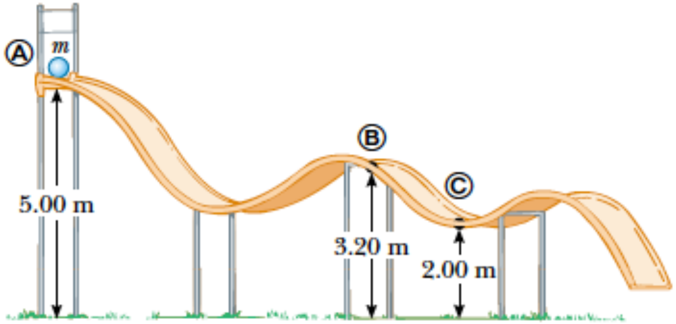
Física Geral I - F 128

Aula 8: Energia Potencial e Conservação de Energia

2º Semestre 2012



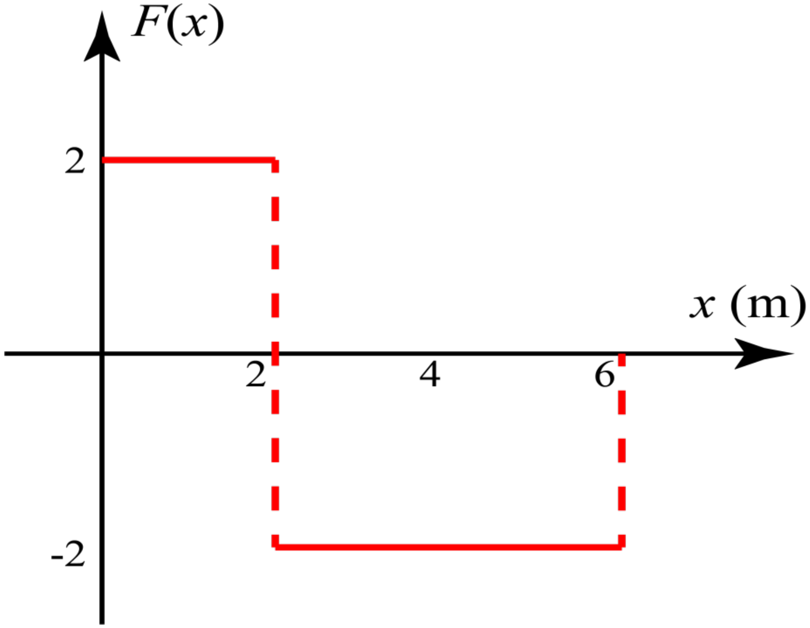
Q1: Trabalho e força

Analise a seguinte afirmação sobre um corpo, que partindo do repouso, move-se de acordo com a força mostrada abaixo:

"A velocidade deste corpo é negativa em $x = 3$ m"

A. Verdadeiro

B. Falso



Relembrando…

Energia é um conceito que vai além da mecânica de Newton e permanece útil também na mecânica quântica, relatividade, eletromagnetismo, etc.

A **conservação da energia total** de um sistema isolado é uma lei fundamental da natureza.

Energia Cinética: $K = \frac{1}{2} m v^2$

"O trabalho da força resultante que atua sobre uma partícula entre as posições x_1 e x_2 é igual à variação da energia cinética da partícula entre estas posições".

Energia Potencial

A energia potencial U é uma forma de energia que pode ser associada com a configuração (ou arranjo) de um sistema de objetos, que exercem forças uns sobre os outros. Se a configuração muda, a energia potencial também pode mudar.

Vamos começar discutindo o caso unidimensional. Depois generalizaremos para mais dimensões.

Dois tipos de energia potencial com os quais estaremos lidando são a *energia potencial gravitacional* e a *energia potencial elástica.*

Energia Potencial em 1D

Variação de energia potencial (caso unidimensional):

$$\Delta U\left(x_0 \to x\right) = U\left(x\right) - U\left(x_0\right) = -W = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx$$

É usual tomar x_0 como uma configuração de referência fixa. Assim, a energia potencial da partícula na configuração x é:

$$U(x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x)dx \quad \longleftrightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx}$$

Notem que é preciso que a força seja uma função apenas da posição (configuração). Não se pode definir $U(x)$ em outros casos (a força de arraste dependente da velocidade, por exemplo): ver mais detalhes adiante.

Do ponto de vista físico, apenas as **variações** de energia potencial são relevantes. Então, pode-se sempre atribuir o valor zero à configuração de referência:

$$U\left(x_0\right) = 0$$

Conservação da Energia Mecânica

Do teorema do trabalho-energia cinética para uma força que só depende da posição:

$$\boxed{W = \Delta K}$$

Como $U(x_f) - U(x_i) = -W$

$$U(x_i) - U(x_f) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + U(x_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 + U(x_f)$$

$$\Downarrow$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \text{constante}$$

(a energia mecânica total não varia).

