Física Geral I - F -128

Aula 11
Cinemática e Dinâmica das Rotações

1º semestre, 2012

Movimento de um corpo rígido

Vamos abandonar o modelo de *partícula*: passamos a levar em conta as dimensões do corpo, introduzindo o conceito de *corpo rígido* (CR): é aquele em que a distância entre quaisquer dois de seus pontos é constante. Sendo *i* e *j* dois pontos quaisquer de um CR:

$$r_{ij} = c_{ij}$$

c_{ij}: constante característica do par (i, j)

O tipo mais geral de movimento de um CR é uma combinação de uma translação com uma rotação. Neste capítulo consideraremos apenas o caso de rotação de um CR em torno de um eixo fixo, como é o caso do movimento de roldanas, rotores, CDs, etc.

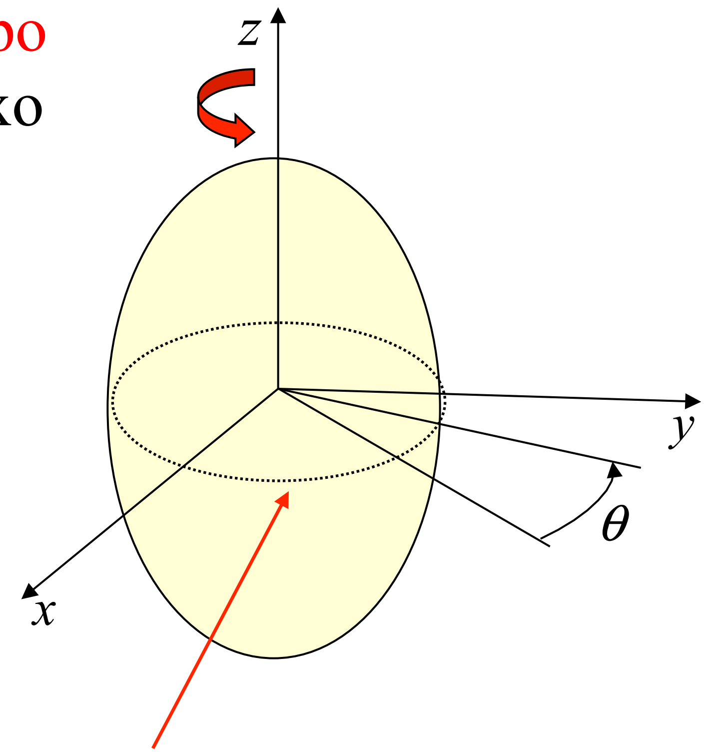
Excluiremos, por exemplo, movimentos como o do Sol (não rígido) ou o de uma bola de boliche, cuja rotação se dá em torno de um eixo que não é fixo (rolamento).

Rotação de um corpo rígido

Queremos estudar a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. O eixo fixo é denominado *eixo de rotação*.

Por conveniência, vamos tomar o eixo de rotação (fixo) como sendo o eixo z.

O eixo de rotação não precisa ser um dos eixos de simetria do corpo.



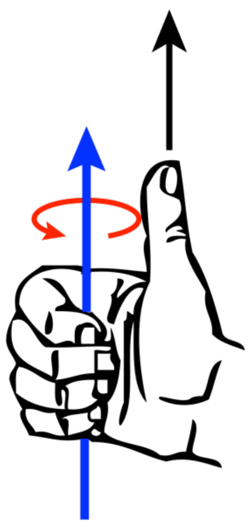
É conveniente escolher uma linha de referência (arbitrária) presa ao corpo, perpendicular ao eixo z, para definir as variáveis angulares em relação a ela.

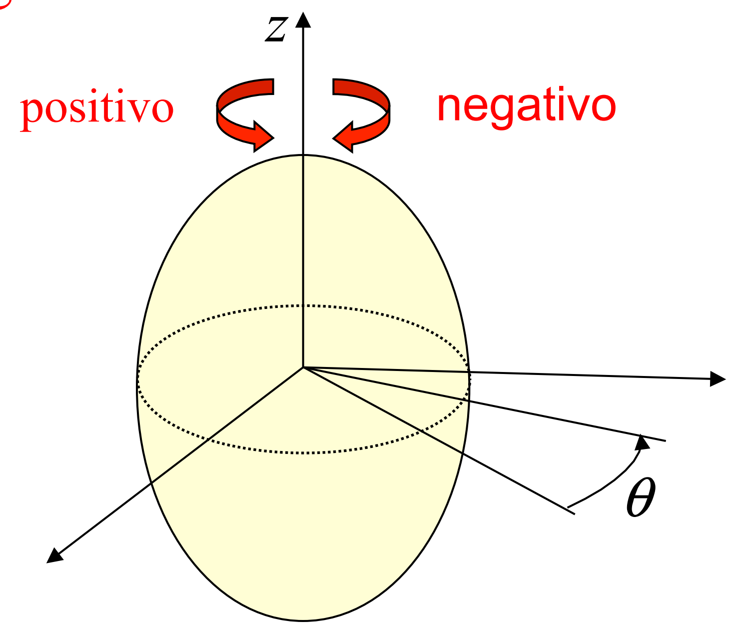
Variáveis rotacionais

a) Posição angular

A posição da linha de referência (fixa ao corpo) define o ângulo de rotação θ do corpo rígido em torno do eixo. θ é a posição angular do corpo rígido.

