Aula 4
Movimento em duas e três dimensões

Física Geral I
F -128

Movimento em 2D e 3D

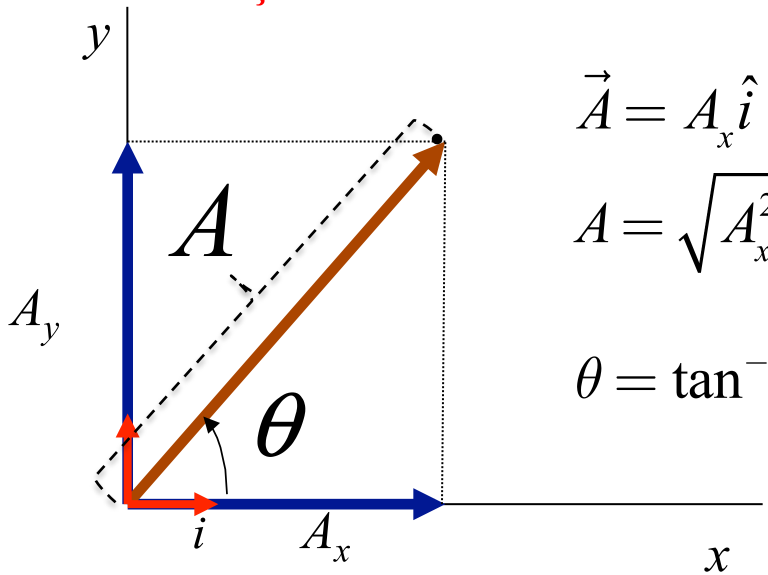
- Cinemática em 2D e 3D
- Exemplos de movimentos 2D e 3D
  - Aceleração constante
    - aceleração da gravidade
  - Movimento circular
    - movimento circular uniforme
    - movimento helicoidal
- Movimento relativo

Escalar vs. Vetor

Recapitulando a aula 3…

- **Escalar:** *grandeza sem direção associada, caracterizada apenas por um número.*
    - Massa de uma bola, 0.25 kg.
    - Tempo para a massa se mover uma distância
    - Energia de um corpo.
- Algumas grandezas escalares são sempre positivas (massa). Outras podem ter os dois sinais.

- **Vetor:** *quantidades descritas por uma magnitude (sempre positiva) e uma direção (sentido implícito).*
- Para a velocidade, por exemplo, importa não só o seu valor, por exemplo 2 m/s, mas também a direção do movimento.



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

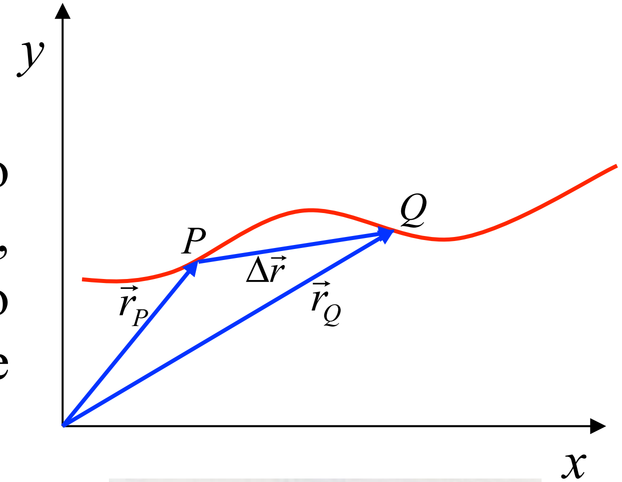
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Vetores dependentes do tempo

Na natureza há inúmeros exemplos de grandezas vetoriais que variam no tempo. Estamos interessados na posição e deslocamento de um corpo em movimento bidimensional ou tridimensional, e na velocidade e aceleração deste corpo.

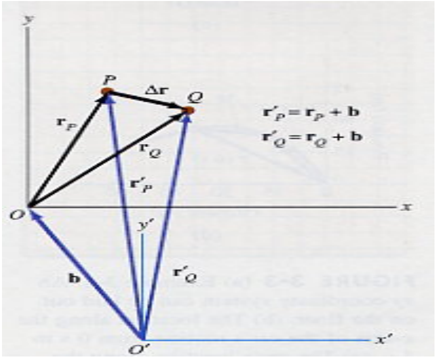
Posição e deslocamento



A trajetória é o lugar geométrico dos pontos do espaço ocupados pelo objeto (planeta, cometa, foguete, carro etc) que se movimenta. Qualquer ponto da trajetória pode ser descrito pelo vetor posição que denotamos por $\vec{r}(t)$.

O deslocamento $\Delta\vec{r}$ entre os pontos $\vec{r}_Q$ e $\vec{r}_P$ é dado por:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$$

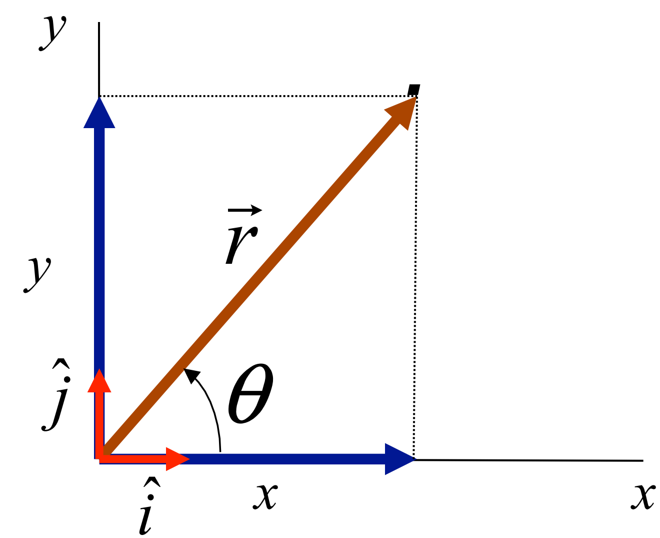


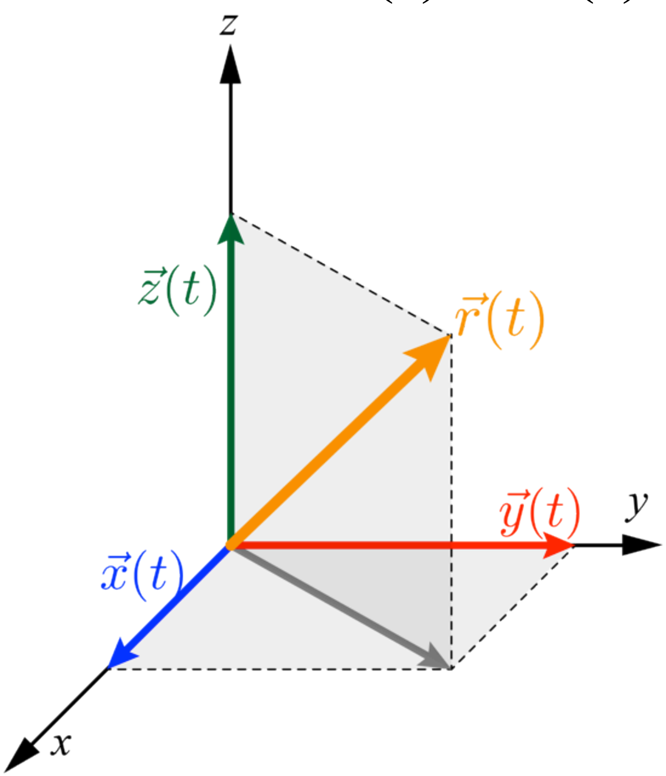
Note que $\Delta\vec{r}$ não depende da origem.