Energia Potencial Gravitacional (campo uniforme)

Nas proximidades da Terra a força gravitacional pode ser aproximada por $m\vec{g}$.

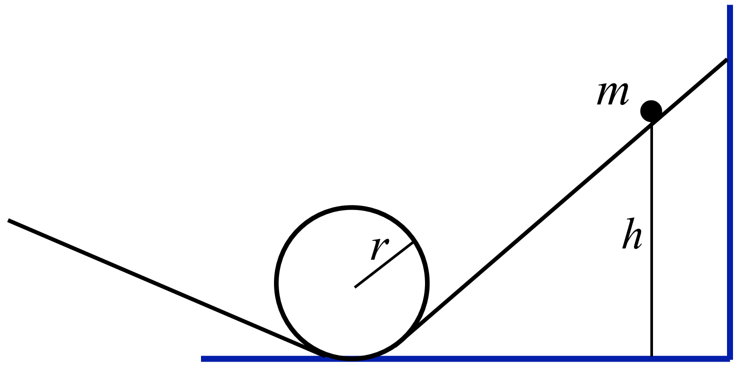
Tomando como referência para U o ponto $y = 0$ ($U(0)=0$):

$$U(y) = 0 - \int_0^y (-mg)\,dy = mgy \quad \Rightarrow \quad U(y) = mgy$$

Conservação da energia:

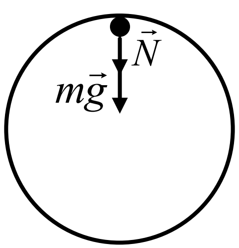
$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{constante}}$$

Exemplo: Qual é a mínima altura h para que o corpo deslizando complete o *loop?*



No limiar: $N = 0$

$$mg = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = gr$$



Por conservação de energia mecânica:

$$E = mgh_{\min} = mg2r + \frac{1}{2}mv^2 =$$

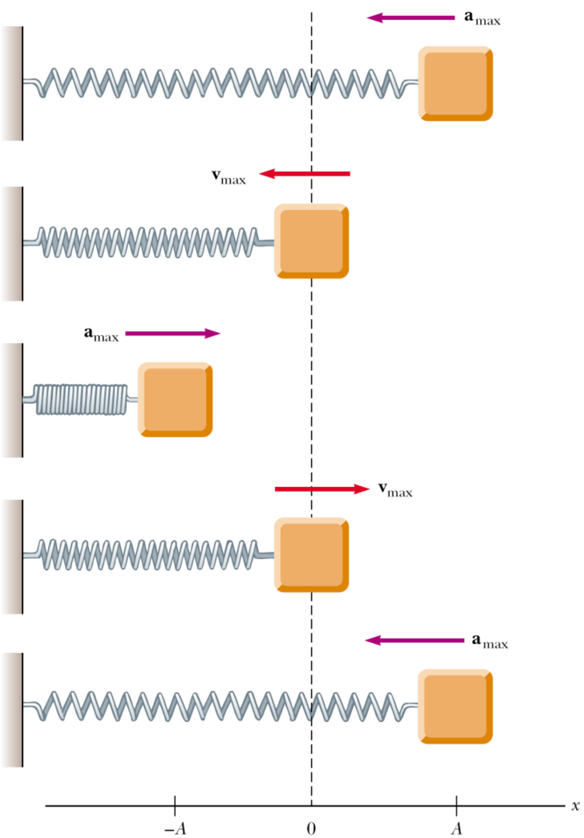
$$mg2r + \frac{1}{2}mgr = \frac{5}{2}mgr$$

$$\boxed{h_{\min} = 2{,}5r}$$

Energia Potencial Elástica

Configuração de referência: $x_0 = 0 \quad \Rightarrow U(x) = 0 - \int_0^x (-k)x\,dx = \frac{1}{2}kx^2$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}}$$



$\Rightarrow v = 0 \text{ e } x = A \Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2$

$\Rightarrow v = -v_{max} \text{ e } x = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$

$\Rightarrow v = 0 \text{ e } x = -A \Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2$

$\Rightarrow v = v_{max} \text{ e } x = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$

$\Rightarrow v = 0 \text{ e } x = A \Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2$

Energia Potencial em mais de uma dimensão

Como no caso unidimensional, só é possível definir a energia potencial para forças conservativas.

Uma força é dita conservativa se o trabalho que ela realiza sobre um corpo que se desloca entre dois pontos não depende da trajetória seguida pelo corpo, mas apenas das posições *inicial* e *final*.

Equivalentemente, uma força é conservativa se o trabalho que ela realiza sobre um corpo que descreve um percurso fechado é zero.

