Aula 3
Escalares e Vetores

Física Geral I
F -128

2º semestre, 2012

QC1: Vetor vs Escalar

Quais das quantidades abaixo **não** podem ser **completamente descritas** por um escalar?

A. massa
B. volume
C. área
D. velocidade instantânea
E. velocidade escalar média

Grandezas Escalares e Vetoriais

Uma grandeza física é um escalar quando pode ser caracterizada apenas por um número, sem necessidade de associar-lhe alguma orientação.

Exemplos:

- –Massa de uma bola: 0,25 kg
- –Tempo para a massa mover-se de uma certa distância
- –Temperatura (lida no termômetro)
- –Energia de um corpo
- –Carga elétrica

Algumas grandezas escalares são sempre positivas (ex: massa). Outras podem ter os dois sinais (ex: carga elétrica).

Escalar vs. Vetor

- Algumas grandezas NÃO podem ser descritas por escalares.

- Para a velocidade importa não só o seu valor, por exemplo 2m/s, mas também a direção do movimento.

- Definição:
  - Quantidades descritas por uma magnitude (sempre positiva) e uma direção e sentido são chamadas VETORES.

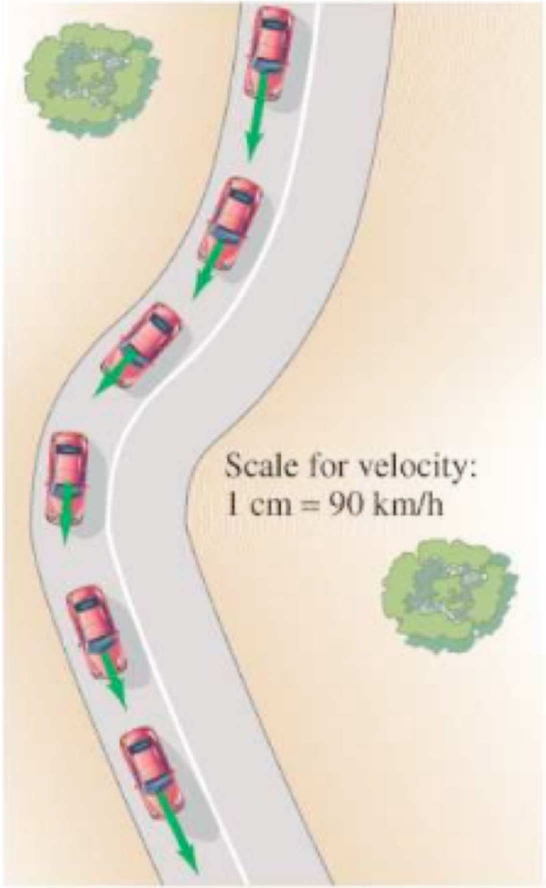
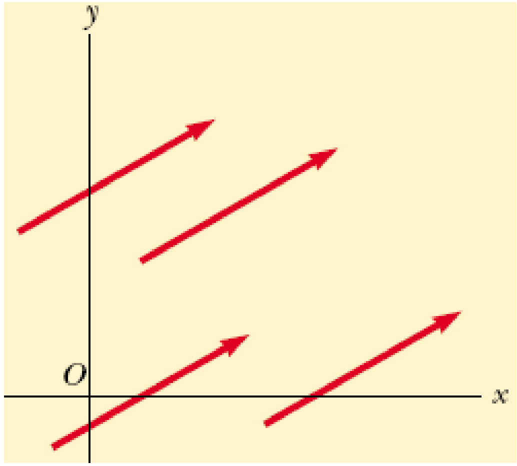


FIGURE 3–1 Car traveling on a road. The green arrows represent the velocity vector at each position.

Vetores

Uma grandeza vetorial possui não apenas um módulo (ou intensidade), mas também uma direção e um sentido. Deve, pois, ser representada por um vetor.



A velocidade é uma grandeza vetorial. Para especificá-la, não basta dar apenas o seu módulo, por exemplo, 20 m/s, mas também sua direção e o sentido do movimento.

Em nosso estudo de Mecânica, veremos outros exemplos importantes de vetores.