Posição e Deslocamento

O vetor posição em 2D fica definido em termos de suas coordenadas cartesianas por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$





No caso espacial, 3D, temos:

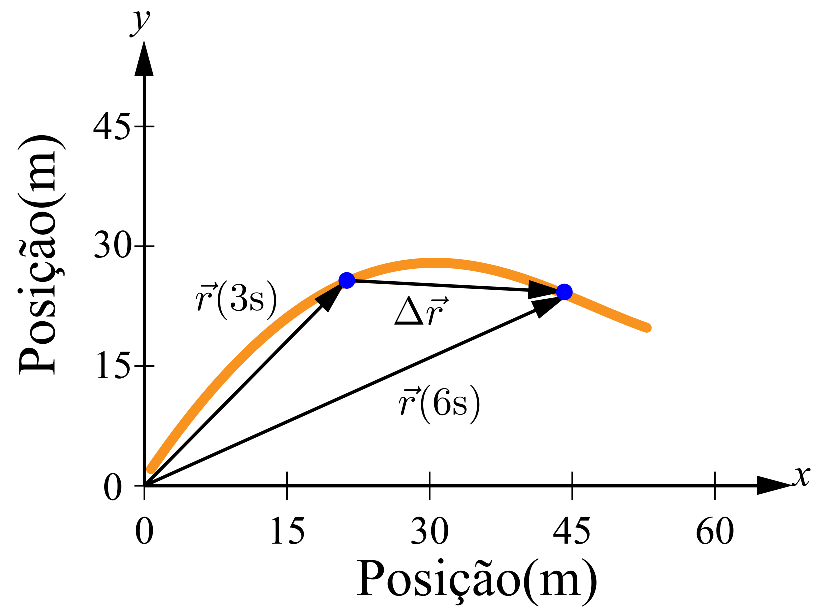
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Posição e Deslocamento

Exemplo: um ponto na trajetória de um móvel é dado pelas equações (em unidades SI):

$$\begin{cases} x(t) = 0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5 \\ y(t) = -1{,}0t^2 + 10{,}0t + 2{,}0 \end{cases}$$

Calcular o deslocamento entre 3 e 6 s:



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(6) - \vec{r}(3)$$

em t = 3 s : $x(3) = 17$ m e $y(3) = 23$ m

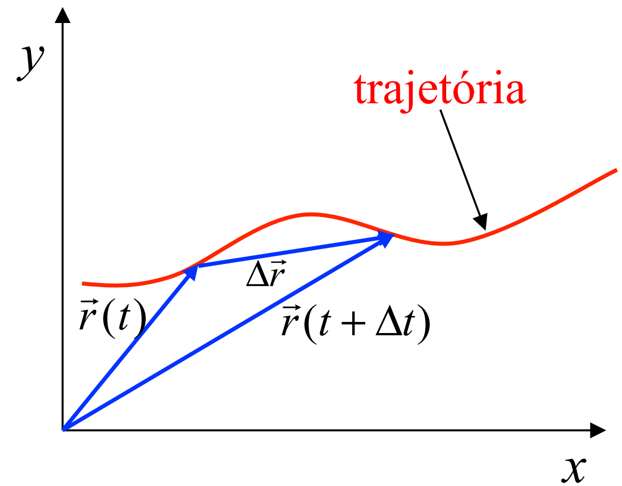
em t = 6 s : $x(6) = 38$ m e $y(6) = 26$ m

Daí: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(6) - \vec{r}(3) \cong (21\hat{i} + 3\hat{j})$m

Velocidade

Como no caso unidimensional, o vetor velocidade média é:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$



O vetor velocidade instantânea é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1)$$

Em termos de componentes cartesianas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \qquad \text{ou:} \quad \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

<u>Decorrências da definição (1):</u>

a) $\vec{v}$ é sempre tangente à trajetória;

b) $|\vec{v}|$ coincide com o módulo da velocidade escalar definida anteriormente.

Aceleração

Novamente como no caso 1D, a aceleração média é:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_m = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}(t+\Delta t) - \vec{\boldsymbol{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{j}}$$

A aceleração instantânea é:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{v}}(t+\Delta t) - \vec{\boldsymbol{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} \qquad (2) \qquad \text{ou:} \qquad \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt^2}$$

Em termos de componentes cartesianas:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\boldsymbol{j}} \qquad \text{ou:} \qquad \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

<u>Decorrências da definição (2):</u>

a) a aceleração resulta de *qualquer variação* do vetor velocidade (quer seja do módulo, da direção ou do sentido de $\vec{v}$);

b) O vetor aceleração está sempre voltado para o "interior" da trajetória.

Velocidade e Aceleração

Voltando ao exemplo do móvel, as componentes do vetor velocidade são:

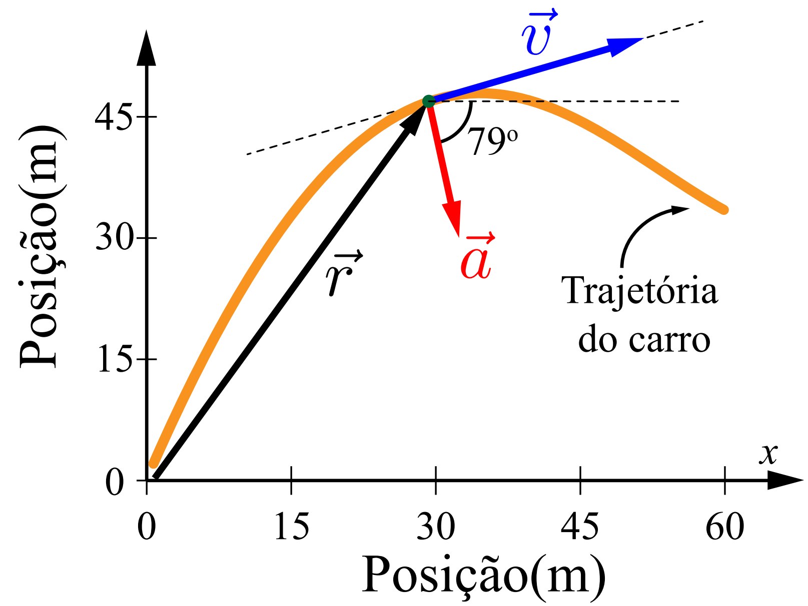
$$\begin{cases} x(t) = 0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5 \\ y(t) = -1{,}0t^2 + 10{,}0t + 2{,}0 \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5) = 0{,}4t + 5{,}0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-1{,}0t^2 + 10t + 2{,}0) = -2{,}0t + 10$$

Em t =3 s:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6{,}2\, m/s \\ \frac{dy}{dt} &= 4{,}0\, m/s \end{aligned}\right\} \vec{v} = (6{,}2\hat{i} + 4{,}0\hat{j})\, m/s$$



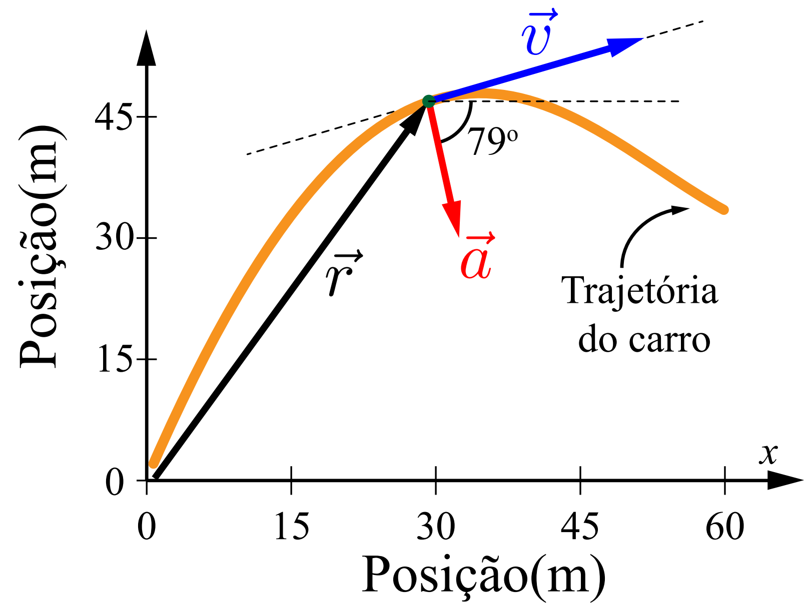
$\vec{v}$ é tangente à trajetória!

Velocidade e Aceleração

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5) = 0{,}4t + 5{,}0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-1{,}0t^2 + 10t + 2{,}0) = -2{,}0t + 10$$

$$\begin{cases} x(t) = 0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5 \\ y(t) = -1{,}0t^2 + 10{,}0t + 2{,}0 \end{cases}$$



As componentes do vetor aceleração são:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}4t+5) = 0{,}4\,m/s^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-2{,}0t+10) = -2{,}0\,m/s^2$$

$$\vec{a} = (0{,}4\hat{i} - 2{,}0\hat{j})\,m/s^2$$

Módulo:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cong \sqrt{4{,}2} = 2{,}0\,m/s^2$$

Ângulo: $tg\,\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-2{,}0}{0{,}4} = -5{,}0$

$$\theta \cong -79^o$$

O Problema inverso

Conhecida a aceleração $\vec{a}(t)$,

podemos integrá-la e obter a velocidade:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')\,dt'$$

que, se integrada, nos fornece o deslocamento:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\,dt'$$

Este processo deve ser efetuado para cada componente cartesiana do vetor considerado.