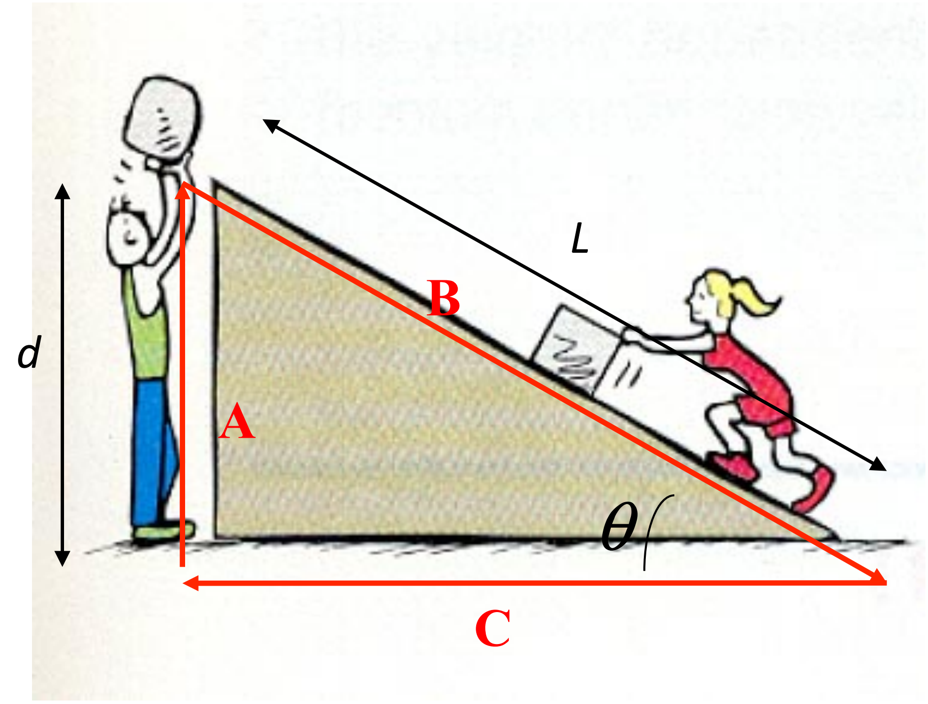
Exemplos de forças conservativas:

1. força gravitacional
2. força elástica
3. qualquer força unidimensional que só dependa da posição: $F(x)$

Com técnicas de cálculo mais avançadas, é possível estabelecer um critério matemático simples para determinar se uma força é conservativa.

Forças Conservativas

Trabalho realizado pela força gravitacional ao longo do circuito fechado $A \rightarrow B \rightarrow C$ indicado:



$$W_A + W_B + W_C = -mgd + mgL sen\theta + 0 = 0$$

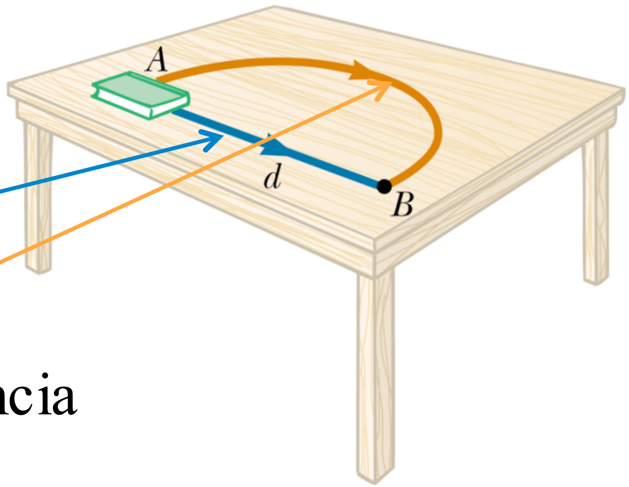
Forças Não-Conservativas

Forças não-conservativas: seu trabalho depende da trajetória.

Exemplos: força de atrito e força de arraste.

$$W_{atr}(A \to B) = \int_C \vec{f}_{atr} \cdot d\vec{s} = -f_{atr} L_{A \to B} =$$

$$= \begin{cases} -\mu_c m g d & \text{reta} \\ -\mu_c m g \pi d/2 & \text{semi-circunferência} \end{cases}$$



Nesse caso, não é possível definir uma energia potencial porque o trabalho da força de atrito depende da trajetória descrita pelo corpo.

Energia Potencial em mais de uma dimensão

Generalizando, sempre se pode associar uma energia potencial a uma força conservativa:

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = -W(\vec{r}_0 \to \vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Note que não é preciso dizer qual trajetória tomar entre $\vec{r}_0$ e $\vec{r}$, pois nesse caso o trabalho independe da trajetória.