Todos os vetores do conjunto mostrado na figura são iguais; para especificar o conjunto, basta tomar apenas um elemento do conjunto.

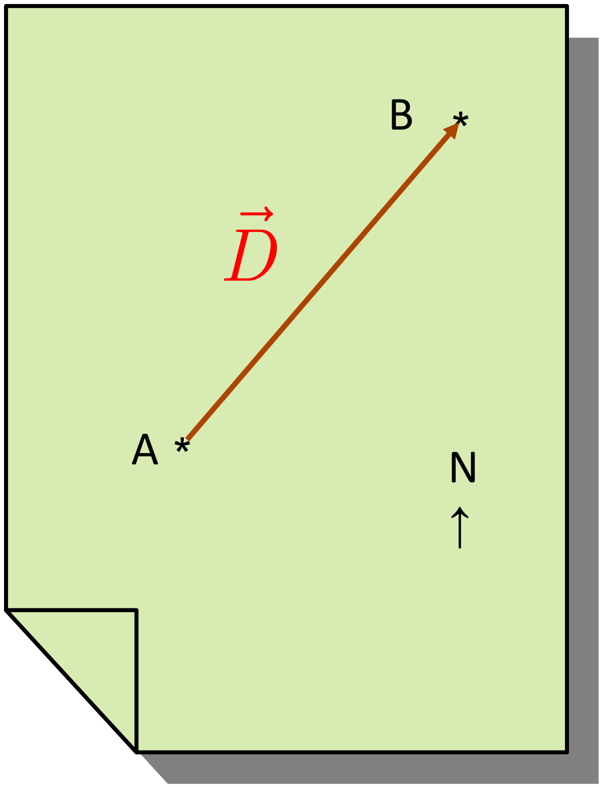
Posição em um mapa

- Você está no ponto A do mapa.
- Deve andar na direção nordeste até o ponto B.
- O deslocamento é um vetor representado por (com seta ou em negrito).

$$\vec{D} \text{ ou } \mathbf{D}$$

- Cujo módulo é representado por:

$$D \text{ ou } |\vec{D}|$$

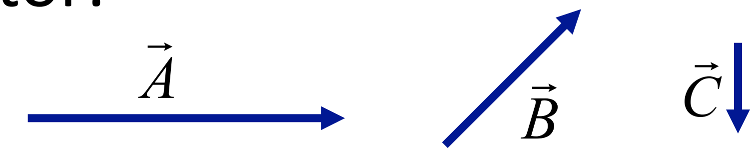


Exemplo de vetor: deslocamento num mapa

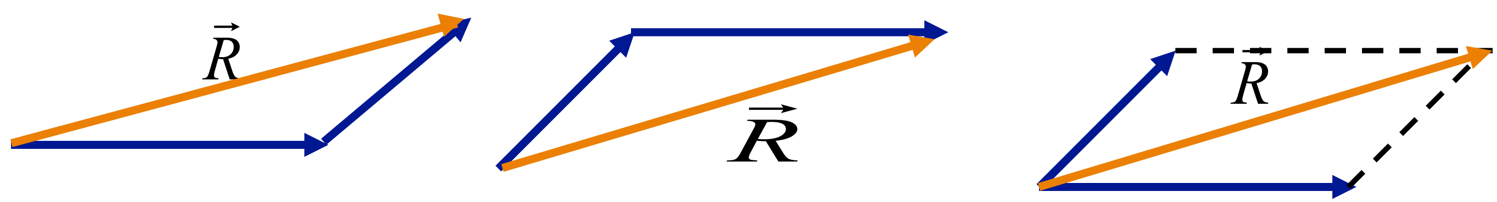
Soma de dois ou mais vetores

A soma de dois vetores é um vetor:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$



Note que $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ (a soma é comutativa)