Q1: Movimento circular uniforme

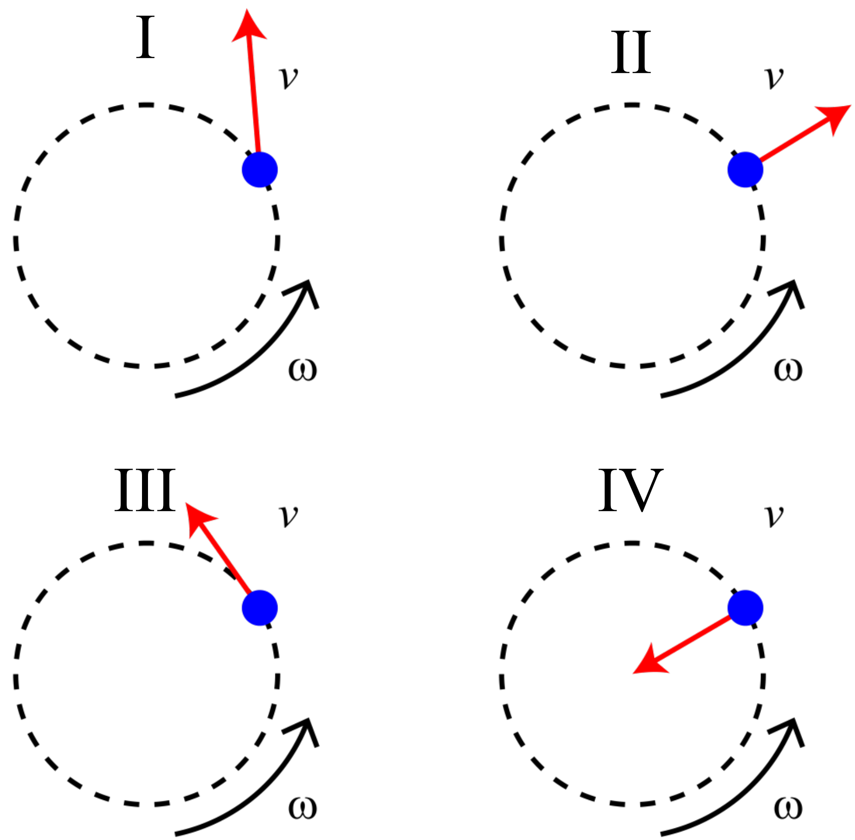
Quais dos vetores abaixo melhor representam a velocidade de uma partícula em um movimento circular uniforme?

A. I

B. II

C. III

D. IV



[MC Types]

F128 – 2o Semestre de 2012

Alguns exemplos de movimentos em 2D e 3D

1. Aceleração constante

Aceleração constante → teremos um movimento no plano definido pelos vetores velocidade inicial e aceleração:

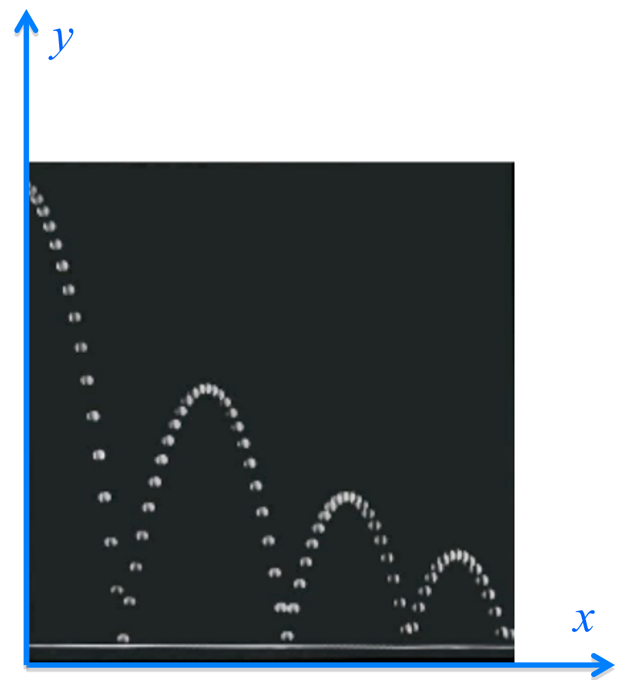
Movimento 2D

Vamos escolher os eixos de tal forma que o movimento se dê no plano xy.

Aceleração constante no plano xy: a_x e a_y constantes ou seja:

2 problemas 1D independentes

Teremos um MRUA na direção x e outro na direção y.



1. Aceleração constante

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\hat{k} \Rightarrow \vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$\Downarrow$$

componente x de $\vec{r}$ $\longrightarrow$ $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

componente x de $\vec{v}$ $\longrightarrow$ $v_x = v_{0x} + a_x t$

componente y de $\vec{r}$ $\longrightarrow$ $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

componente y de $\vec{v}$ $\longrightarrow$ $v_y = v_{0y} + a_y t$

1. Aceleração constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Nesse caso $a_y = -g$ e $a_x = 0$. Na direção x, v_x é constante!

componente x de $\vec{r}$ $\longrightarrow$ $x = x_0 + v_{0x}t$

componente x de $\vec{v}$ $\longrightarrow$ $v_x = v_{0x} = \text{constante}$

componente y de $\vec{r}$ $\longrightarrow$ $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

componente y de $\vec{v}$ $\longrightarrow$ $v_y = v_{0y} - gt$

Em $t = 0$: $\begin{cases} \vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} \\ \vec{v}_0 = \vec{v}_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} \end{cases}$

Nota: $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ são as condições iniciais do movimento.

1. Aceleração constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Se tomamos $x_0 = y_0 = 0$ (saindo da origem):

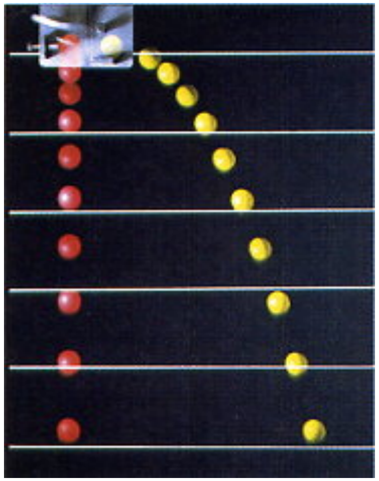
de $x = v_{0x}t$, temos: $t = x/v_{0x}$

Substituindo t na equação para y encontramos a equação da trajetória:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2} x^2$$ (Equação de uma parábola !)

Fotografia estroboscópica do movimento parabólico

O movimento na direção y não depende da velocidade v_x. Na figura ao lado, duas bolas são jogadas sob a ação da gravidade. A vermelha é solta ($v_{0y}=0$) e a amarela tem velocidade inicial horizontal v_{0x}.