Se só há forças conservativas, então a energia mecânica total (potencial + cinética) é conservada:

$$\boxed{E = K + U = \text{constante}}$$

Energia mecânica na presença de forças não-conservativas

Entretanto, se há forças não-conservativas:

$$\left.\begin{aligned} W &= W_{não-cons} + W_{cons} = \Delta K \\ W_{cons} &= -\Delta U \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_{não-cons} = \Delta K + \Delta U = \Delta E_{mec}$$

No caso de forças como de atrito e de arraste, o trabalho é sempre *negativo* (a força é sempre no sentido *oposto* ao deslocamento):

$$W_{atrito} = -f_{atrito} L < 0 \Rightarrow \Delta E_{mec} < 0$$

Como o trabalho *forças dissipativas* é sempre negativo, a energia mecânica do sistema sempre *diminui* na presença delas.

Forças dissipativas e energia interna

O trabalho das forças dissipativas (e a consequente diminuição da energia mecânica) é acompanhado de um aumento da temperatura dos corpos em contato (aumento da agitação térmica das moléculas):

® variação da energia interna = - trabalho das forças dissipativas

$$\left.\begin{aligned} W_{atrito} &= -\Delta E_{\text{int}} \\ W_{atrito} &= \Delta E_{mec} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta E_{\text{int}} + \Delta E_{mec} = \Delta\left(E_{\text{int}} + E_{mec}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E_{total} = E_{\text{int}} + E_{mec} = \text{constante}$$

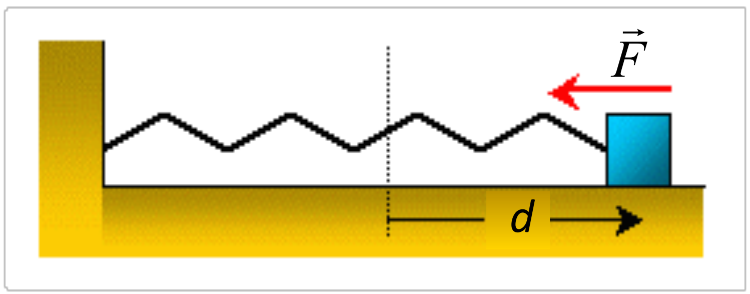
A energia total de um sistema isolado, mecânica mais interna, é conservada.

Em geral, há outras formas adicionais de energia (elétrica, magnética,...) que, uma vez adicionadas acima, fornecem uma quantidade que se conserva.

Forças dissipativas e energia interna

Exemplo: O bloco de massa m é solto de $x = d$. Qual é sua velocidade em $x = 0$?

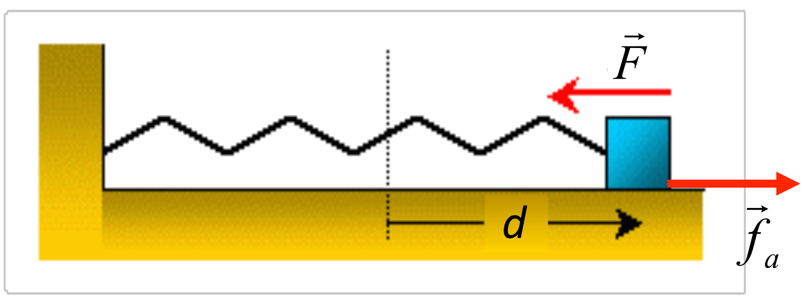
a) Sem atrito



$$\left.\begin{aligned}\Delta K &= \frac{1}{2}mv^2 - 0\\ \Delta U &= 0 - \frac{1}{2}kd^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{k}{m}}d$$

b) Com atrito



$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = W_{atr} = -\mu_c mgd$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 - \mu_c mgd$$

$$|v| = \sqrt{\frac{kd^2}{m} - 2\mu_c gd}$$

Relação entre Força e Energia Potencial

$$U(x) - U(x_0) = -W(x_0 \rightarrow x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\ dx$$