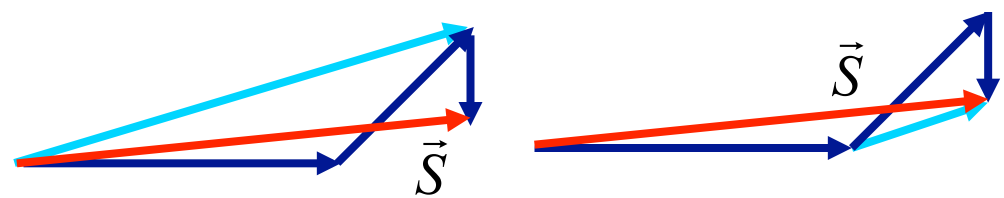


Soma de mais de dois vetores:

$$\vec{S}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

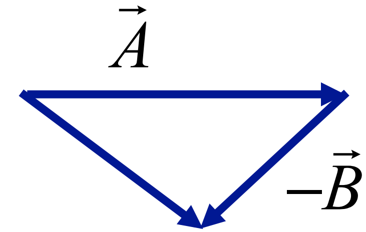
Note que:

$$\vec{S}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$



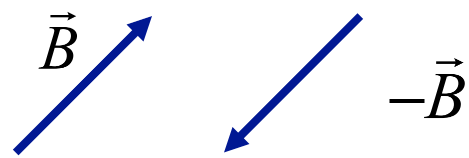
Subtração de Vetores

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$

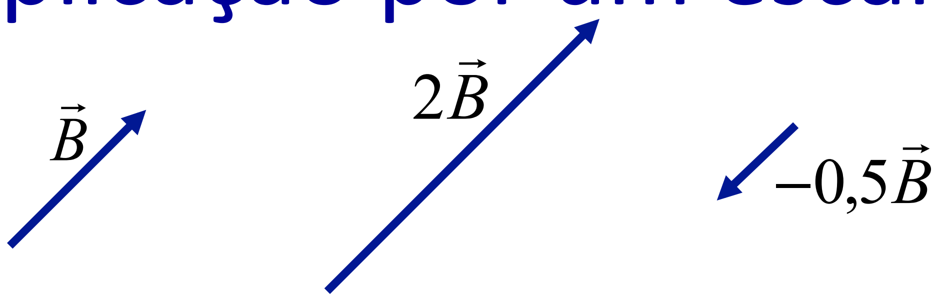


O vetor nulo ($\vec{0}$) tem módulo zero e não tem direção e sentido definidos.

$$\vec{0}=\vec{B}+(-\vec{B})$$



Multiplicação por um escalar



QC2: Soma vetorial

A. I 

B. II 

C. III 

D. IV 

E. V 

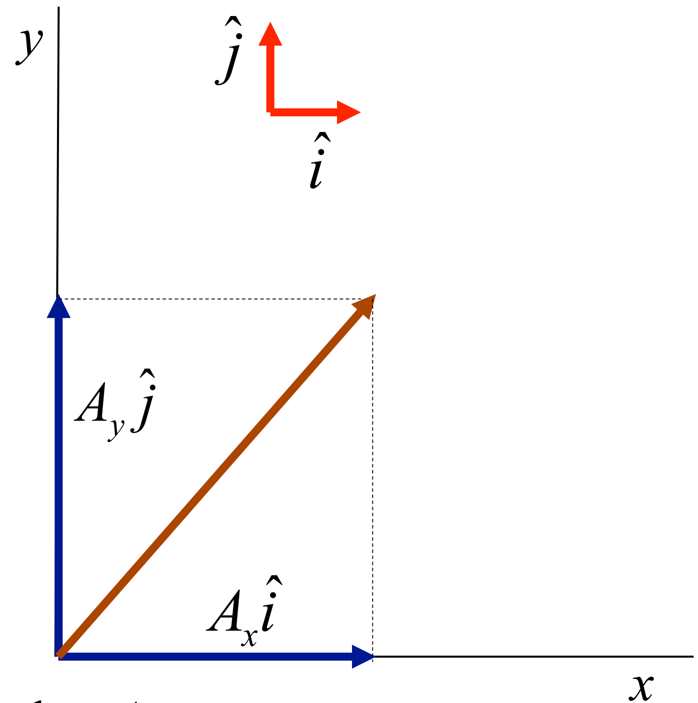
Qual dos vetores ao lado melhor representa a soma vetorial de A e B?