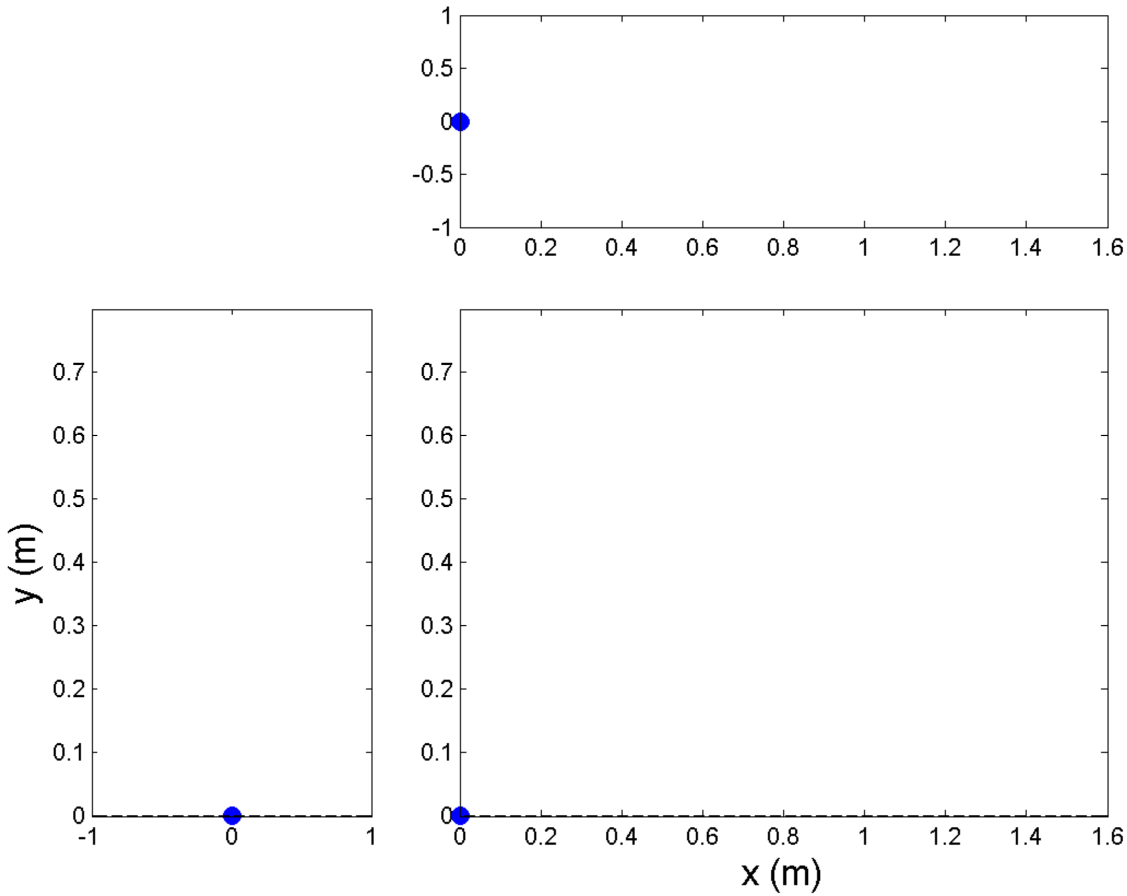
Em qualquer instante elas estão sempre na mesma posição vertical!

1. Aceleração constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Problema do Projétil: Sistema 2D separável em 2 x 1D

http://www.youtube.com/watch?v=NO9c9EM39GM



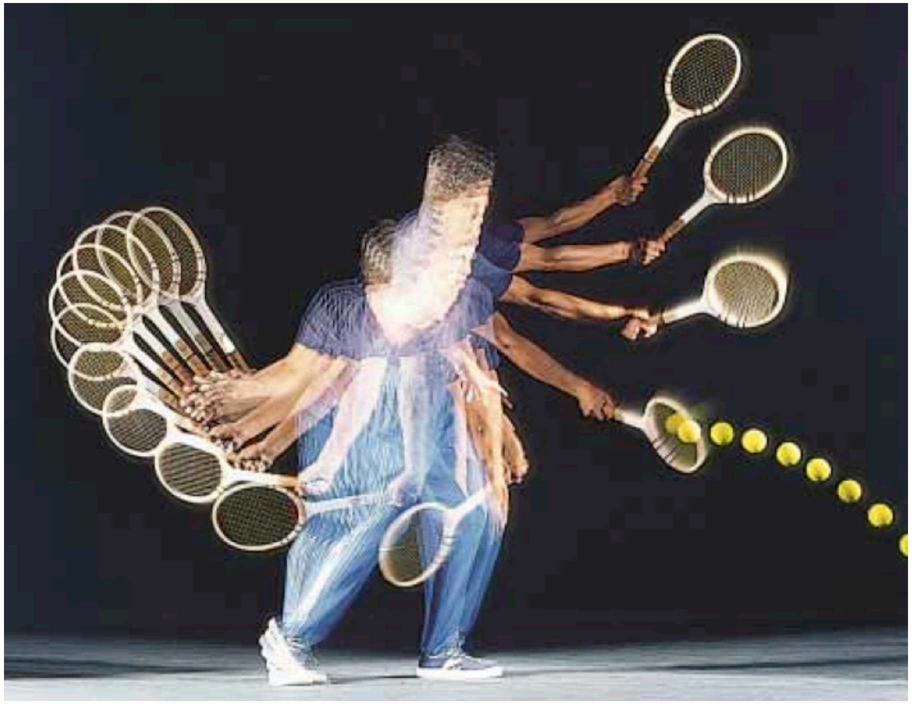
1. Aceleração constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Movimento de Projéteis em esportes:

http://science360.gov/obj/tkn-video/f04949b6-fbf9-4f0a-87b9-91780f9c0951

http://science360.gov/obj/tkn-video/fc729ef0-22ee-4f61-bb2a-b6c07685fb02



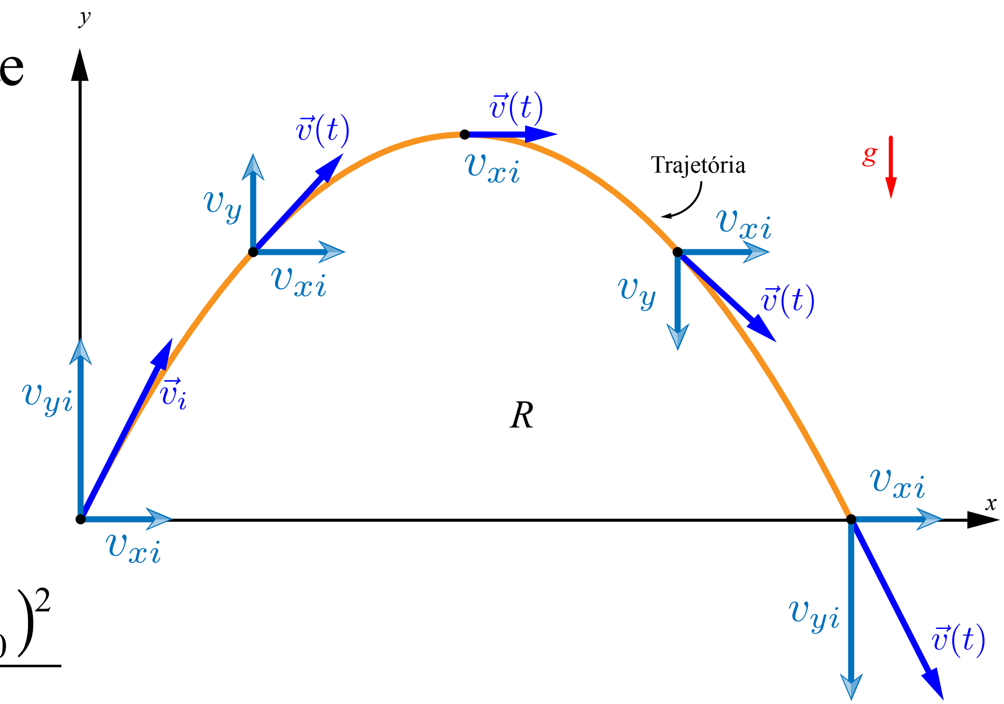
1. Aceleração constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Objeto lançado com velocidade $\vec{v}_0$ ($v_{0x} \neq 0,\ v_{0y} \neq 0$) formando um ângulo θ_0 com a horizontal.

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = \text{constante}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \,\text{sen}\,\theta_0 - gt$$



Tempo para atingir altura máxima h (quando $v_y = 0$):

$$t_h = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \,\text{sen}\,\theta_0}{g}$$

Altura máxima h :

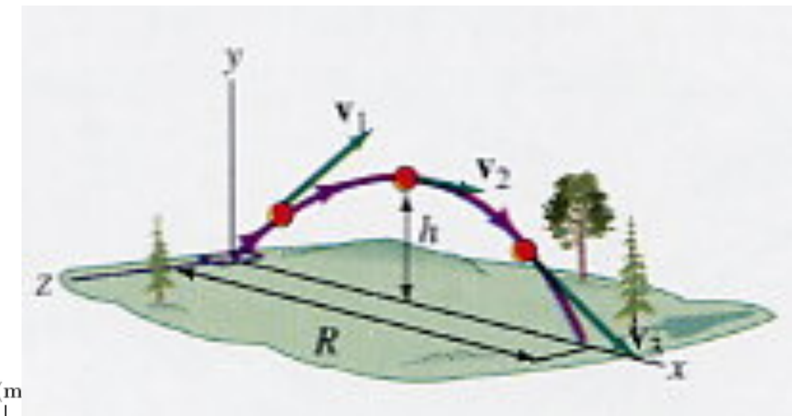
$$h = v_0 \,\text{sen}\,\theta_0 t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 = \frac{(v_0 \,\text{sen}\,\theta_0)^2}{2g}$$

Note que o movimento é simétrico: o corpo leva um tempo t_h para subir e o mesmo tempo t_h para voltar ao mesmo nível.

