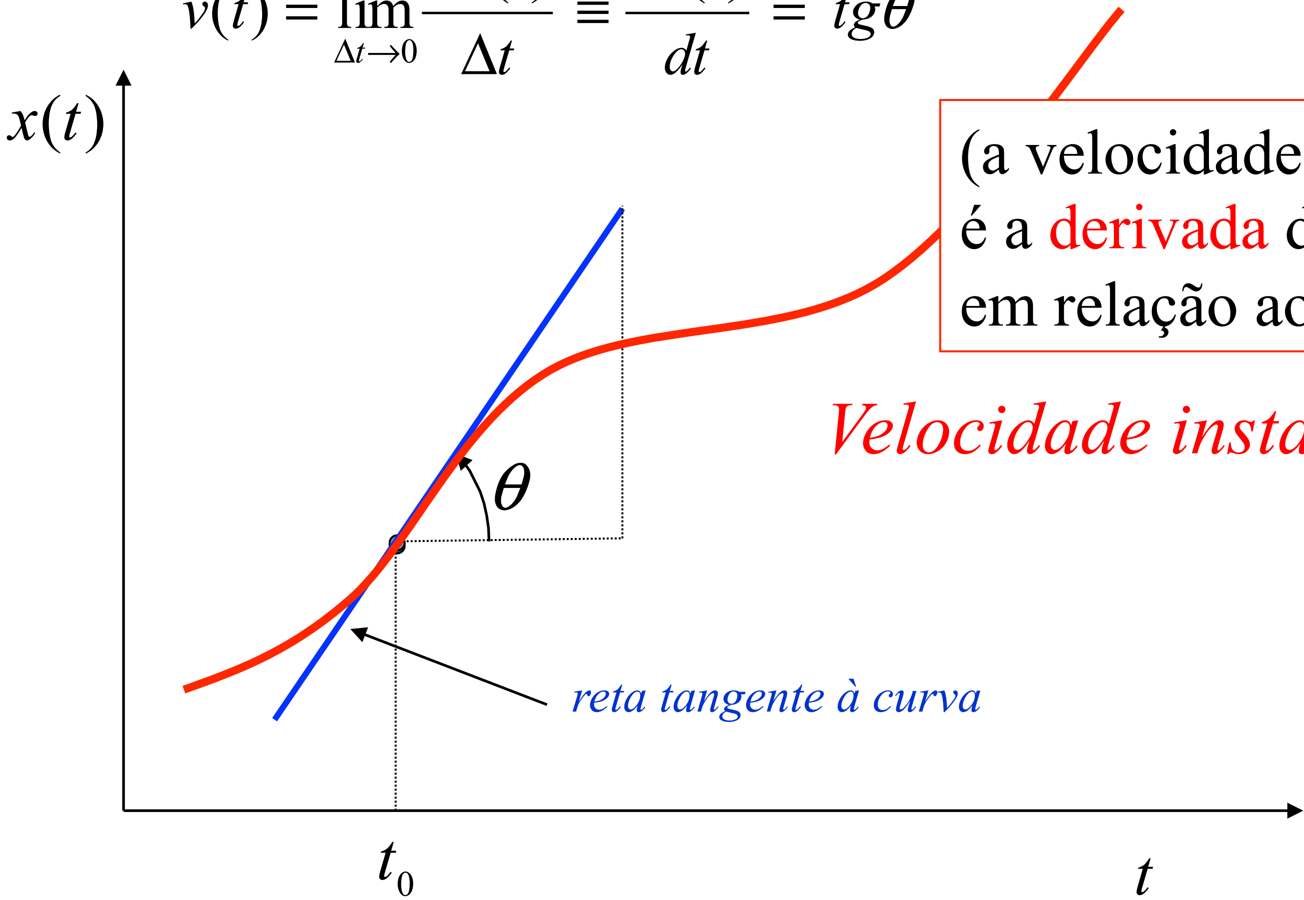
Velocidade média entre: $t_0 \;\; e \;\; t_0 + \Delta t$

$$v_m = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = tg\,\theta$$



Velocidade instantânea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx(t)}{dt} = tg\theta$$



(a velocidade instantânea é a derivada da posição em relação ao tempo)

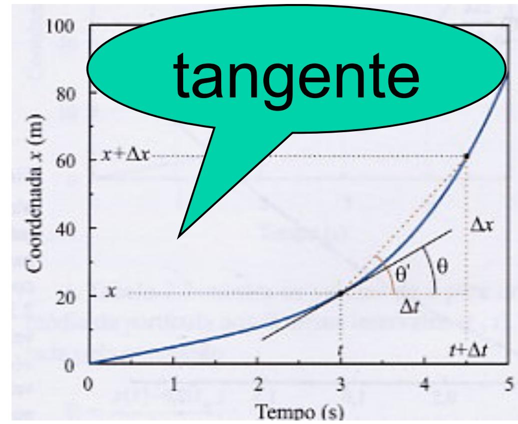
Velocidade instantânea em t_0

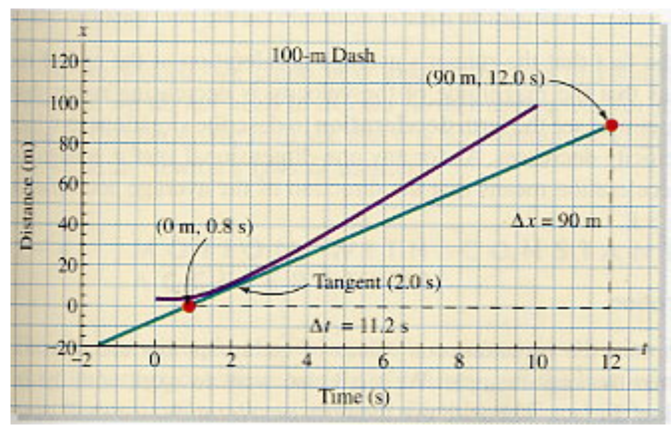
Velocidade instantânea

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Derivada

Geometricamente:



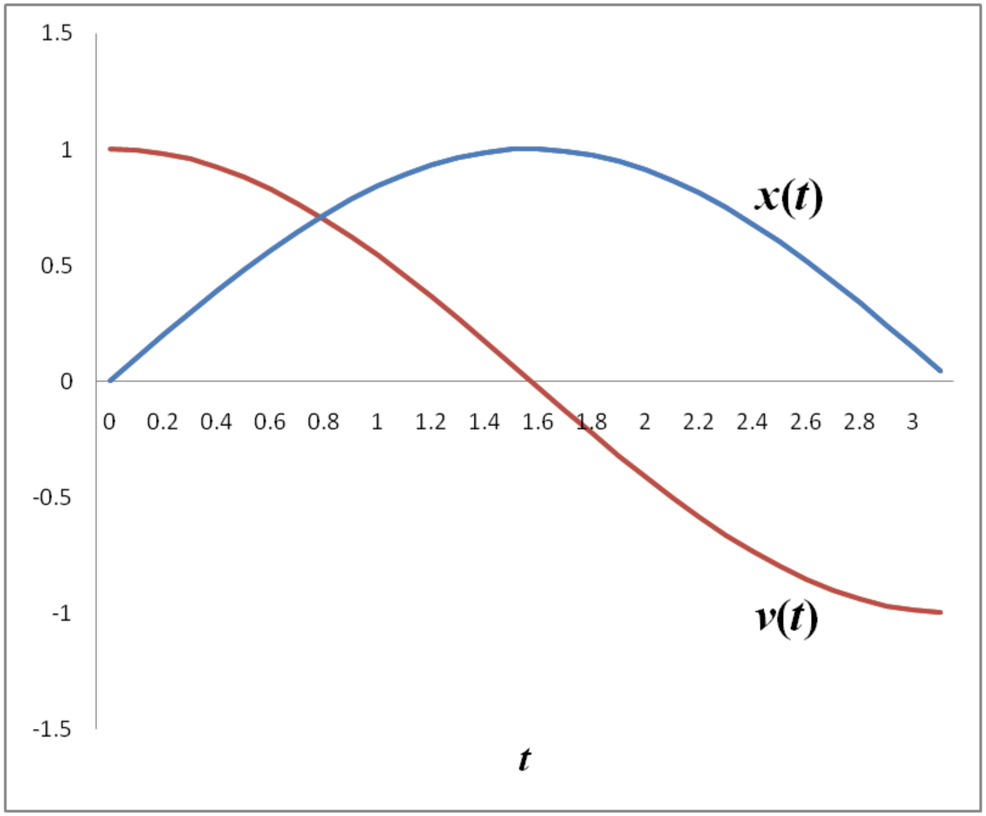


Exemplo:

No gráfico abaixo (corrida de 100 m), a velocidade em $t = 2$s é

$$v(t\!=\!2\text{s}) = \frac{90\text{m}}{11{,}2\text{s}} \cong 8{,}0\text{m/s}$$

Visualização gráfica da derivada



http://mathdl.maa.org/images/upload_library/4/vol4/kaskosz/derapp.html

Algumas derivadas importantes

$f(t)$	$df(t)/dt$
$a\,f(t)+b\,g(t)$	$adf(t)/dt+bdg(t)/dt$
$a=\text{constante}$	0
t^n	nt^{n-1}
$\sin\omega t$	$\omega\cos\omega t$
$\cos\omega t$	$-\omega\sin\omega t$
$e^{\lambda t}$	$\lambda e^{\lambda t}$
$\ln\lambda t$	t^{-1}

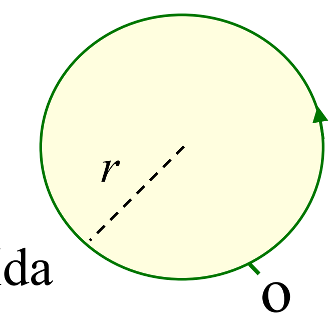
Velocidade escalar média e velocidade média

A velocidade escalar média é uma forma de descrever a "rapidez" com que um objeto se move. Ela envolve apenas a distância percorrida, independentemente da direção e do sentido:

$$v_{em} = \frac{\text{distância total percorrida}}{\Delta t}$$

Em muitas situações, $v_{em} = v_m$. Entretanto, essas duas velocidades podem ser bastante diferentes. Exemplo: partícula parte de O, descreve uma circunferência de raio r e retorna a O, depois de decorrido um tempo T. Neste caso:

$$v_m = 0 \quad \text{e} \quad v_{em} = \frac{2\pi r}{T}$$



A velocidade escalar é o módulo da velocidade; ela é destituída de qualquer indicação de direção e sentido. (O velocímetro de um carro marca a velocidade escalar instantânea e não a velocidade, já que ele não pode determinar a direção e o sentido do movimento).

Questão 2

Uma viagem de Campinas a São Paulo é feita, em média em 1,5 horas. A distância entre estas duas cidades é de 150 km. Quais são a velocidade média e escalar média numa viagem de ida e volta à São Paulo, com uma parada total de 2 horas durante o percurso?

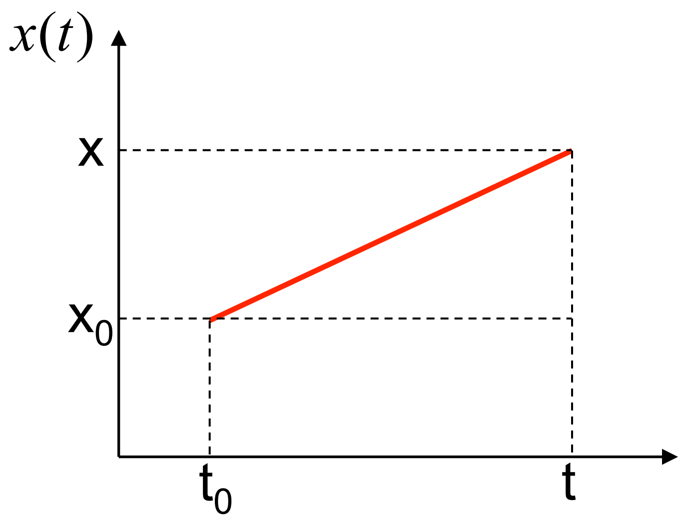
1. 60 e 0 km/h
2. 0 e 60 km/h
3. 100 e 60 km/h
4. 60 e 100 km/h
5. Nenhuma das acima

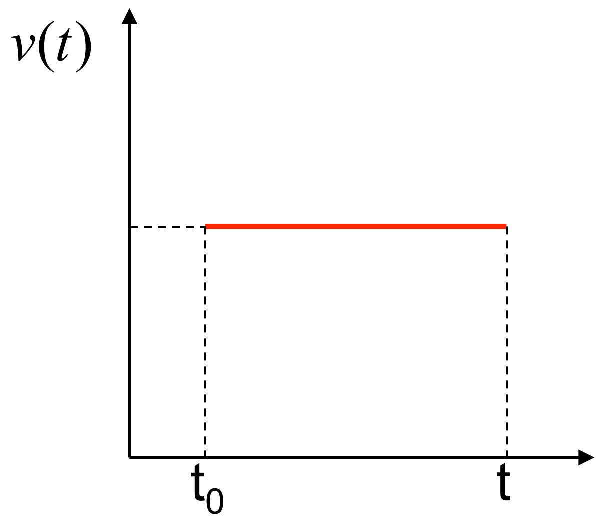
Velocidade instantânea

Um caso particular: velocidade constante

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} \qquad \text{ou:} \qquad x - x_0 = v(t - t_0)$$

Graficamente:



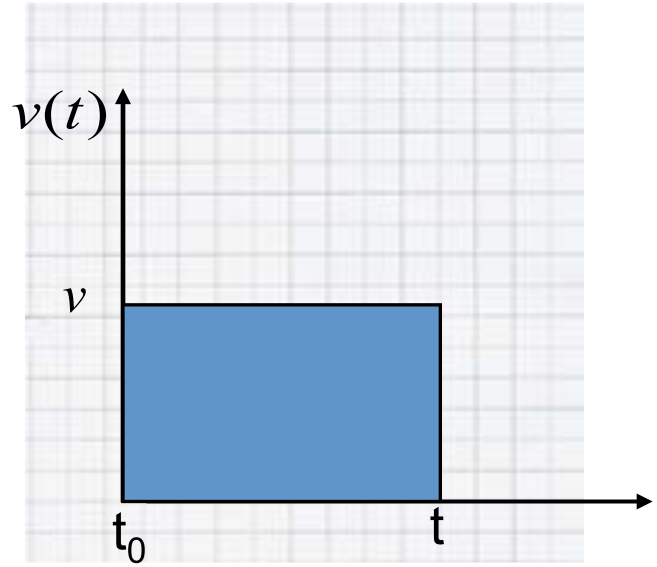


O cálculo de x(t) a partir de v(t)

Este é o problema inverso. Considere inicialmente o caso de velocidade constante, isto é:

$$x - x_0 = v(t - t_0)$$

Note que $v(t\text{-}t_0)$ é a área sob a curva da velocidade v = constante em função do tempo.



Este é um resultado geral. Para demonstrá-lo, usaremos que para intervalos de tempo muito curtos podemos escrever:

$$\Delta x = v(t)\,\Delta t\ ,$$

onde $v(t)$ é a velocidade instantânea em t.

O cálculo de x(t) a partir de v(t)

Dividimos o intervalo (t-t_0) em um número grande N de pequenos intervalos Δt

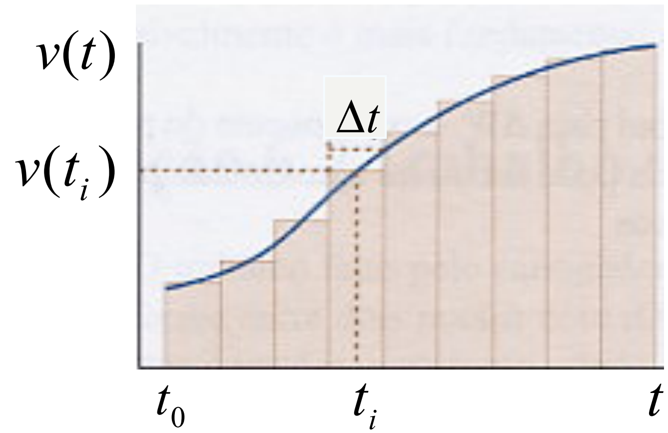
$$\Delta x_i \approx v(t_i)\ \Delta t$$

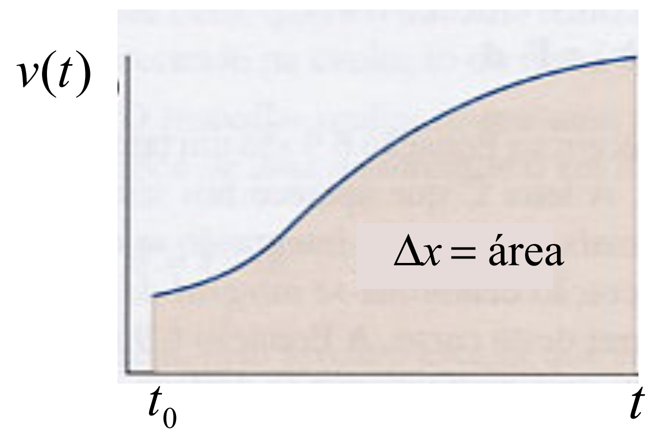
$$\Downarrow$$

$$x(t) - x(t_0) = \sum_i \Delta x_i = \sum_i v(t_i)\Delta t$$

No limite $N \to \infty$ e $\Delta t \to 0$:

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$$





O cálculo de x(t) a partir de v(t)

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \text{e} \qquad x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

A velocidade é obtida derivando-se a posição em relação ao tempo; geometricamente, a velocidade é o coeficiente angular da reta tangente à curva da posição em função do tempo no instante considerado.