Componentes de um vetor

Um vetor $\vec{A}$ pode ser decomposto em uma soma da forma:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

onde A_x e A_y são definidos como as componentes escalares do vetor $\vec{A}$ e $\hat{i}$ e $\hat{j}$ são os versores (vetores unitários) das direções x e y, respectivamente).



Se representarmos um vetor por um negrito: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y$

$\boldsymbol{A}_x$ e $\boldsymbol{A}_y$ são as componentes vetoriais de $\boldsymbol{A}$.

Representação polar de um vetor

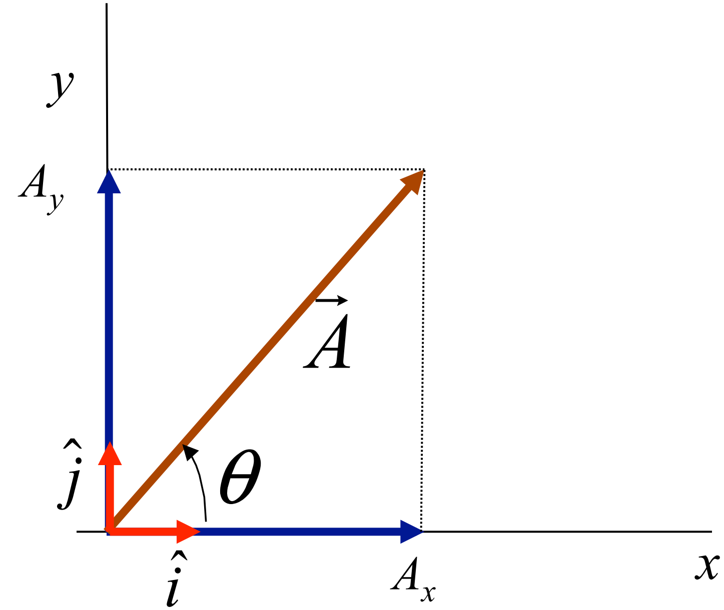
As componentes A_x e A_y são as chamadas componentes cartesianas do vetor $\vec{A}$.

Podemos ainda definir um outro conjunto de coordenadas para descrever um vetor no plano: as chamadas coordenadas polares, dadas pelo módulo do vetor $\vec{A}$:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

e pelo seu ângulo polar

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$



Relações: $\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

Soma de vetores usando componentes cartesianas

Se $\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}, \end{cases}$

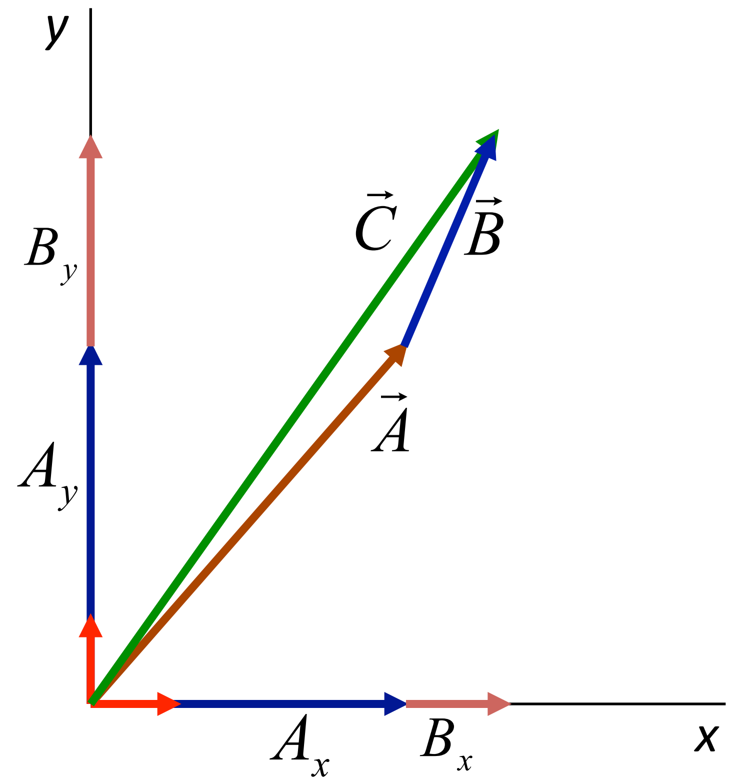
o vetor $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ será dado em componentes cartesianas por:

$$\vec{C} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

$$= C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$$

onde: $\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}$



QC3: Módulo vetorial

Ordene os vetores abaixo, de forma crescente (menor para o maior), de acordo com seu módulo.