1. Aceleração constante

Um caso particular: movimento sob aceleração da gravidade

Alcance: distância horizontal percorrida até o objeto voltar à altura inicial : $R = x(2t_h)$



$$R = v_{0x}2t_h = v_0\cos\theta_0\left(\frac{2v_0\mathrm{sen}\,\theta_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{g}\mathrm{sen}\,2\theta_0$$

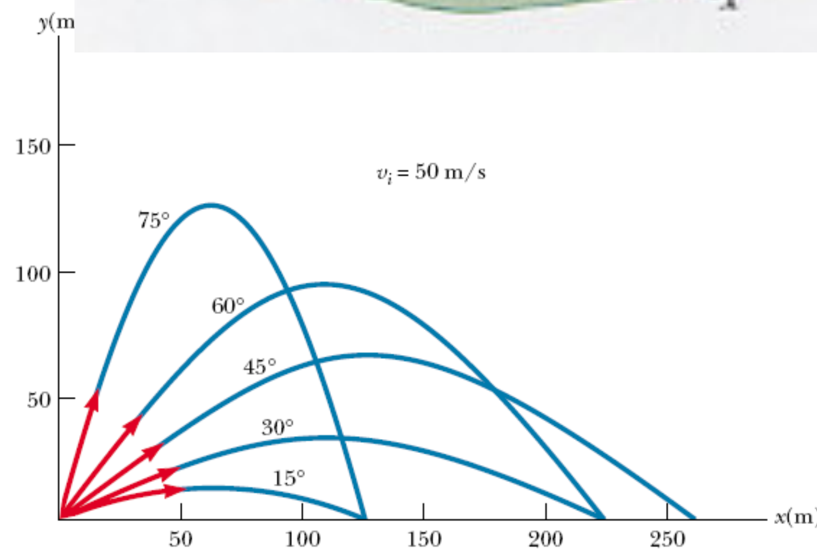
$$R = \frac{v_0^2}{g}\mathrm{sen}\,2\theta_0$$

Para um dado módulo da velocidade inicial, o alcance será máximo para

$$2\theta_0 = \pi/2 \longrightarrow \theta_0 = 45^o$$

Então:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

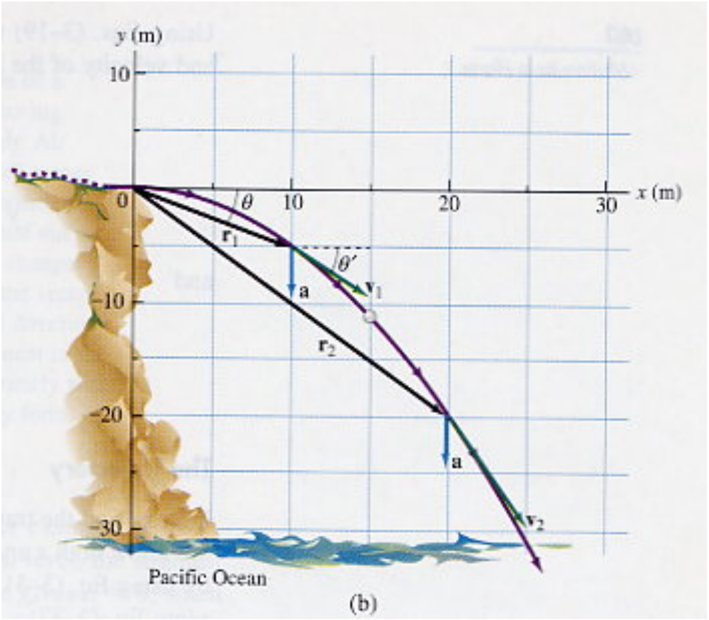


1. Aceleração constante

Exemplo: Bola sai do penhasco com v = 10 m/s na horizontal.
a) descreva o movimento, ou seja, ache $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$ e $y(t)$.

As componentes da velocidade são:
v_x = 10 m/s
v_y = (-9,8 t) m/s

As componentes do vetor posição são:
x = 10 t m
y = (-4,9 t^2) m



b) ache os ângulos θ e θ' de $\vec{r}$ e $\vec{v}$ com a horizontal em t =1,0 s

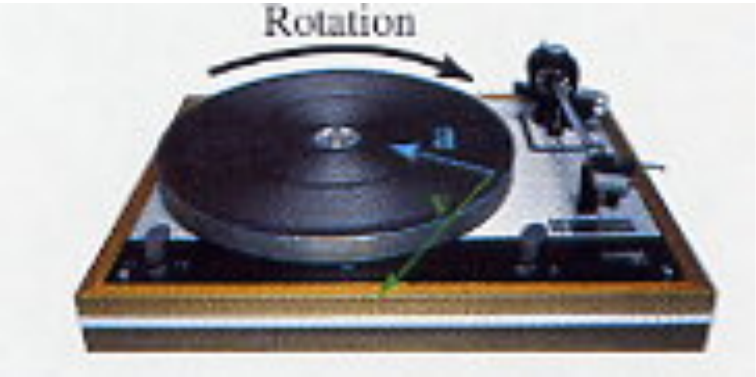
$$\vec{r} = (10t\,\hat{i} - 4{,}9t^2\,\hat{j})\text{m}$$
$$tg\theta = \frac{y}{x} = -0{,}49$$

$$\vec{v} = (10\hat{i} - 9{,}8t\,\hat{j})\text{m/s}$$
$$tg\theta' = \frac{v_y}{v_x} = -0{,}98$$

2. Movimento circular uniforme

Este movimento tem velocidade de módulo constante, porém sua direção muda continuamente.

Exemplos:
Movimento de satélites artificiais;
Pontos de um disco de vitrola;
Pontos de um disco rígido de computador;
Ponteiros de um relógio;
Nós, girando com o movimento da Terra.

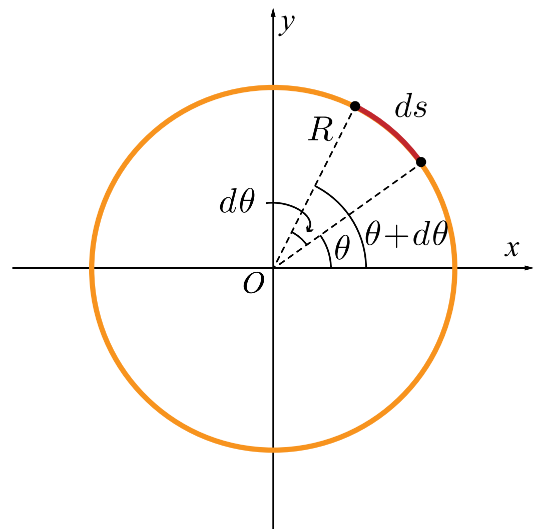


2. Movimento circular uniforme

Para descrever o MCU usamos as coordenadas polares R e θ.

O arco sobre a trajetória que subentende um ângulo θ é: $s = R\theta$.