O deslocamento é obtido pela anti-derivação (ou integração) da velocidade; geometricamente, o deslocamento é a área sob a curva da velocidade em função do tempo.

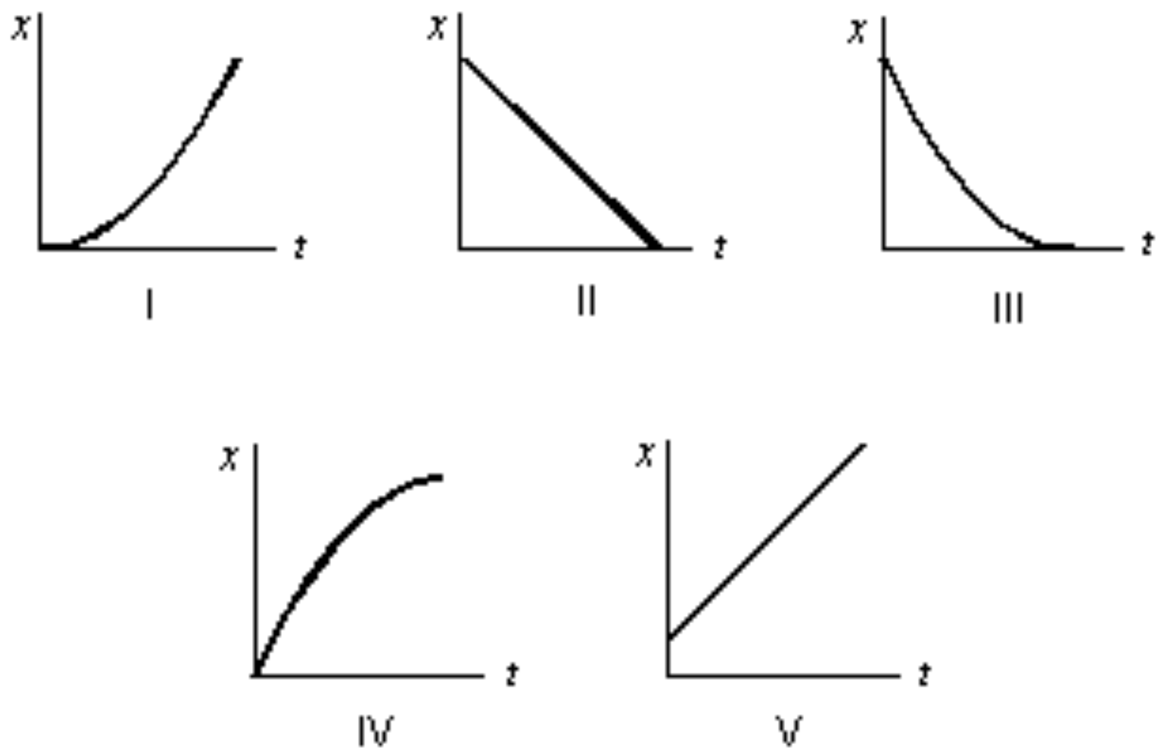
Algumas integrais importantes

$f(t)$	$F(t)$
$a\,f(t)+b\,g(t)$	$a\,F(t)+b\,G(t)$
$a = \text{constante}$	at
$t^n, n \neq -1$	$t^{n+1}/n+1$
$\sin \omega t$	$-\cos \omega t/\omega$
$\cos \omega t$	$\sin \omega t/\omega$
$e^{\lambda t}$	$e^{\lambda t}/\lambda$
t^{-1}	$\ln\|t\|$

Questão 3:

Qual desses cinco gráficos de coordenada versus tempo representa o movimento de uma partícula cujo módulo da **velocidade está aumentando**?

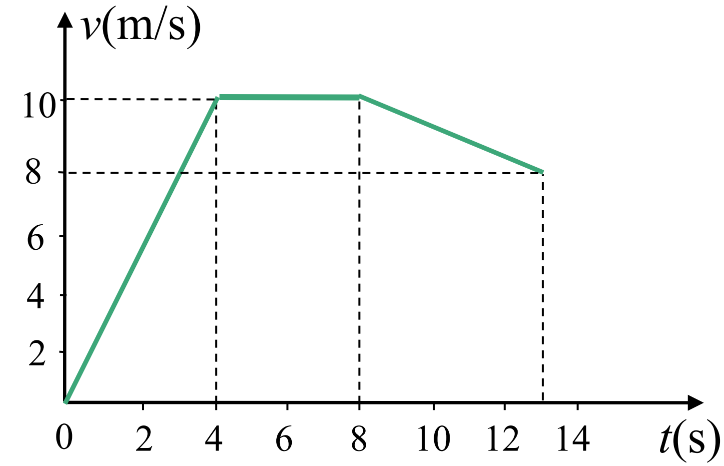
- I
- II
- III
- IV
- V



Aceleração média

Aceleração média: $a_m = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ (unidade: m/s^2)

Note que a_m também pode ser >0, <0 ou =0.



Exemplo: Um corredor acelera uniformemente até atingir 10 m/s em t = 4,0 s. Mantém a velocidade nos próximos 4,0s e reduz a velocidade para 8,0 m/s nos 5,0s seguintes. Acelerações médias:

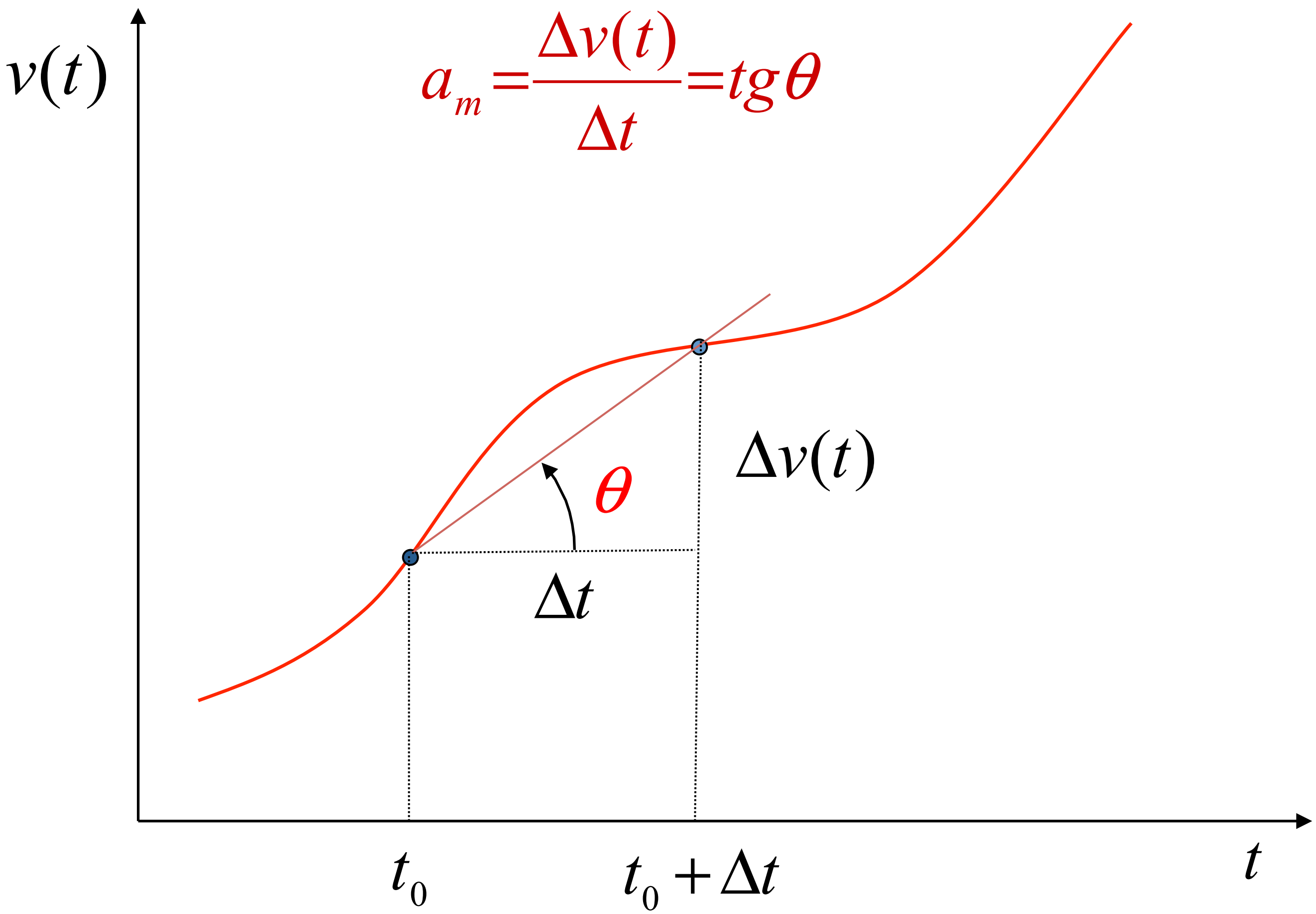
de 0s até 4s: $a_m = 10\ m/s\ /\ 4s = 2{,}5\ m/s^2$