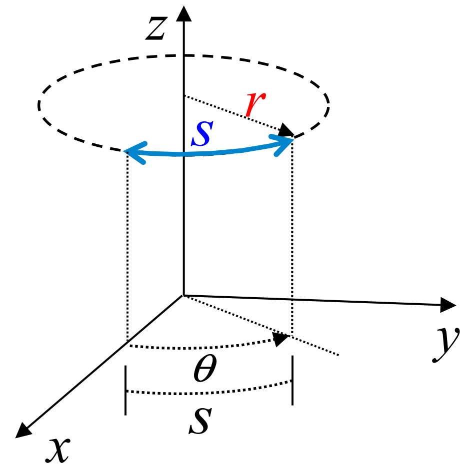
O sentido da rotação é dado pela regra da mão direita.





Variáveis rotacionais

- Cada ponto do corpo rígido executa um movimento circular de raio r em torno do eixo.



- distância percorrida pelo ponto:

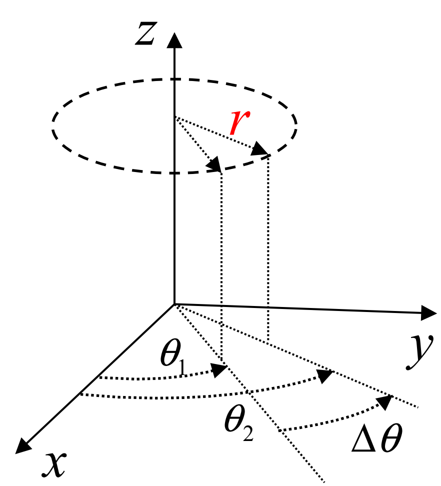
$$s = r\theta \ (\theta \text{ em radianos})$$

b) Deslocamento angular

- O deslocamento angular é definido como:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

Esta variável tem módulo ($\Delta\theta$) , direção e sentido ($\hat{z}$) a ela associados.



Vetor $\Delta\theta\,\hat{z}$?

Variáveis rotacionais

Precisamos er cautelosos ao associar um vetor a uma rotação, pois vetores devem obedecer às regras da soma vetorial, o que não acontece com as rotações. Por exemplo, a soma vetorial é comutativa ($\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$), mas duas rotações sucessivas feitas em ordens diferentes dão resultados diferentes!

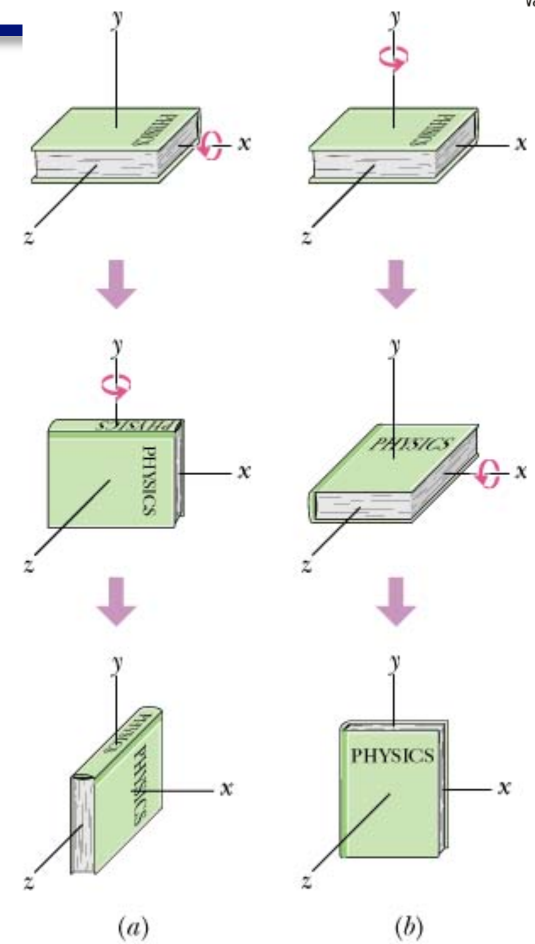
O exemplo ao lado mostra duas rotações sucessivas de $\pi/2$ em torno dos eixos ***x*** e ***y*** nas duas ordens possíveis: o resultado final depende da ordem!

$$\Delta\theta_1\hat{x}+\Delta\theta_2\hat{y} \neq \Delta\theta_2\hat{y}+\Delta\theta_1\hat{x}$$

Então:

$\Delta\theta\hat{z}$ não é um vetor!

(a menos que os ângulos de rotação sejam infinitesimais).