A posição angular θ é uma função do tempo, $\theta(t)$. O arco descrito em dt é dado por $ds = R\, d\theta$. Então:



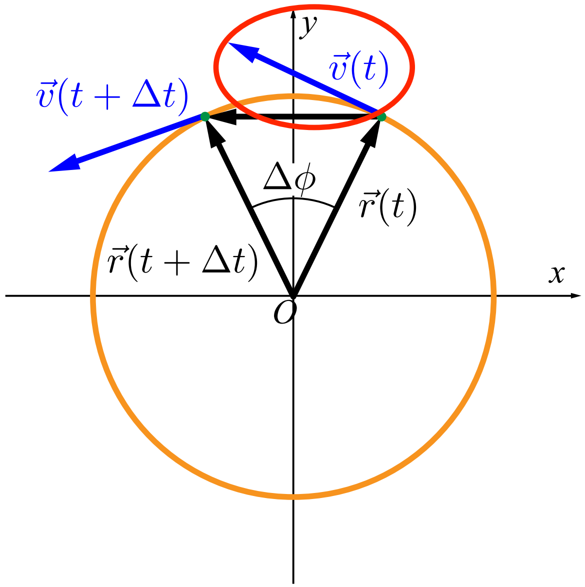
$$\frac{ds}{dt} = v = R\frac{d\theta}{dt}$$ (v: velocidade tangencial)

Definimos assim a velocidade angular ω :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ Então: $\boxed{v = \omega R}$

Se $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \text{cte}$: $\boxed{\theta = \theta_0 + \omega t}$ (Movimento circular uniforme)

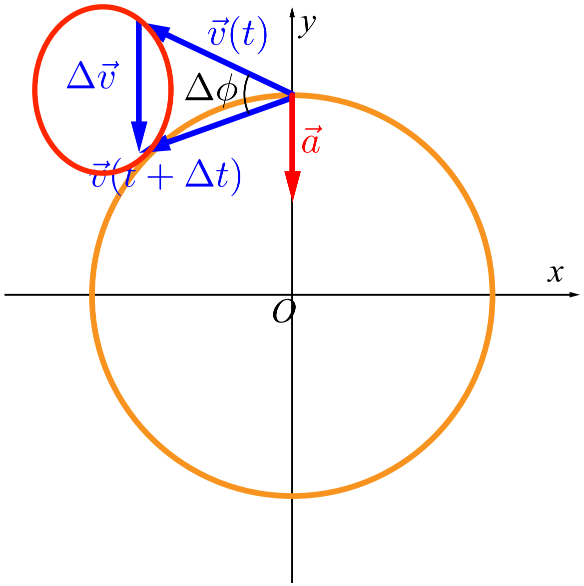
Frequência e período: $\boxed{f = \dfrac{1}{T}}$ $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$ $\longrightarrow \omega = 2\pi f$



Da figura:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

(Triângulos Semelhantes)



Aceleração média: $$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

No limite $\Delta t \rightarrow 0$:

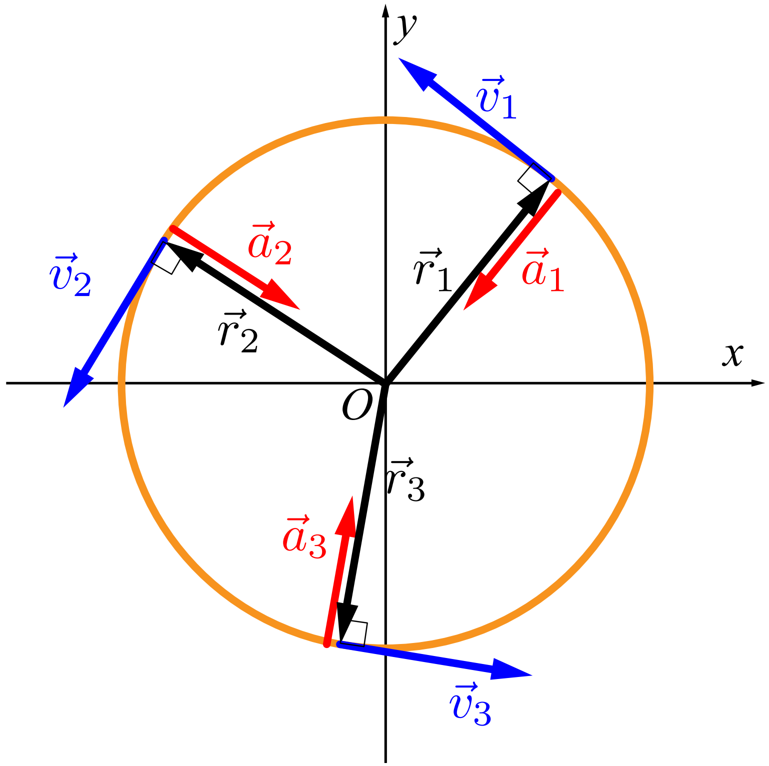
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

(aceleração instantânea)

2. Movimento circular uniforme

Aqui também podemos usar um vetor unitário: (note que este vetor varia com o movimento)

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$



A aceleração fica:

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

Ou:

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

(a aceleração tem a direção do vetor posição e aponta para o centro da circunferência. Esta é a aceleração centrípeta).

2. Movimento circular uniforme

Exemplo: Um pião roda uniformemente com frequência de 16 Hz. Qual é a aceleração centrípeta de um ponto na superfície do pião em $r = 3\ cm$?

A velocidade angular é:

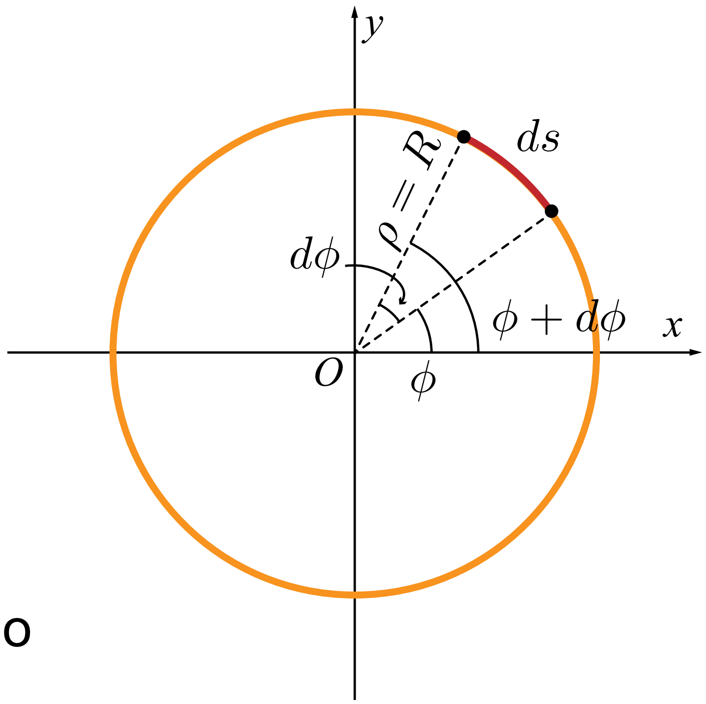
$$\boxed{\omega = 2\pi f} \Rightarrow \omega = 2\pi \,\text{rad}\ (16Hz) = 101\ \text{rad/s}$$

Daí a aceleração fica: $a = \omega^2 r = 306\, m/s^2$

3. Movimento circular acelerado

Consideremos agora o caso em que a velocidade angular não é constante. Então,

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = R\frac{d\phi}{dt}$$



é o módulo da velocidade que também varia no tempo e a velocidade angular é dada por

$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt} \neq const.$$

Como o módulo da velocidade também varia há uma componente tangencial da aceleração dada por

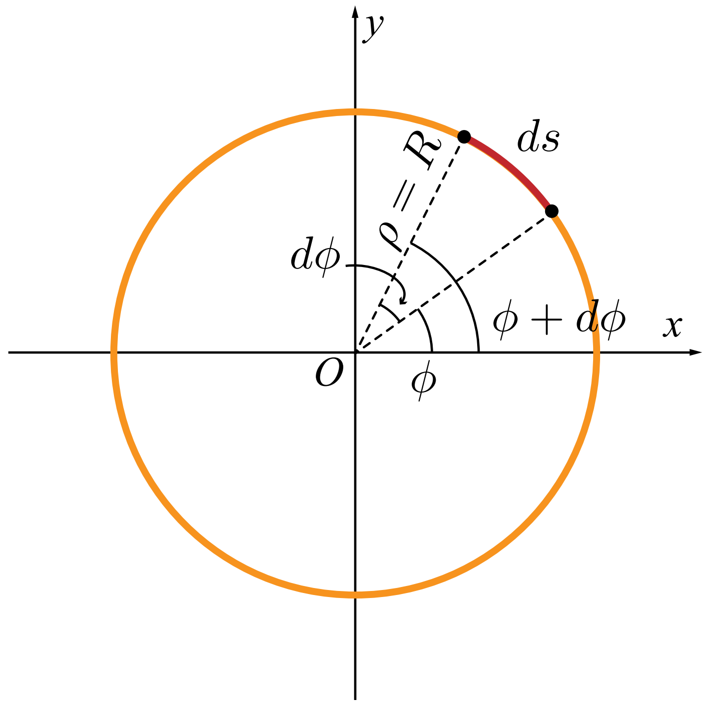
$$\frac{dv(t)}{dt} = R\frac{d\omega(t)}{dt} \equiv R\alpha(t)$$