de 4s até 8s: $a_m = 0\ m/s\ /\ 4s = 0\ m/s^2$

de 8s até 13s: $a_m = -2\ m/s\ /\ 5s = -0{,}4\ m/s^2$

Aceleração média

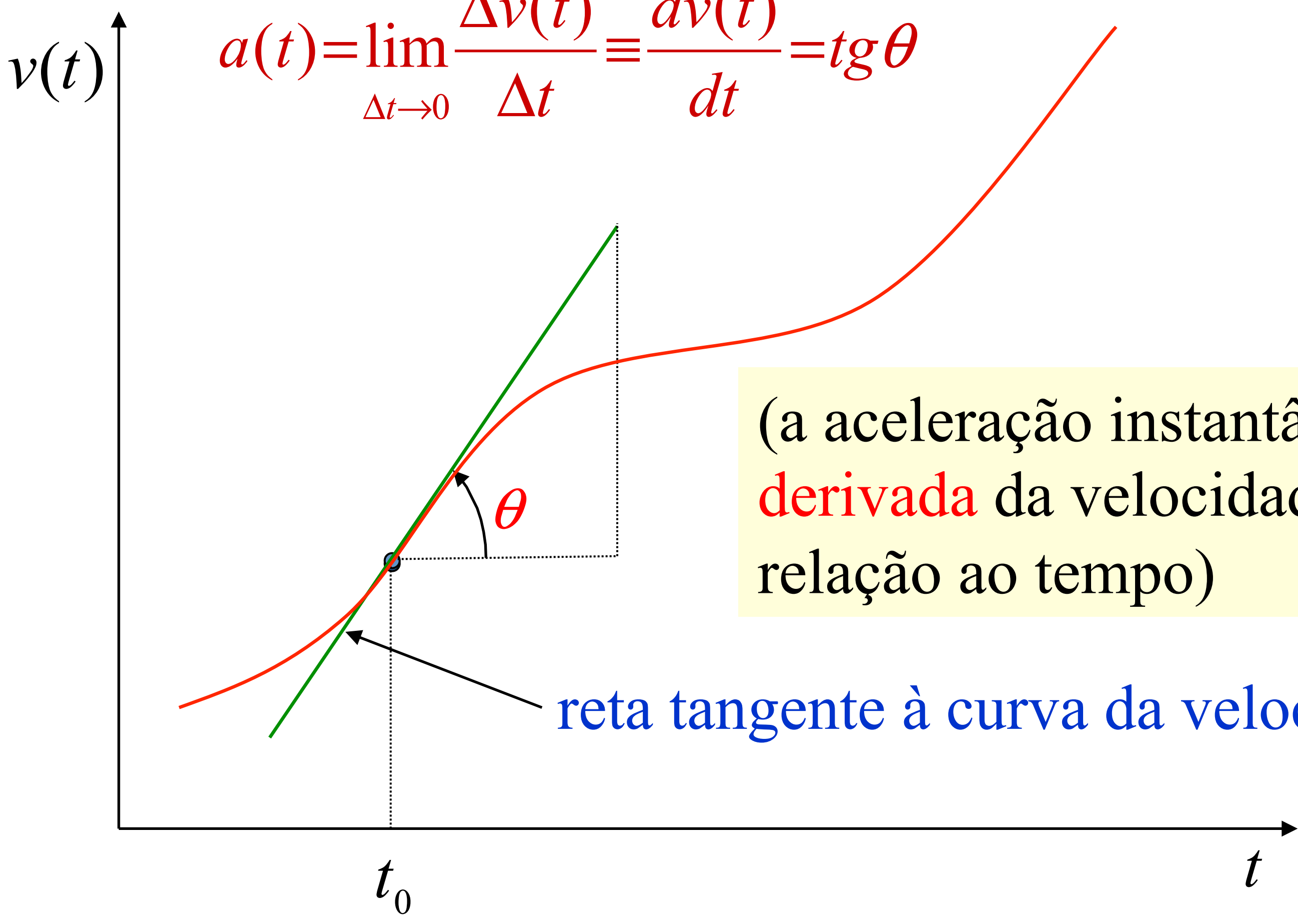
Aceleração média entre: $t_0 \ e \ t_0 + \Delta t$



Aceleração instantânea

Aceleração instantânea em t_0:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dv(t)}{dt} = tg\,\theta$$



(a aceleração instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo)

Aceleração instantânea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Primeira Derivada

Note que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Segunda derivada

Exemplo:

Na corrida de 100 m, a aceleração em t = 2s é:

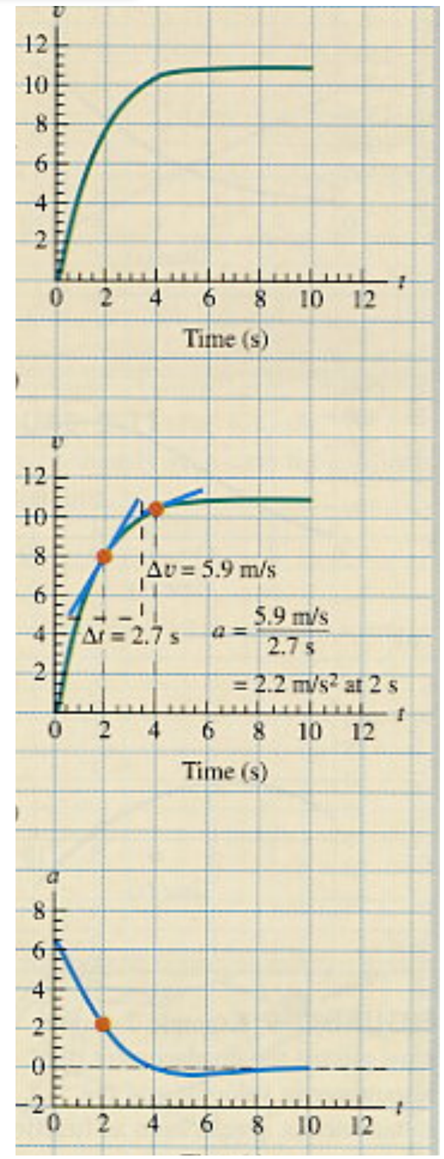
$$a(t{=}2\text{s}) = \frac{5{,}9\text{m/s}}{2{,}7\text{s}} = 2{,}2 \quad \text{m/s}^2$$