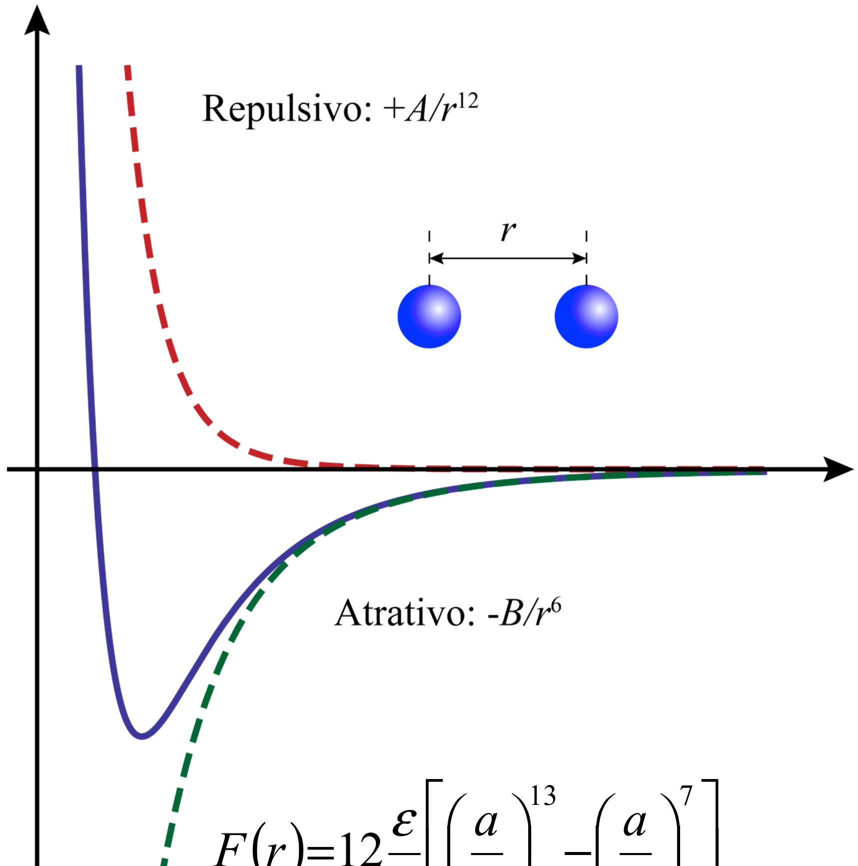
$$\Downarrow$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

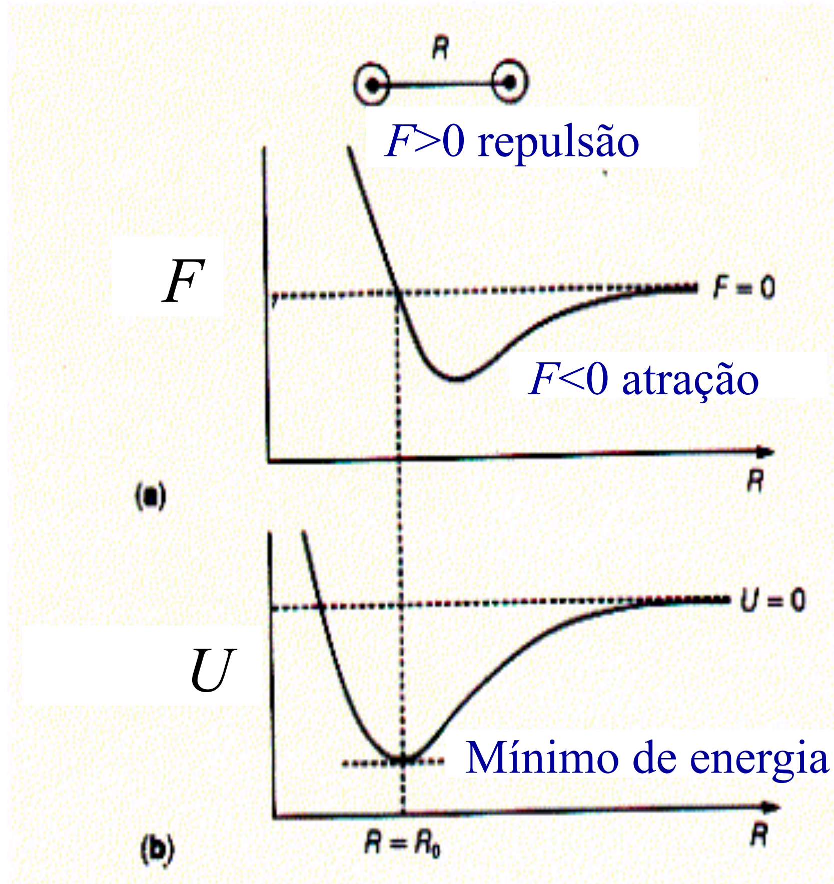
$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_o} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F(x_0) = 0 \\ U(x_0)\text{: Mínima ou Máxima} \end{cases}$$

Exemplo: Ligação Química

Exemplo de ligação representada por um potencial Lenard - Jones



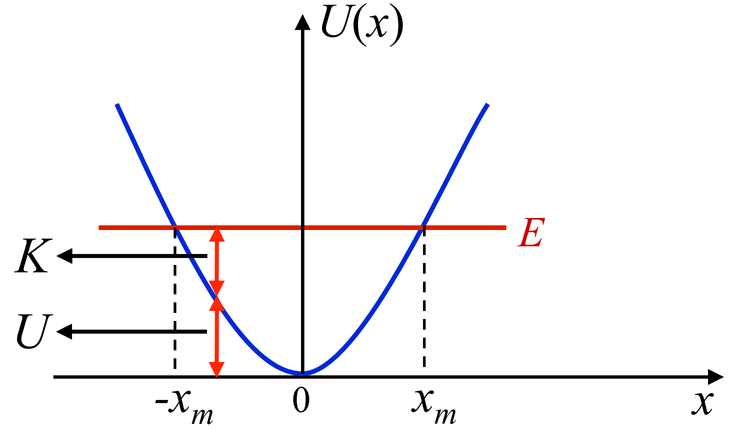
$$F(r)=12\frac{\varepsilon}{a}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{13}-\left(\frac{a}{r}\right)^{7}\right]$$



