F-128 – Física Geral I

Aula Exploratória
Cap. 3

username@ifi.unicamp.br

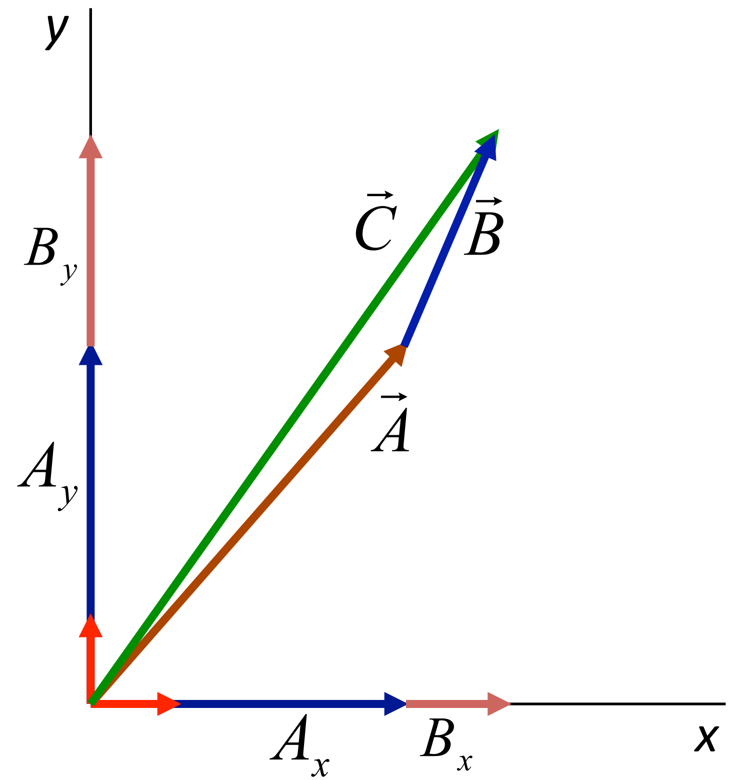
Soma de vetores usando componentes cartesianas

Se $\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}, \end{cases}$

o vetor $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ será dado em componentes cartesianas por:

$$\vec{C} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$
$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$
$$= C_x\hat{i} + C_y\hat{j}$$

onde: $\begin{cases} C_x = A_x + B_x \\ C_y = A_y + B_y \end{cases}$



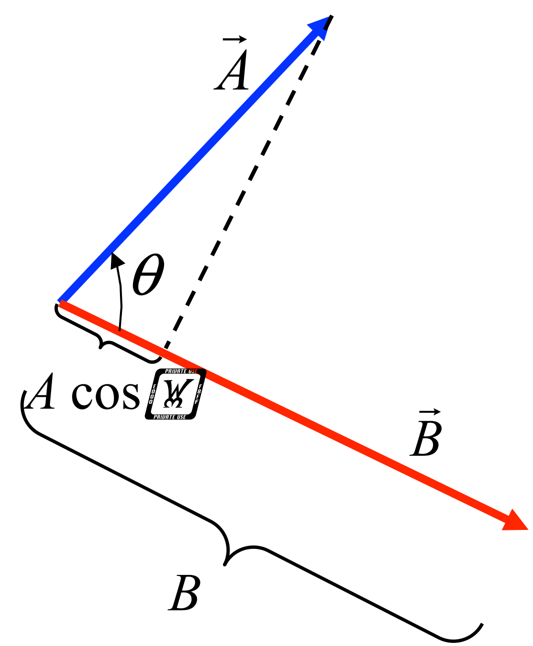
Produto escalar de dois vetores

Definição: $$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\theta)}$$

onde θ é o ângulo formado entre as direções de $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Geometricamente, projeta-se $\vec{A}$ na direção de $\vec{B}$ e multiplica-se por B (ou vice-versa). Então:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A\cos\theta)B=(B\cos\theta)A$$



Propriedades do produto escalar

O produto escalar **é** comutativo:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

O resultado do **produto escalar** entre dois vetores é um **escalar**.