Gráficos

$v(t)$

$v(t)$

$a(t)$



Aceleração constante

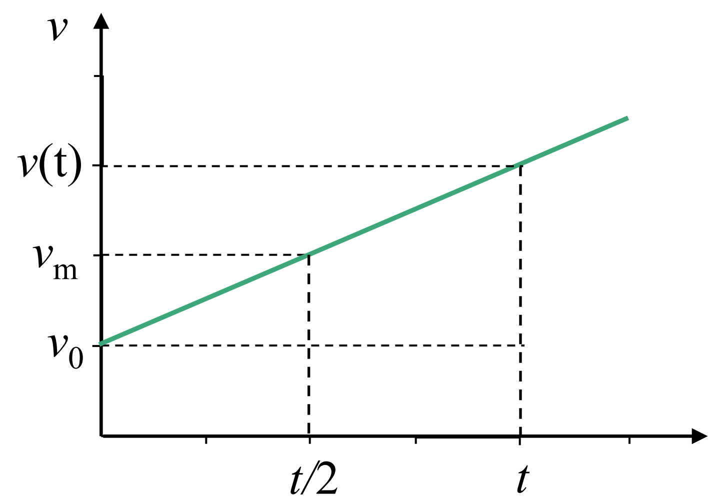
Se a aceleração a é constante: $$a = a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Se $t_0 = 0$ e $v(t_0) = v_0$, a velocidade fica:

$$v = v_0 + at$$

Note que neste movimento a velocidade média é dada por

$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{v_0 + v(t)}{2}$$



Como $x = x_0 + v_m t$, temos:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Resumo: aceleração constante

As equações de movimento para o caso de aceleração constante são:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

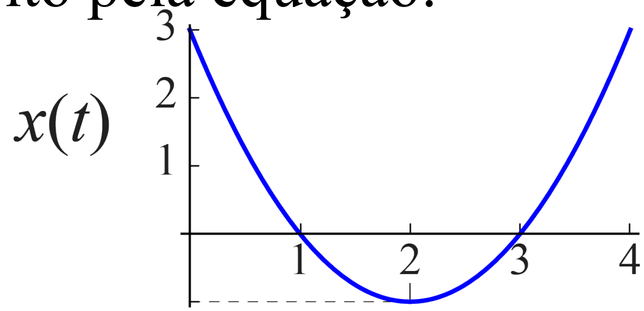
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

Exemplo 1:

O movimento de uma partícula é descrito pela equação:

$x = t^2 - 4t + 3 \quad (x \text{ em m e } t \text{ em s})$



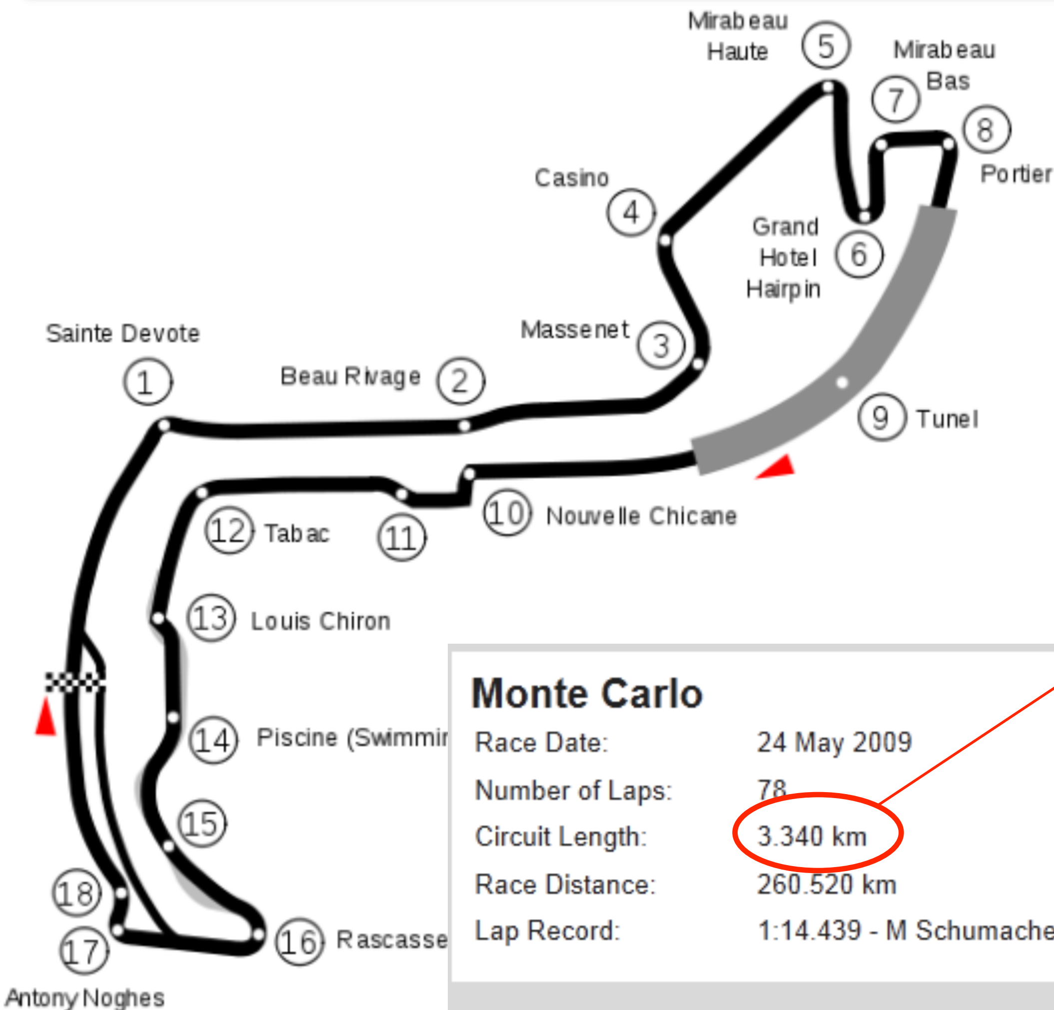
a) fazer o gráfico de $x(t)$;

b) calcular $v(t)$ e $a(t)$ e fazer os gráficos correspondentes.

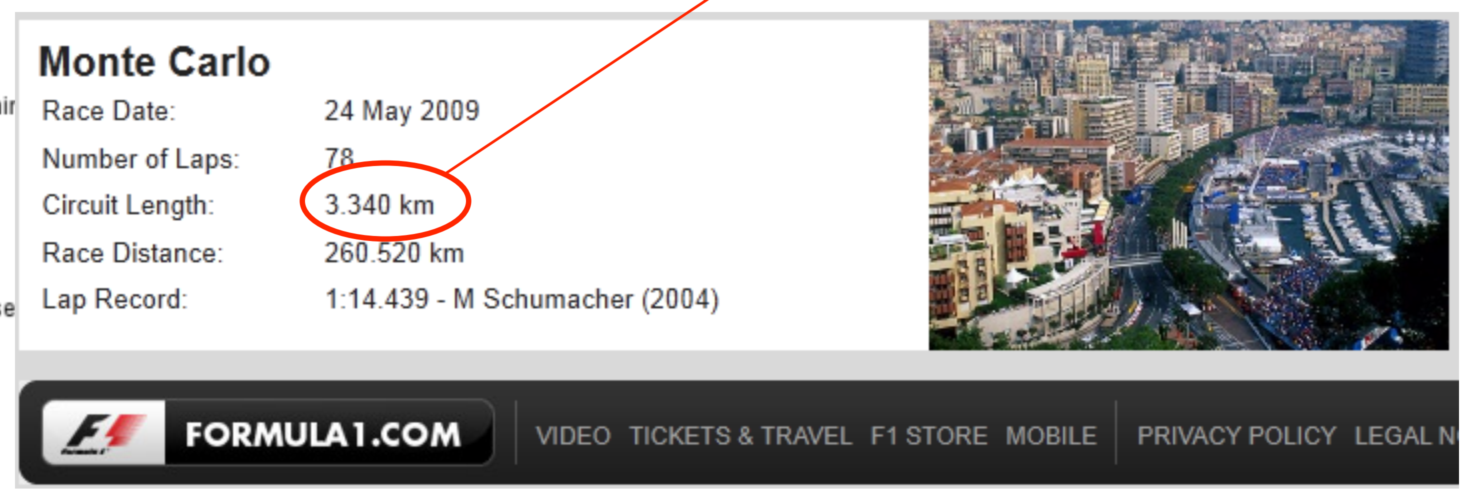
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2t - 4 \quad (\text{m/s})$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2 \quad (\text{m/s}^2)$$