A. 3i+4j
B. 4i+4j
C. 8i+1j
D. 6j
E. 7i

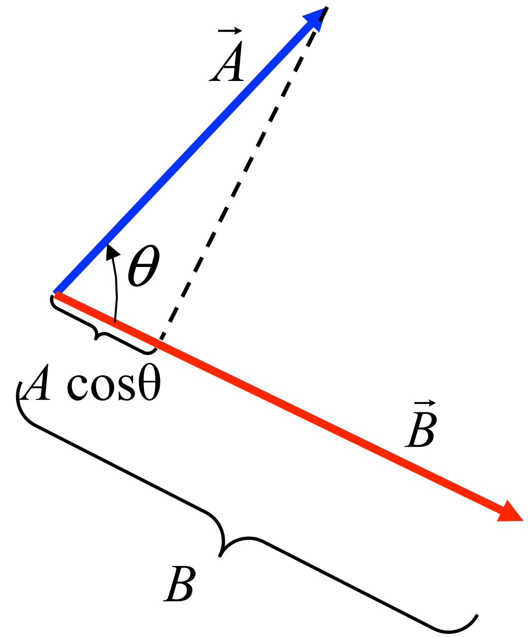
Produto escalar de dois vetores

Definição: $$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\theta)}$$

onde θ é o ângulo formado entre as direções de $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Geometricamente, projeta-se $\vec{A}$ na direção de $\vec{B}$ e multiplica-se por B (ou vice-versa). Então:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A\cos\theta)B = (B\cos\theta)A$$



Propriedades do produto escalar

O produto escalar **é** comutativo:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

O resultado do **produto escalar** entre dois vetores é um **escalar**.

http://www.falstad.com/dotproduct/

http://demonstrations.wolfram.com/DotProduct/

Produto escalar usando componentes

Devido à *distributividade* do produto escalar de dois vetores, podemos escrevê-lo em termos das suas compo nentes cartesianas:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) =$$

$$= A_x B_x \hat{i}\cdot\hat{i} + A_x B_y \hat{i}\cdot\hat{j} + A_x B_z \hat{i}\cdot\hat{k} +$$

$$+ A_y B_x \hat{j}\cdot\hat{i} + A_y B_y \hat{j}\cdot\hat{j} + A_y B_z \hat{j}\cdot\hat{k} +$$

$$+ A_z B_x \hat{k}\cdot\hat{i} + A_z B_y \hat{k}\cdot\hat{j} + A_z B_z \hat{k}\cdot\hat{k}$$

Mas como: $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ e $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{i}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{j} = 0$,

teremos: $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_Z$

QC4: Produto Escalar

Qual dos produtos escalares abaixo é diferente de zero?

A. $(5\hat{i})\cdot(10\hat{j})$

B. $(1\hat{i}-1\hat{j})\cdot(1\hat{i}+1\hat{j})$

C. $(1\hat{i}-2\hat{j})\cdot(2\hat{i}+1\hat{j})$

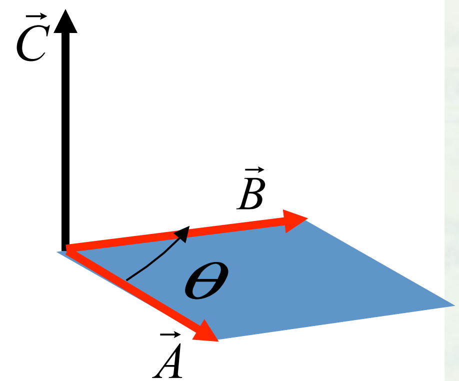
D. $10\hat{i}\cdot(2\hat{i}+1\hat{j})$

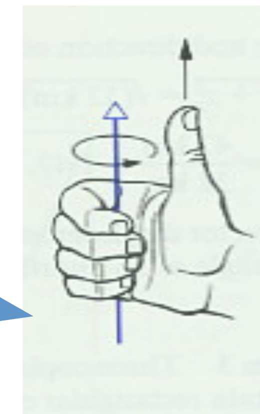
E. $10\hat{i}\cdot(2\hat{k}+1\hat{j})$

Produto vetorial de dois vetores

Definição: o produto vetorial de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ representado por $\vec{A}\times\vec{B}$, é um vetor $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ tal que:

i) a direção de $\vec{C}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$;

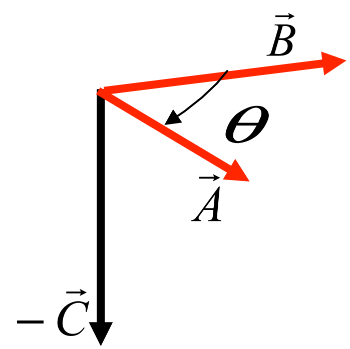


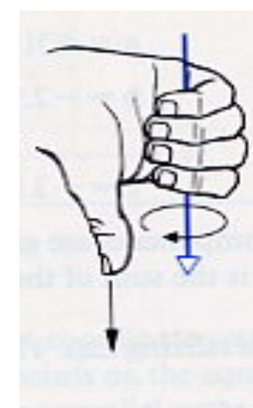


ii) o seu módulo é igual à área do paralelogramo formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$C = A\,B\,sen\,\theta$$

iii) o seu sentido obedece à regra da mão direita (figura) ou do saca-rolhas.





Propriedades do produto vetorial

O produto vetorial não é comutativo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

O **produto vetorial** entre dois vetores **é um vetor** perpendicular ao plano formado pelos 2 vetores.

http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html

Produto vetorial usando componentes

O produto vetorial também é distributivo.
Podemos escrevê-lo em termos das suas componentes cartesianas como:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) =$$

$$A_xB_x(\hat{i}\times\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}\times\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}\times\hat{k}) + \ldots$$

$$+ A_yB_x(\hat{j}\times\hat{i}) + A_yB_y(\hat{j}\times\hat{j}) + A_yB_z(\hat{j}\times\hat{k}) + \ldots$$

$$+ A_zB_x(\hat{k}\times\hat{i}) + A_zB_y(\hat{k}\times\hat{j}) + A_zB_z(\hat{k}\times\hat{k})$$

Mas como $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$ e

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j},\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$, teremos:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{k}$$

O produto vetorial e o determinante

Outra forma de se escrever o produto vetorial de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é através do determinante da matriz formada pelos versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ e pelas componentes cartesianas dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ ao longo das suas linhas:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

Exemplo 1:

Dados os vetores:

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{k}\ ,$$

calcule:

a) $\vec{a} + \vec{b} \rightarrow \quad 6\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

b) $\vec{a} - \vec{b} \rightarrow \quad -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \quad 8(\hat{i}\cdot\hat{i}) - 3(\hat{k}\cdot\hat{k}) = 5$

d) $\vec{a} \times \vec{b} \rightarrow \quad -6(\hat{i} \times \hat{k}) - 8(\hat{j} \times \hat{i}) + 6(\hat{j} \times \hat{k}) + 4(\hat{k} \times \hat{i}) =$

$$-6(-\hat{j}) - 8(-\hat{k}) + 6(\hat{i}) + 4(\hat{j}) =$$

$$6\hat{i} + 10\hat{j} + 8\hat{k}$$

e) o ângulo formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. $\rightarrow \quad \theta = Arc\cos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a.b}\right) =$

$$= Arc\cos(1/3) = 70.5^o$$

Exemplo 2:

Considere o vetor $\vec{A}$, tal que $A > 1$. O vetor unitário que aponta na direção de $\vec{A}$ é dado por:

a) $\dfrac{|\vec{A}|}{\vec{A}}$

b) $\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

c) $|\vec{A}|\vec{A}$

d) $\dfrac{1}{|\vec{A}|\vec{A}}$