Produto escalar usando componentes

Devido à *distributividade* do produto escalar de dois vetores, podemos escrevê-lo em termos das suas compo nentes cartesianas:

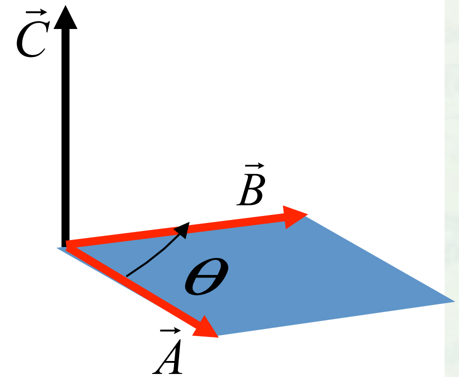
$$
\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}) = \\
&= A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i}+A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j}+A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k}+ \\
&= A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i}+A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j}+A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k}+ \\
&= A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i}+A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j}+A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}
\end{aligned}
$$

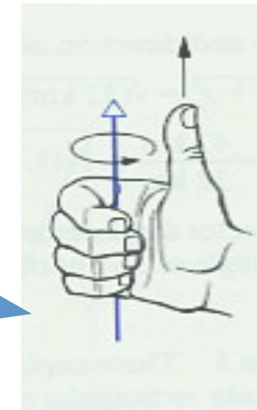
Mas como $\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$ e $\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{j}=0$,

teremos: $\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_Z$

Produto vetorial de dois vetores

Definição: o produto vetorial de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ representado por $\vec{A}\times\vec{B}$, é um vetor $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ tal que:



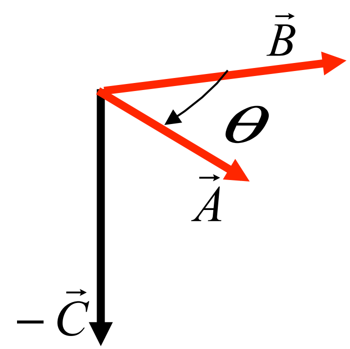


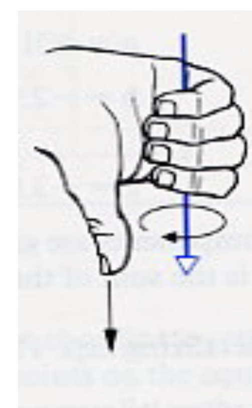
i) a direção de $\vec{C}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$;

ii) o seu módulo é igual à área do paralelogramo formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$

$$C = A\,B\,sen\,\theta$$

iii) o seu sentido obedece à regra da mão direita (figura) ou do saca-rolhas.





O produto vetorial e o determinante

Outra forma de se escrever o produto vetorial de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é através do determinante da matriz formada pelos versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ e pelas componentes cartesianas dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ ao longo das suas linhas:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

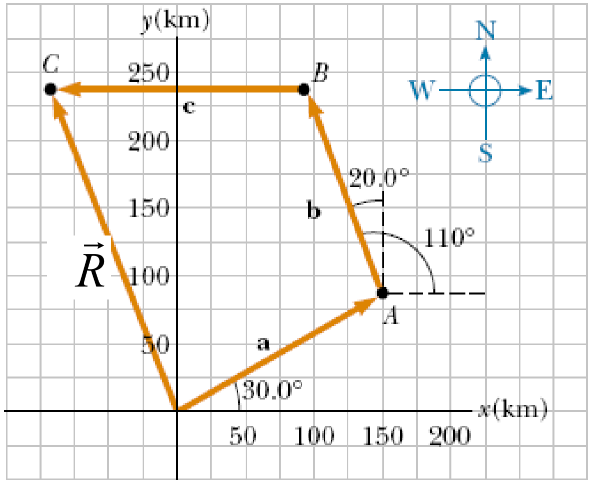
$$=(A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

Exercício 01

Um avião segue a rota mostrada na figura. Primeiramente, ele voa da origem do sistema de coordenadas até a cidade A, localizada a 175 km em uma direção que forma 30^0 com o eixo x. Em seguida, ele voa 153 km para noroeste, formando 20^0 com a direção y, até a cidade B. Finalmente, ele voa 195 km na direção oeste até a cidade C.

a) determine a localização da cidade C em relação à origem. Utilize a notação de vetores unitários.

b) determine o módulo e a direção de $\vec{R}$.



Resp:

a)

$$\left.\begin{aligned} R_x &= a_x+b_x+c_x = -95.3\text{km} \\ R_y &= a_y+b_y+c_y = 232\text{km} \end{aligned}\right\} \quad \vec{R}=(-95{,}3\hat{i}+232\,\hat{j})\,\text{km}$$

b) 250 km, $22{,}3^0$ a noroeste

Exercício 02

São dados dois vetores: $\vec{a} = 4{,}0\hat{i} - 3{,}0\hat{j}$ e $\vec{b} = 6{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j}$. Quais são:

a) o módulo de $\vec{a}$?

b) o ângulo de $\vec{a} + \vec{b}$ com $\hat{i}$?

c) o módulo e o ângulo de $\vec{b} - \vec{a}$ com $\hat{j}$?

d) o ângulo entre as direções de $\vec{b} - \vec{a}$ e $\vec{a} + \vec{b}$?