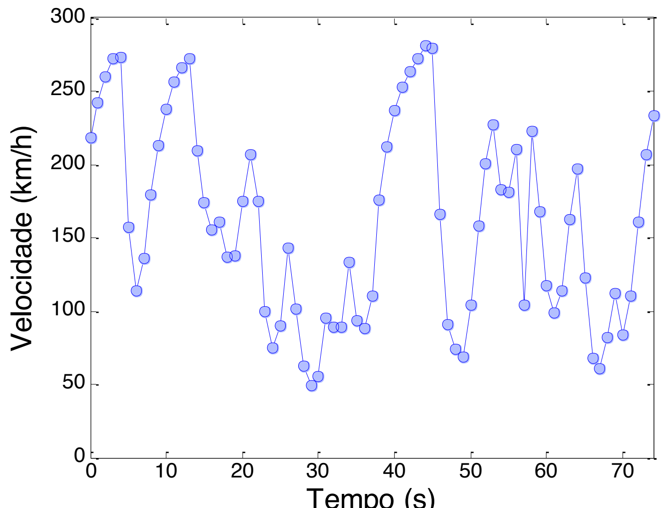
O GP de Mônaco



1 volta = 3,340 km



Vettel no GP de Mônaco



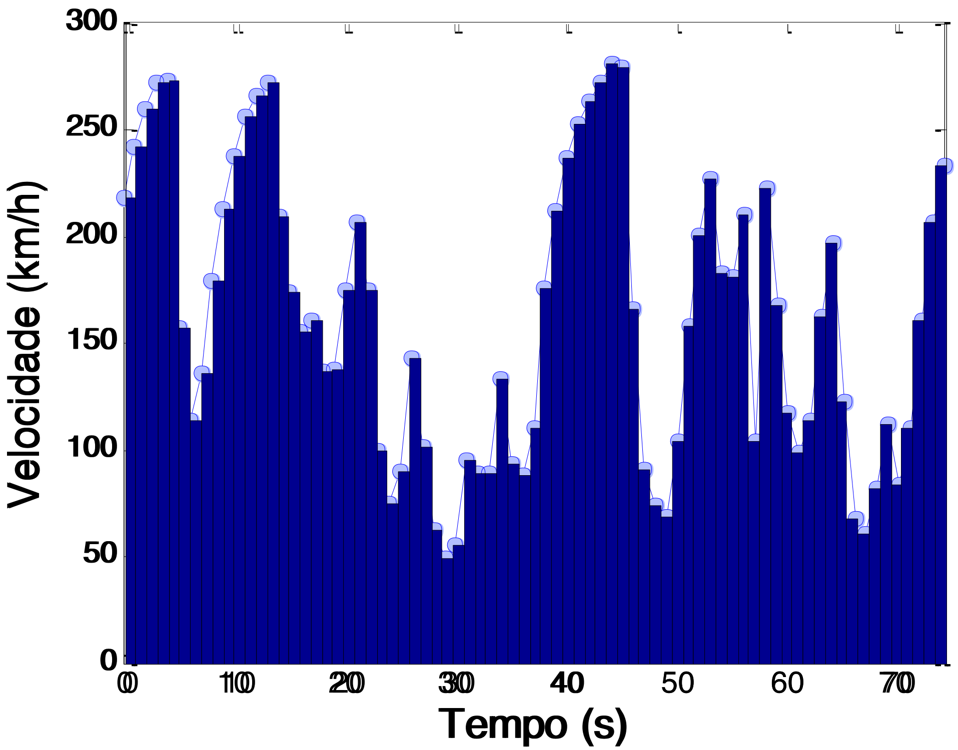
Tempo	Velocidade	Tempo	Velocidade	Tempo	Velocidade
0	218	25	90	50	104
1	242	26	143	51	158
2	260	27	101	52	200
3	272	28	62	53	227
4	273	29	49	54	183
5	157	30	55	55	181
6	114	31	95	56	210
7	136	32	89	57	104
8	179	33	89	58	223
9	213	34	133	59	168
10	238	35	93	60	117
11	256	36	88	61	99
12	266	37	110	62	114
13	272	38	176	63	162
14	209	39	212	64	197
15	174	40	237	65	123
16	155	41	253	66	68
17	161	42	263	67	61
18	137	43	272	68	82
19	138	44	281	69	112
20	175	45	279	70	84
21	207	46	166	71	110
22	175	47	91	72	161
23	100	48	74	73	207
24	75	49	69	74	233

Link: http://www.youtube.com/watch?v=boQqf49sd8g&feature=related

Distância Percorrida e Velocidade Escalar Média

$$\boxed{v(t)=\frac{dx(t)}{dt}} \quad \text{e} \quad \boxed{x(t)-x_0=\int_{t_0}^{t} v(t')dt'}$$

Área sob a curva = deslocamento



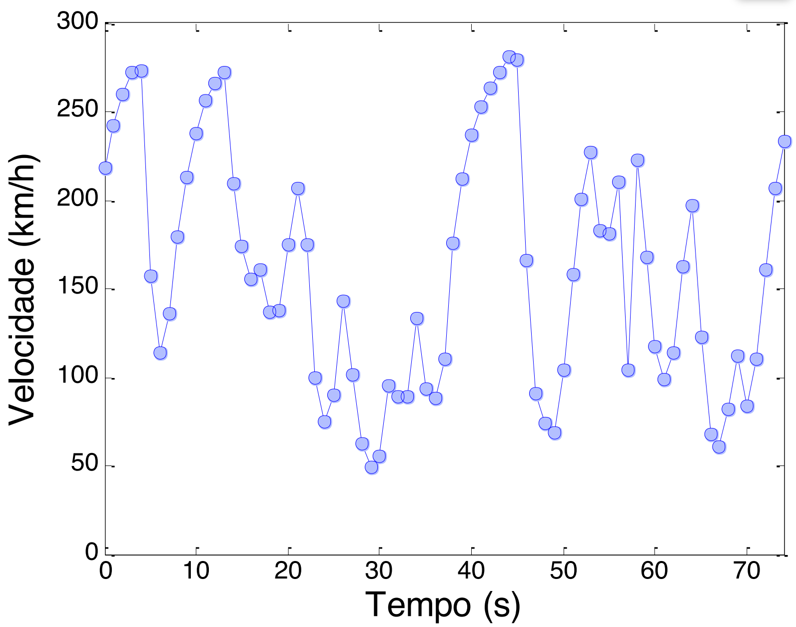
1 volta = 3.35km!!!!!

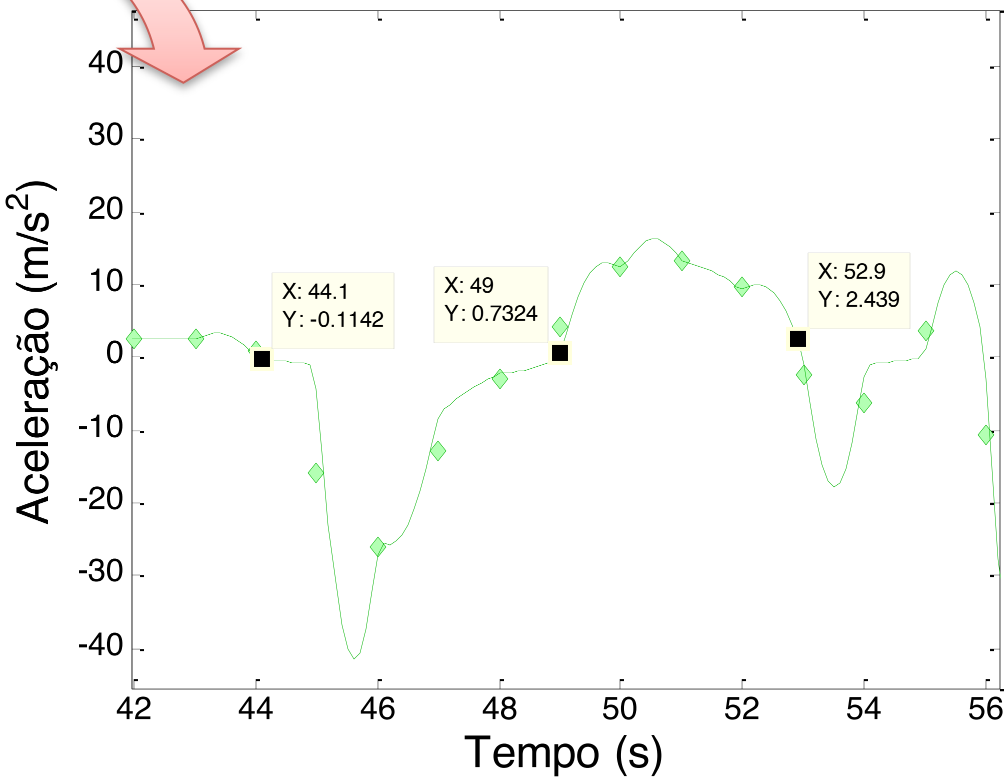
$$v_{em}=\frac{\text{distância total}}{\Delta t}=\frac{3.35\,\text{km}}{74\text{s}}\times\frac{3600\,\text{s}}{1\text{h}}=163\text{km/h}$$