onde $\alpha(t)$ é a aceleração angular

3. Movimento circular acelerado

Aceleração total é a soma de uma componente tangencial e uma normal

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}_N(t) + \vec{a}_T(t)$$



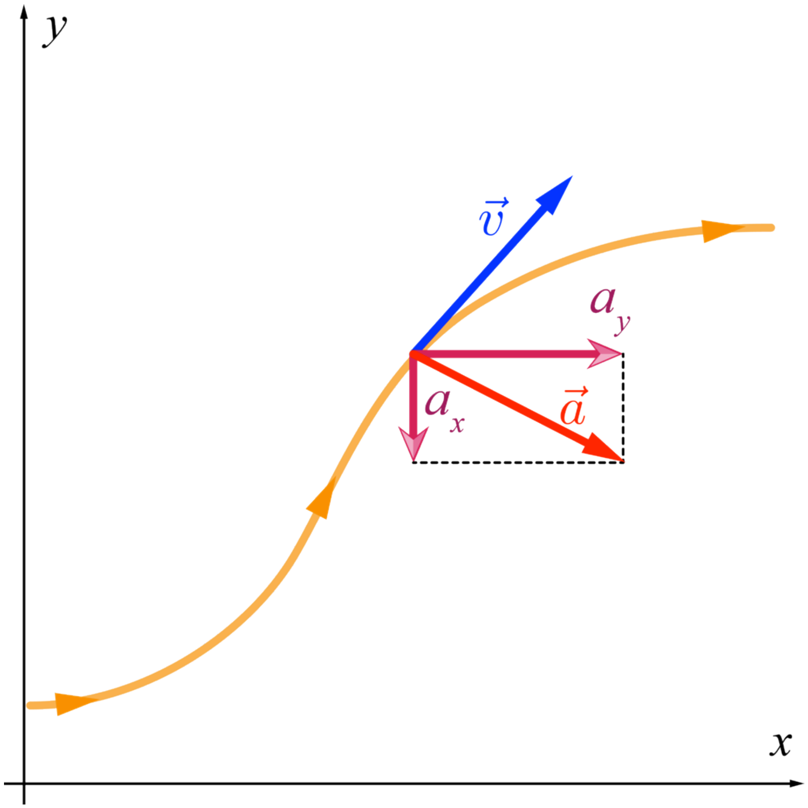
ou ainda

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\alpha R \hat{v}}_{\vec{a}_T(t)} + \underbrace{\left(-\frac{v^2}{R} \right) \hat{r}}_{\vec{a}_N(t)}$$

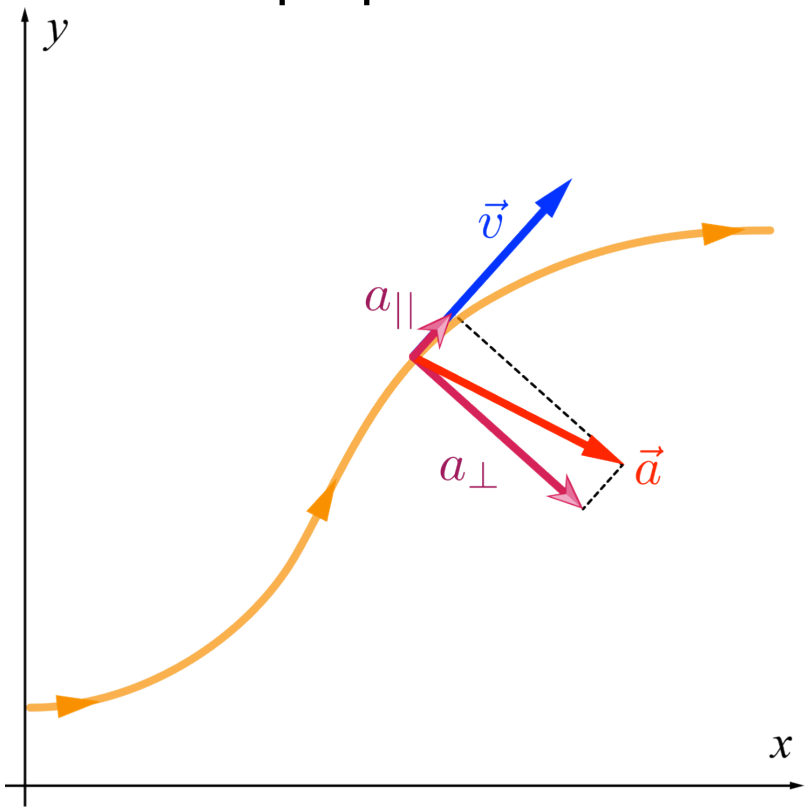
$$a(t) = \sqrt{a_N^2(t) + a_T^2(t)}$$

3. Movimento circular acelerado

Componentes cartesianas



Componentes tangencial e perpendicular

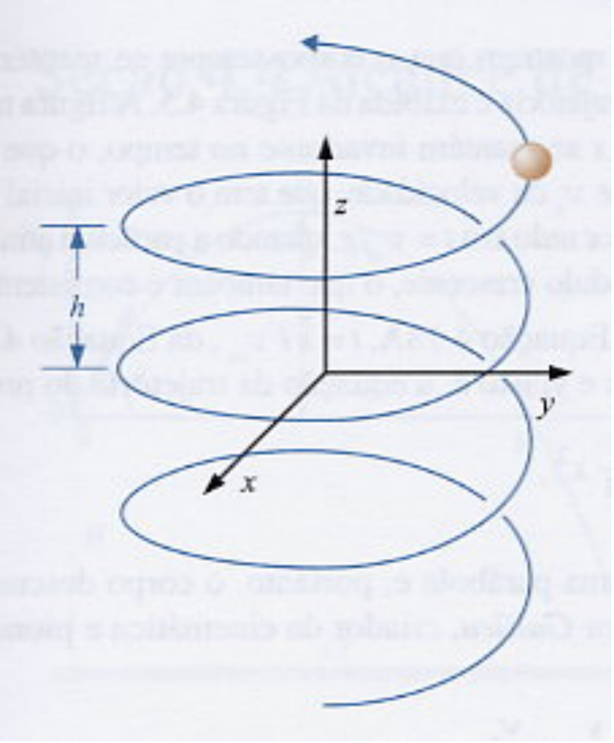


4. Movimento Helicoidal

É um movimento tridimensional que pode ser visto como a composição de um MCU no plano (x,y) com um movimento uniforme na direção z.

O vetor posição de uma partícula com este movimento será:

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\hat{i} + R\,\mathrm{sen}(\omega t)\hat{j} + v_z t\hat{k},$$



com R, ω e v_z constantes. A velocidade será:

$$\vec{v}(t) = -R\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\hat{i} + R\omega\cos(\omega t)\hat{j} + v_z\hat{k}$$

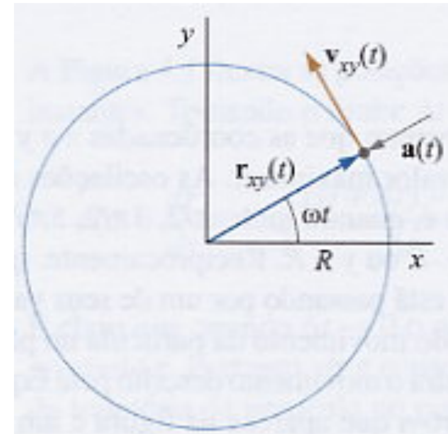
E a aceleração será:

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t)\hat{i} - R\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)\hat{j}$$

4. Movimento Helicoidal

No plano *xy* a partícula tem as coordenadas:

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t), \end{cases}$$



que caracterizam um MCU de período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

e tem a velocidade: $v_{xy}(t) = R\,\omega$

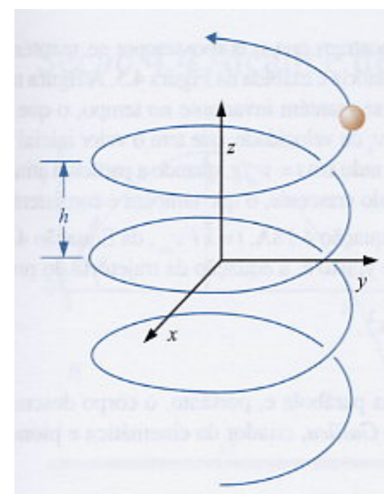
e a aceleração: $a_{xy}(t) = \dfrac{v_{xy}^2}{r} = \omega^2 R$

Vetorialmente: $\boxed{\vec{a}_{xy}(t) = -\omega^2 \vec{r}_{xy}(t)}$

Em um período *T* do movimento no plano *xy* , a partícula percorre uma distância *h* no eixo *z*:

$$h = v_z T = 2\pi \frac{v_z}{\omega}$$

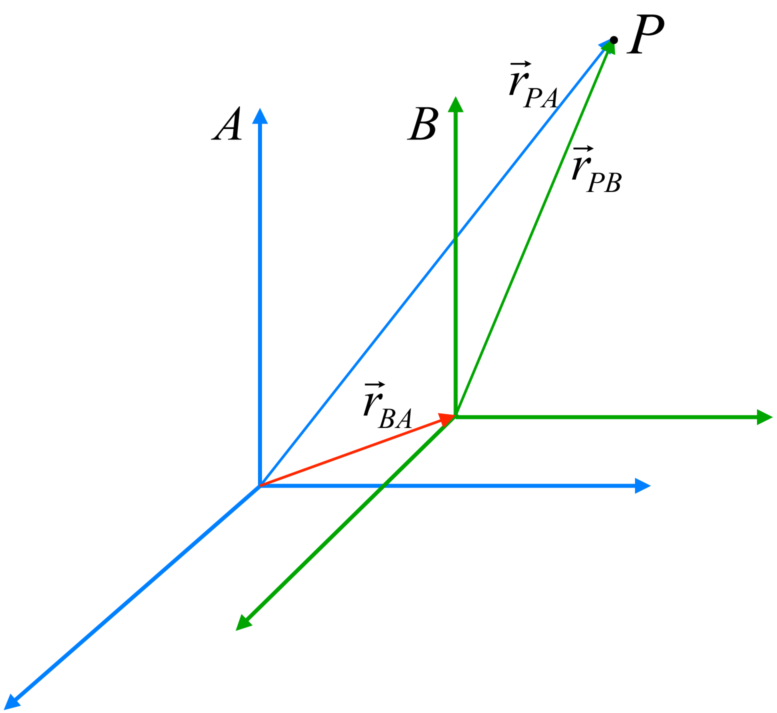
(passo da hélice no movimento helicoidal)



Movimento Relativo em 2D e 3D

Problema:

Conhecido o movimento de uma partícula P em um dado sistema de coordenadas (referencial) ***B***, que se move em relação a outro referencial ***A***, como descrever o movimento da partícula neste outro referencial (***A***)?



Posição relativa: $\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$,

que é função do tempo:

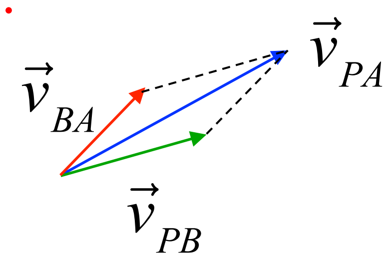
$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) + \vec{r}_{BA}(t)$$

A velocidade relativa é:

$$\frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$



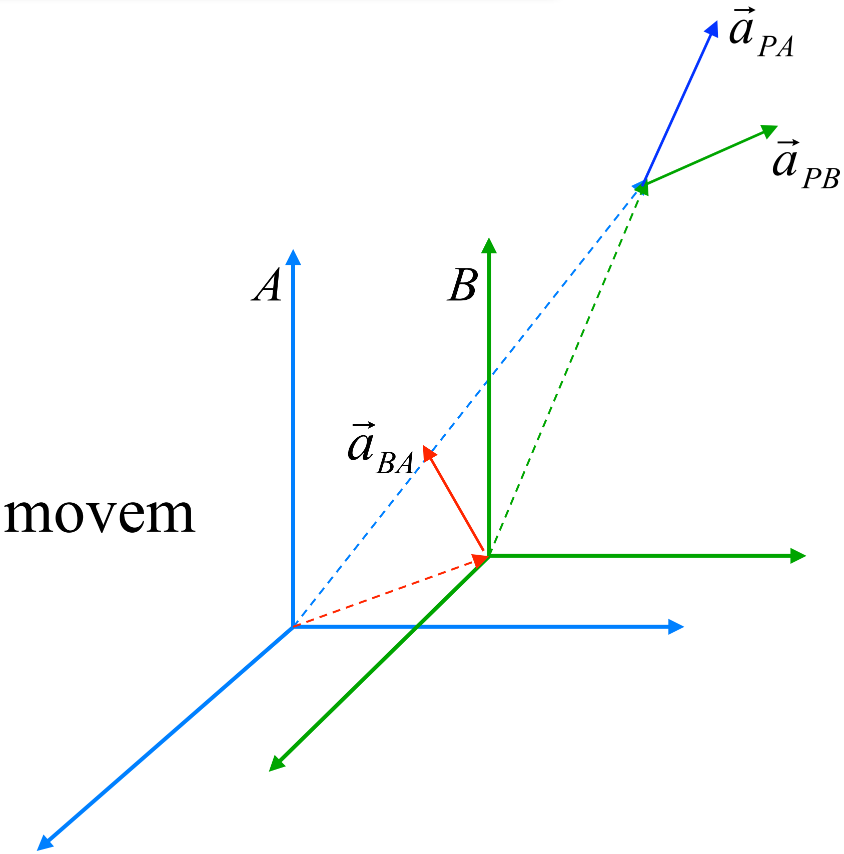
Movimento relativo em 2D e 3D

Aceleração relativa:

$$\frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$$

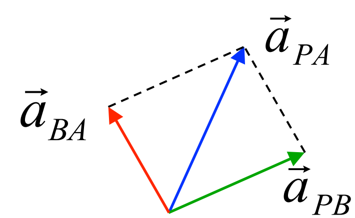


Em referenciais inerciais (os que se movem um em relação ao outro em translação retilínea e uniforme):

$$\vec{a}_{BA} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

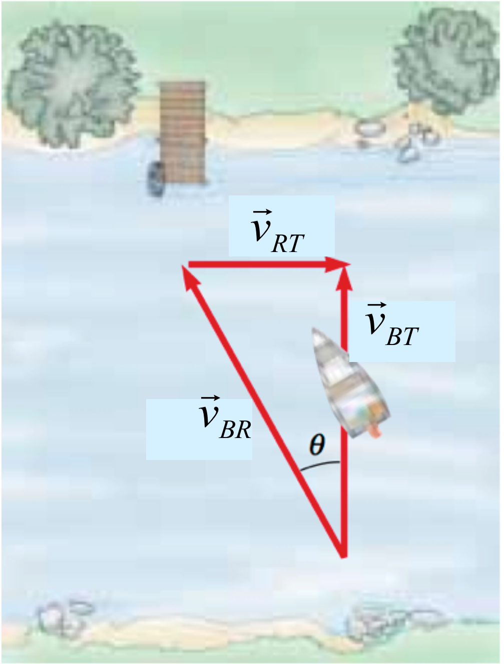
$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$



(a aceleração é a mesma quando medida em dois referenciais inerciais).

Movimento relativo em 2D

Exemplo: Um barco com velocidade de 10 km/h em relação ao rio tenta ir de uma margem a outra, conforme a figura. A velocidade da água em relação à Terra é de 5 km/h. Qual deve ser a velocidade do barco em relação à Terra para que ele cruze o rio perpendicularmente às margens?



Por causa do movimento relativo, o barco deve seguir uma trajetória noroeste. O módulo da velocidade deve ser:

$$v_{BT} = \sqrt{v_{BR}^2 - v_{RT}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} \Rightarrow v_{BT} = 8{,}7\,\text{km/h}$$

A direção pode ser dada pelo ângulo em relação à vertical:

$$\theta = \text{arc tg}\,\frac{v_{RT}}{v_{BT}} \cong \text{arc}\,tg\,\frac{5}{8{,}7} \cong 30^0$$