Resp:

a) $|\vec{a}| = 5$
b) $\theta = \arccos(2\sqrt{5}/5)$
c) $|\vec{b} - \vec{a}| = 5\sqrt{5}$; $\theta \cong 10{,}3^o$
d) $\theta \cong 53{,}3^o$

Exercício 03

Quais operações abaixo são possíveis e quais são os resultados? Explique o significado geométrico de d).

a) $\left(2\hat{i}\cdot 3\hat{i}\right)4\hat{j}$

b) $\left(2\hat{i}\cdot 3\hat{i}\right)\cdot 4\hat{j}$

c) $\left(2\hat{i}\cdot 4\hat{i}\right)\times 3\hat{k}$

d) $\left(2\hat{i}\times 3\hat{j}\right)\times 4\hat{i}$

e) $\left(2\hat{i}\times 3\hat{j}\right)\cdot 4\hat{k}$

Resp:

a) Possível. Resultado: $24\hat{j}$
b) impossível multiplicar escalarmente um número por um vetor
c) impossível multiplicar vetorialmente um número por um vetor
d) possível. Resultado = $24\hat{j}$
e) volume do paralelepípedo formado pelas arestas dos três vetores.

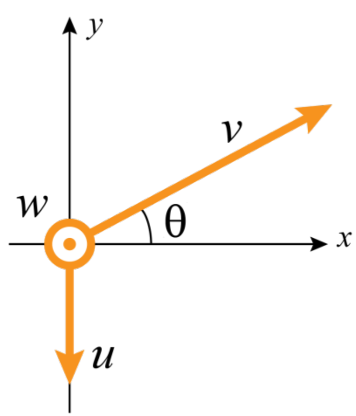
Exercício 04

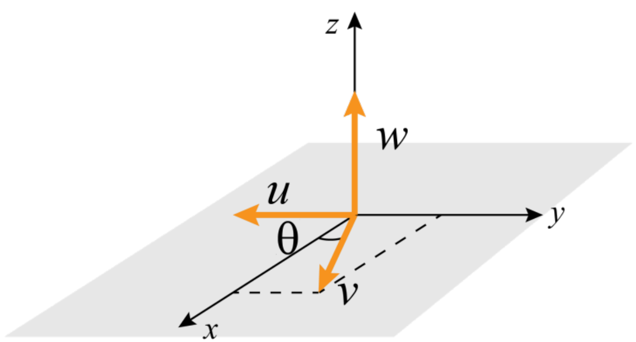
Três vetores são orientados conforme a figura abaixo. Os módulos dos vetores são $u = w = 3$ unidades e $v = 6$ unidades. O vetor v forma um ângulo de $\theta = 30^o$ com o eixo x.

a) Escreva os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, em função dosversores $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$;

b) Encontre o módulo, a direção e o sentido do vetor $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;

c) Qual o produto escalar entre $\vec{v}$ e $\hat{j}$?





Exercício 05

Considere dois deslocamentos: um de módulo 3,0 m e outro de módulo 4,0 m. Mostre de que maneira estes deslocamentos podem ser combinados para produzir um deslocamento de módulo:

a) máximo possível;
b) mínimo possível;
c) 5,0 m.
d) neste último caso, que ângulo a resultante forma com o deslocamento de menor módulo?

Resp:

a) colocados paralelamente e com mesmo sentido
b) colocados paralelamente e com sentido contrário
c) colocados perpendicularmente
d) $\theta \cong 53^o$

Exercício 06

São dados três vetores (em metros):

$$\vec{r}_1 = -3{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{r}_2 = -2{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j} + 2{,}0\hat{k}$$
$$\vec{r}_3 = 2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{j} + 1{,}0\hat{k}$$

Determinar:

a) $\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 + \vec{r}_3)$;

b) $\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)$

c) $\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 + \vec{r}_3)$

Resp:

a) 3,0 m^2

b) 52 m^3

c) $(11{,}0\hat{i} + 9{,}0\hat{j} + 3{,}0\hat{k})\,\mathrm{m}^2$