Aceleração

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Deriva

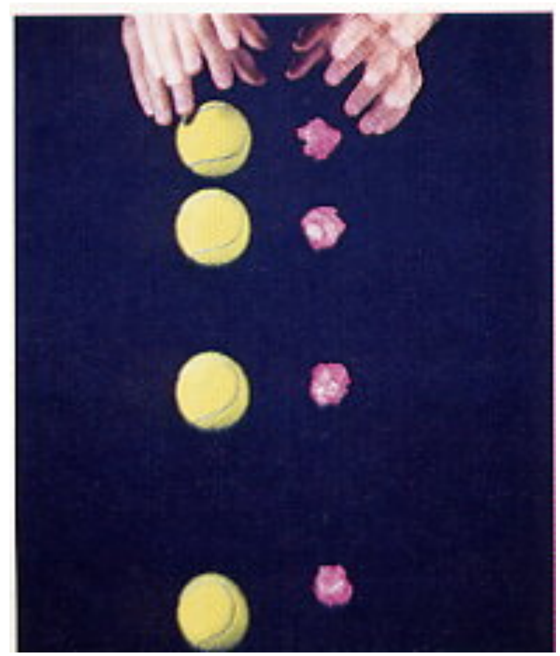




Aceleração da gravidade

Galileu, o primeiro físico moderno, estudou a queda dos corpos. Refutou as hipóteses de Aristóteles.

Através de experimentos, mostrou que os corpos caem com a mesma velocidade (aceleração), independentemente de sua massa.

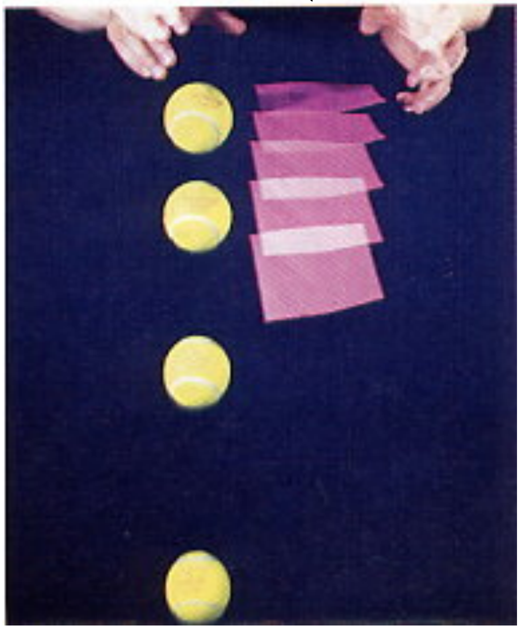


$x \sim t^2$, $v \sim t$: consequências de uma aceleração constante!

Aceleração da gravidade

a resistência do ar!!

Mas... devemos notar que há, em geral, outras forças atuando no corpo em queda considerado, o que pode frustrar uma experiência se não formos suficientemente cuidadosos.



Resumo: aceleração constante (-g)

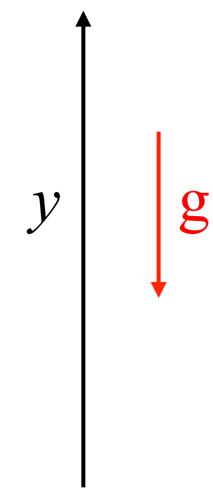
As equações de movimento para o caso da aceleração da gravidade -g são (ao longo do eixo y):

$$v = v_0 - gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g\left(y - y_0\right)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}\left(v_0 + v\right) t$$



Todo objeto em *queda livre* fica sujeito a uma aceleração dirigida *para baixo*, qualquer que seja seu movimento inicial (objetos atirados para cima ou para baixo ou aqueles soltos a partir do repouso).

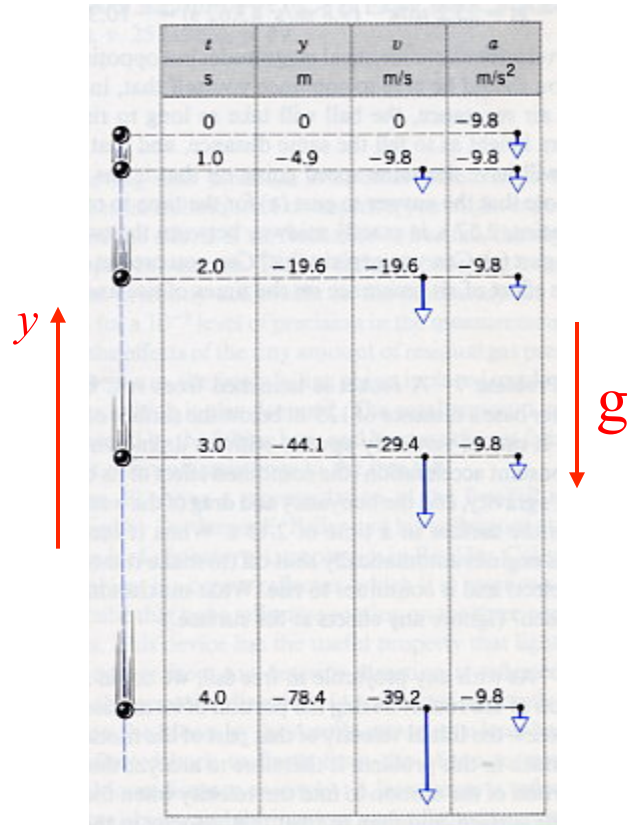
Exemplo 2

Um corpo cai livremente a partir do repouso; calcule a sua posição e sua velocidade em t = 1,0, 2,0 e 3,0 s.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{e} \quad v = -gt$$

Em t = 1,0 s:
y = - 4,9 m e v = -9,8m/s

Continuando, obtenha os resultados da tabela ao lado.



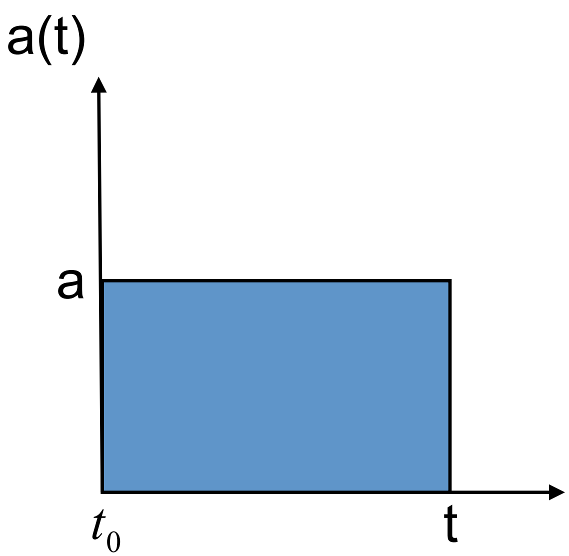
t (s)	y (m)	v (m/s)	a (m/s^2)
0	0	0	−9.8
1.0	−4.9	−9.8	−9.8
2.0	−19.6	−19.6	−9.8
3.0	−44.1	−29.4	−9.8
4.0	−78.4	−39.2	−9.8

O cálculo de v(t) a partir de a(t)

Este é novamente o problema inverso. Considere inicialmente o caso de aceleração constante. Então:

$$v - v_0 = a(t - t_0)$$

Note que $a(t\text{-}t_0)$ é a área sob a curva da aceleração $a(t)$ = constante em função do tempo.



Este também é um resultado geral. Para demonstrá-lo, usaremos que para intervalos de tempo muito curtos podemos escrever

$$\Delta v = a(t)\,\Delta t$$

onde $a(t)$ é a aceleração instantânea no instante t.