Diagramas de Energia

Energia potencial de um bloco de massa m preso a uma mola de constante elástica k :

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



Conservação de energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

$$\therefore \qquad K = E - U(x)$$

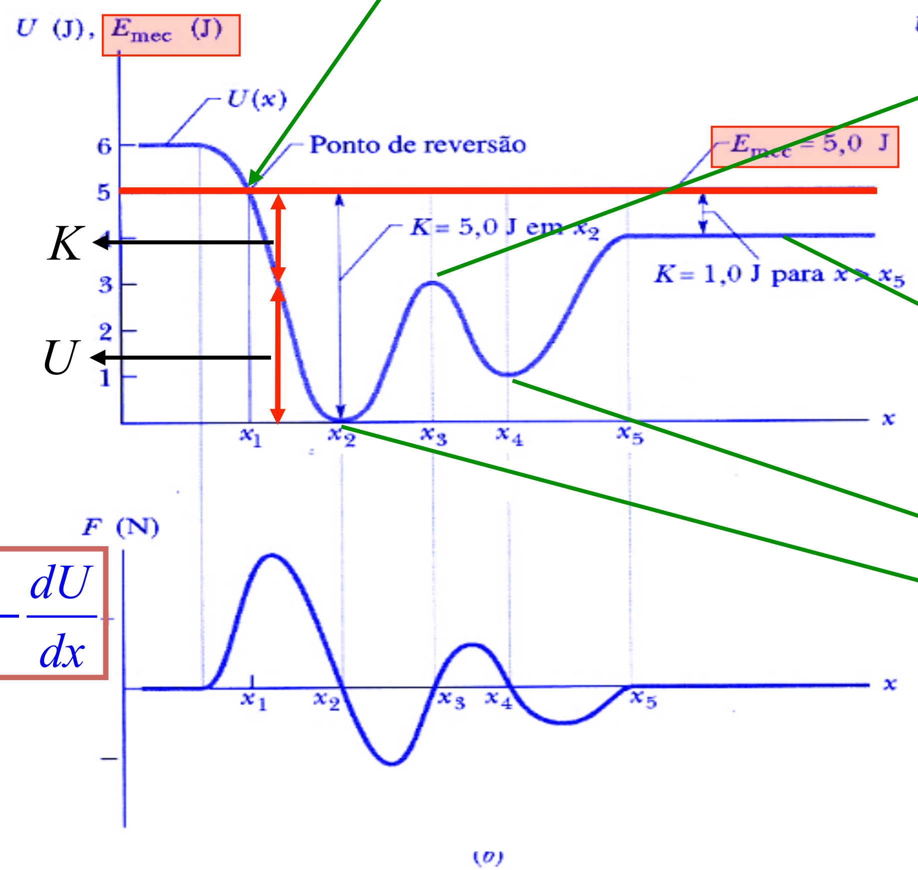
Desta relação e do diagrama, vemos que o movimento do bloco é limitado a pontos x compreendidos no intervalo $-x_m \leq x \leq x_m$. De fato, para pontos x fora deste intervalo, teríamos $U(x) > E$, e portanto $K < 0$, o que é obviamente impossível.

x_m e $-x_m$ são os pontos de retorno, onde a velocidade é nula:

$$v(x) = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{kx^2}{m}}$$

Diagramas de Energia

Ponto de retorno ou reversão: a velocidade se anula e troca de sinal



$$F = -\frac{dU}{dx}$$

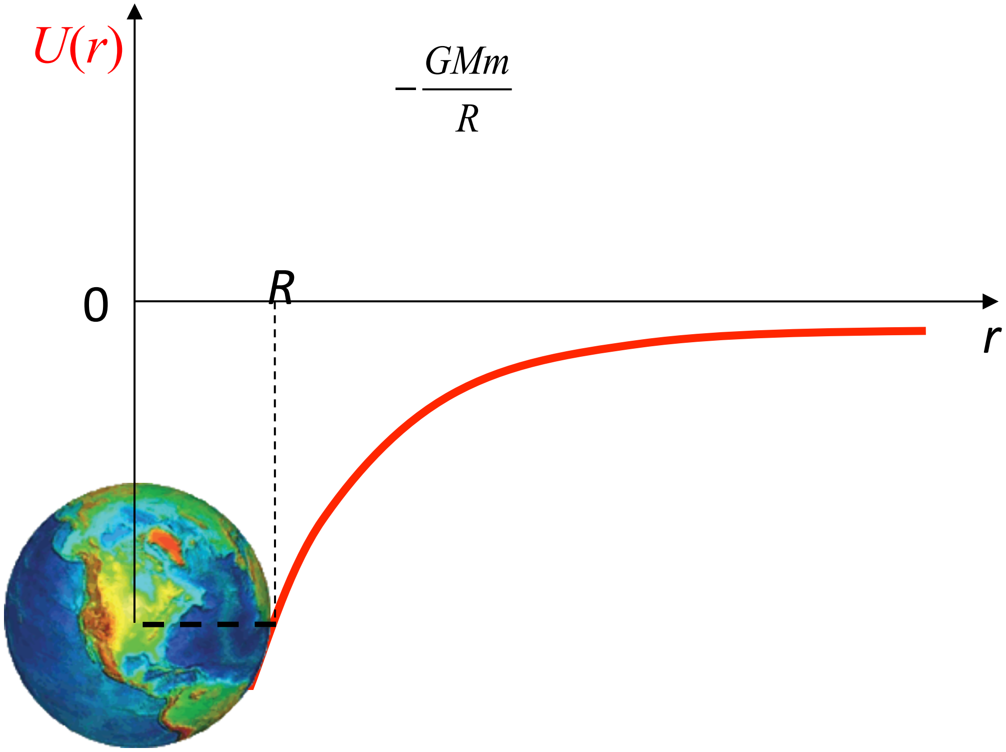
Ponto de equilíbrio instável:
$F(x) = 0$ e $U(x)$ é máximo

Pontos de equilíbrio indiferente:
$F(x) = 0$ e $U(x)$ não é máximo nem mínimo

Pontos de equilíbrio estável:
$F(x) = 0$ e $U(x)$ é mínimo

Q2: Energia Potencial e Força

A energia potencial gravitacional da Terra pode ser descrita e exemplificada pelo equação abaixo. Para qual distância *r* a força do potencial gravitacional é nula?

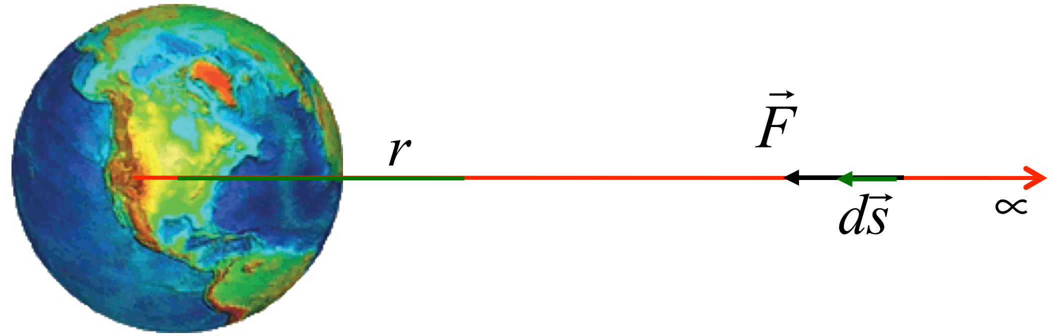


- A. $r = R_{\text{Terra}}$
- B. $r = 0$
- C. r = infinito

Energia Potencial Gravitacional

Força gravitacional:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$



$$U(r) - U(r_0) = -\int_{r_0}^{r} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^{r} F(r)dr \quad \text{, pois } d\vec{r} = -dr\,\hat{r}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{GMm}{r^2}dr$$

Tomando a configuração de referência $U(r_0 \to \infty) = 0$:

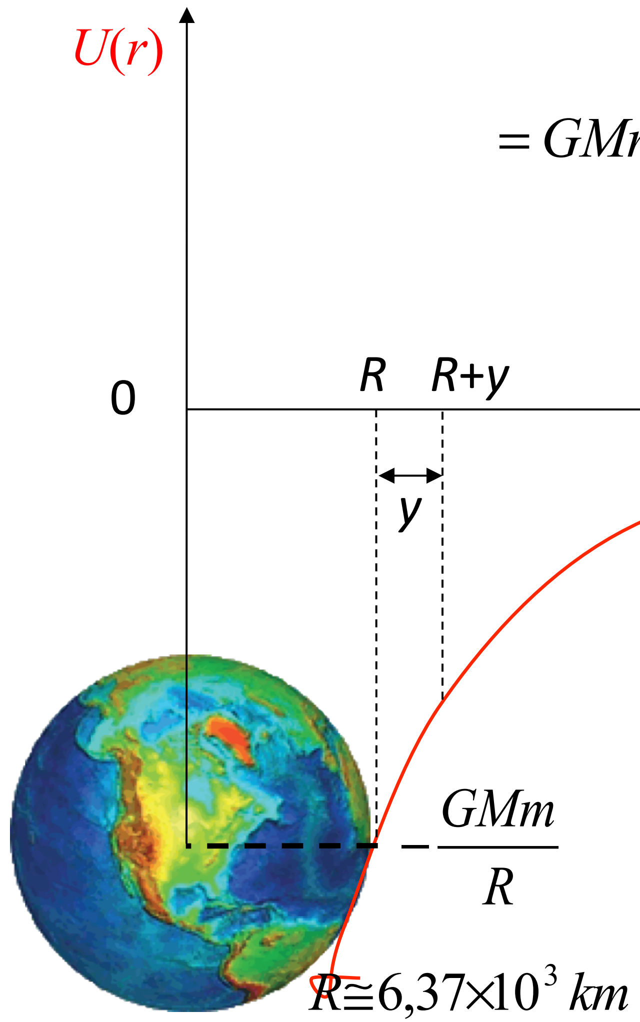
$$U(\vec{r}) = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2}dr = -\frac{GMm}{r}$$