O cálculo de v(t) a partir de a(t)

Dividimos o intervalo $(t\text{-}t_0)$ em um número grande N de pequenos intervalos Δt .

$$\Delta v_i \approx a(t_i)\ \Delta t$$

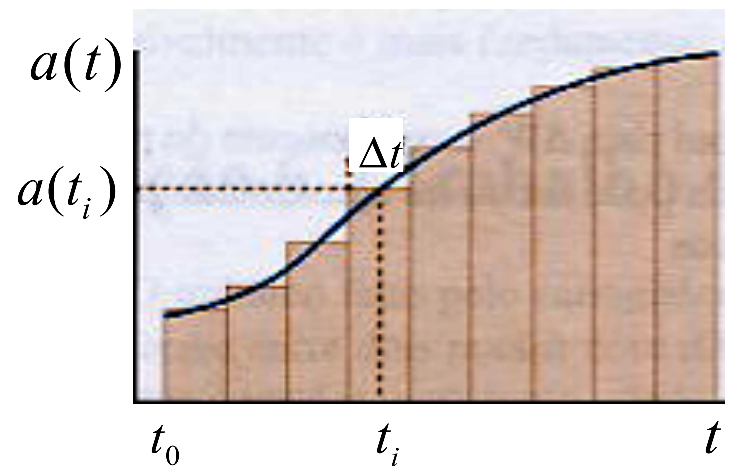
$$\Downarrow$$

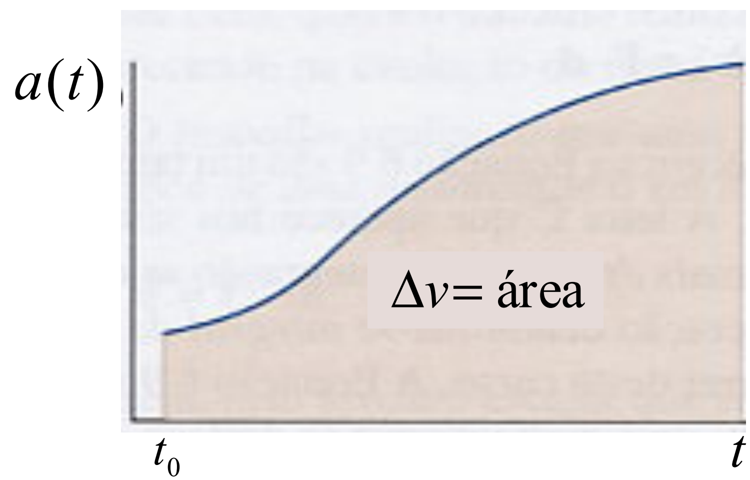
$$v(t)\ - v(t_0) = \sum_i \Delta v_i =$$

$$\sum_i a(t_i)\Delta t$$

No limite N → ∞ e $\Delta t \to 0$:

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t')dt'$$





O cálculo de v(t) a partir de a(t)

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \qquad \text{e} \qquad v(t) - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

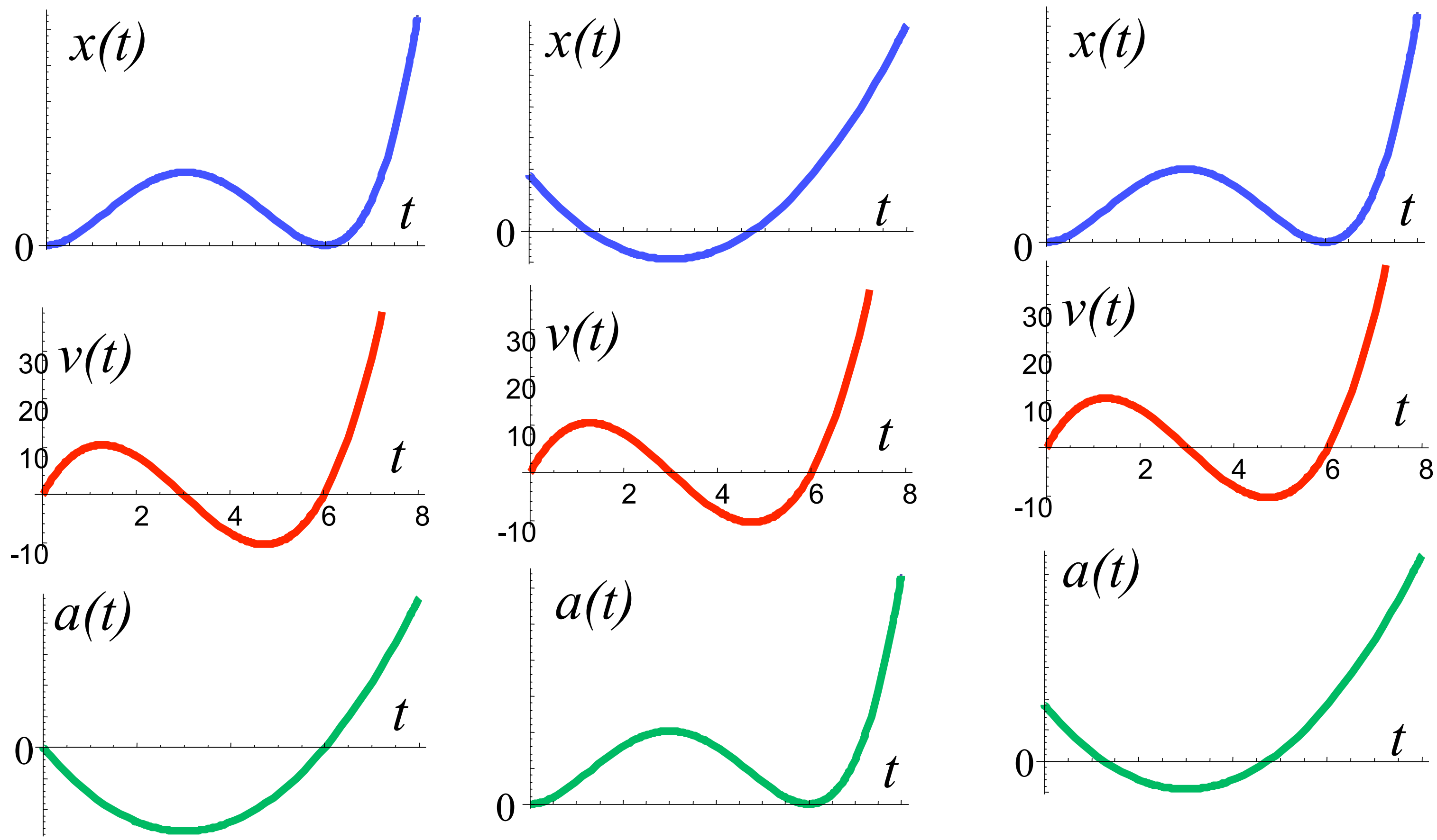
A aceleração é obtida derivando-se a velocidade; geometricamente, é o coeficiente angular da reta tangente à curva da velocidade em função do tempo no instante considerado.

A velocidade é obtida pela anti-derivação (ou integração) da aceleração; geometricamente, a variação de velocidade é igual à área sob a curva da aceleração em função do tempo.

Questão 4

Baseado na curva da velocidade em função do tempor e sabendo que em $x=0$ para $t=0$, escolha os gráficos de posição e aceleração que melhor representam o movimento desta partícula.

1. I
2. II
3. III
4. NDA



Movimento relativo 1D

Dadas as posições x_A e x_B de dois corpos A e B em relação a uma origem 0 (referencial), a posição relativa de A em relação a B é dada por:

$$x_{AB} = x_A - x_B$$

Então, a velocidade relativa v_{AB} de A em relação a B é:

$$v_{AB} = \frac{dx_{AB}}{dt} = \frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_B}{dt} = v_A - v_B$$

E a aceleração relativa a_{AB} de A em relação a B é:

$$a_{AB} = \frac{dv_{AB}}{dt} = a_A - a_B$$

Alternativamente, podemos escrever: $\begin{cases} v_A = v_{AB} + v_B \\ a_A = a_{AB} + a_B \end{cases}$

Regra mnemônica: $v_{AT} = v_{A\cancel{B}} + v_{\cancel{B}T}$

Referencial Relativo: Exemplo

Link: http://www.youtube.com/watch?v=ullR3nN8x8w&hd=1

Ao fazer o reabastecimento aéreo, os dois aviões têm velocidade relativa próxima de zero.

http://www.youtube.com/watch?v=AJMVTqRWHC4