Energia potencial gravitacional: campo uniforme

$$U(R+y)-U(R)=-GMm\left[\frac{1}{R+y}-\frac{1}{R}\right]=$$

$$=GMm\frac{y}{R(R+y)}\cong\left(\frac{GM}{R^2}\right)my=mgy$$

$$g\cong 9{,}8\;m/s^2$$



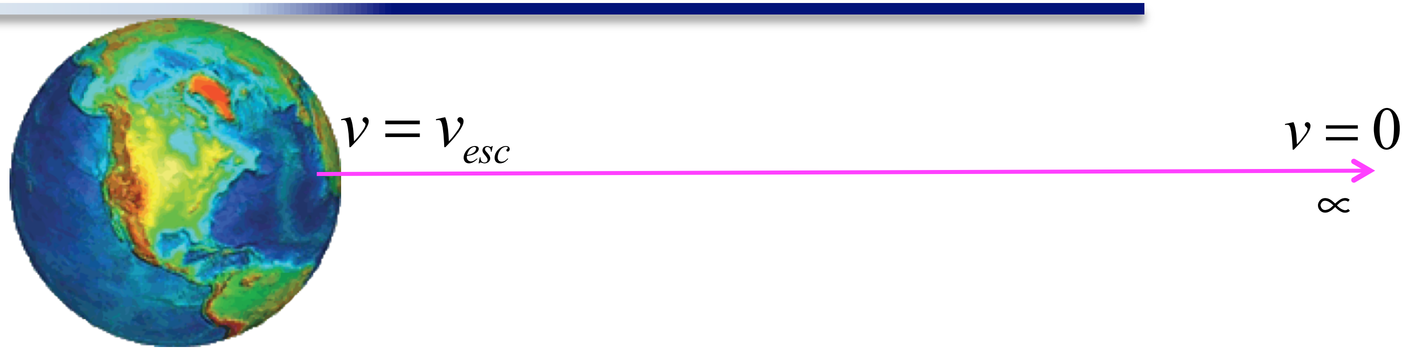
r

Pode-se estimar g a uma altura de 400 km:

$$g'(h=400\text{ km})=\frac{GM}{(R+h)^2}=\frac{GM}{R^2}\left(\frac{R}{R+h}\right)^2=$$

$$=\;9{,}83\times\left(\frac{6{,}4}{6{,}8}\right)^2\cong 8{,}7\text{ m/s}^2$$

Velocidade de Escape



Velocidade limiar para escapar da atração gravitacional de um astro: ® velocidade de lançamento tal que chegue ao infinito com velocidade nula. Por conservação de energia mecânica:

$$E = K(R) + U(R) = K(\infty) + U(\infty) = 0$$

$$E = \frac{1}{2} m v_{esc}^2 + U(R) = U(\infty) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{esc}^2 = \frac{GMm}{R}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2\frac{GM}{R^2} R} = \sqrt{2gR}$$

$$v_{esc}^{Terra} = 11,2\ \text{km/s}$$

Buracos Negros

Velocidade de escape igual à velocidade da luz:

$$v_{esc} = c = 3{,}0 \times 10^{8} \text{ m/s}$$

Raio de um buraco negro de massa *M*

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} \longrightarrow \text{Raio de Schwarzschild}$$

Para a Terra,

$$\boxed{R_{Schw}^{Terra} = 8{,}8\,\text{mm}}$$

Se a Terra se transformasse num buraco negro, seu raio diminuiria para 8,87 mm !

Buracos Negros

Velocidade de escape igual à velocidade da luz:

$$v_{esc} = c = 3{,}0\times 10^{8}\ \text{m/s}$$

Raio de um buraco negro de massa M

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} \longrightarrow \text{Raio de Schwarzschild}$$

Embora esse resultado da mecânica newtoniana seja igual ao que é obtido na Teoria da Relatividade Geral, isso é apenas uma coincidência!