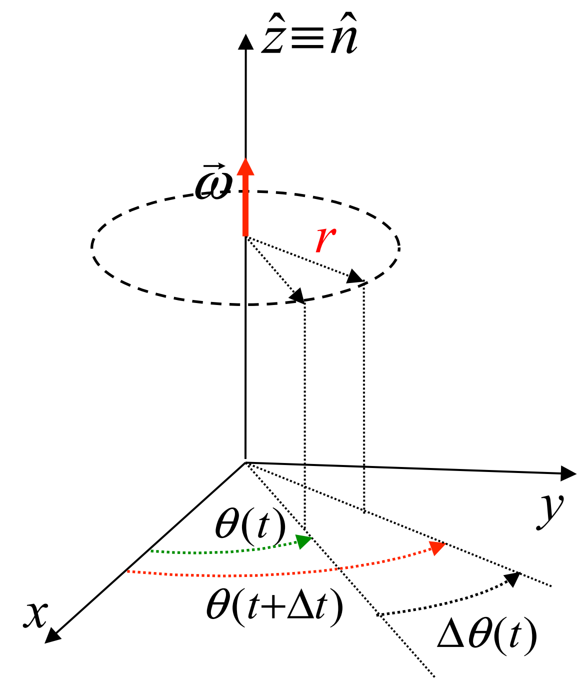


Variáveis rotacionais

c) Velocidade angular

Deslocamento angular:

$$\Delta\theta(t) = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$



Velocidade angular (escalar) média

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocidade angular instantânea (vetor)

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n}$$

➡ A velocidade angular é uma característica do corpo como um todo e não somente de um ponto particular nele situado.

Deslocamento angular em torno de $\hat{n}$: $\theta(t_2) - \theta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)\, dt$

Exemplo 1

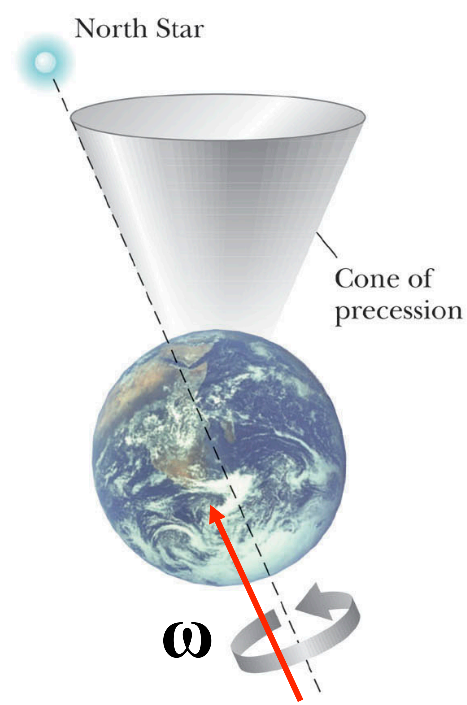
Cálculo da velocidade angular da Terra em torno do seu eixo.

A Terra completa uma revolução a cada 23h56min (dia sideral).

O módulo da sua velocidade angular é

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{dia}} = \frac{6,28 \text{ rad}}{86160 \text{ s}} = 7,23 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

e a sua direção aponta para o norte ao longo do eixo de rotação, cujo período de precessão é de aproximadamente 26.000 anos (analisaremos a questão da precessão mais tarde).



Variáveis Rotacionais

c) Aceleração angular

Variação da velocidade angular $\longrightarrow$ $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}(t+\Delta t) - \vec{\omega}(t)$

Aceleração angular média $\longrightarrow$ $\bar{\vec{\alpha}} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$

Aceleração angular instantânea $\longrightarrow$ $\vec{\alpha} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

A aceleração angular instantânea é um vetor paralelo a $\vec{\omega}$ quando o eixo de rotação é fixo!

$$\omega(t_2) - \omega(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t')dt'$$

Velocidade angular em função de $\vec{\alpha}$ $\longrightarrow$ $\vec{\omega}(t_2) - \vec{\omega}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\alpha}(t)dt$

na direção fixa ($\hat{n}$): $\omega(t_2) - \omega(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)dt$

Cinemática angular

Em capítulo anterior já estudamos o movimento circular uniforme. Vamos estudar agora o

Movimento circular uniformemente acelerado

Dadas as condições iniciais:

$$t_1 = 0 \text{ e } t_2 = t \rightarrow \theta(0) = \theta_0 \text{ e } \omega(0) = \omega_0$$

Temos, para *a* constante:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t; \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Comparando com as variáveis do movimento linear:

$$\theta(t) \leftrightarrow x(t); \quad \omega(t) \leftrightarrow v(t); \quad \alpha(t) \leftrightarrow a(t)$$

Exemplo 2

Pião sujeito à aceleração angular: $\alpha(t) = at^3 + bt$

Calcular $\omega(t)$ e $\theta(t)$.

Parâmetros: $a = 5 \;\text{rad/s}^5 \quad e \quad b = -4 \;\text{rad/s}^3$

Condições iniciais: $\omega(0) = 5 \;\text{rad/s} \quad \text{e} \quad \varphi(0) = 2 \;\text{rad}$

$$\omega(t) - \omega(0) = \int_0^t (at'^3 + bt')\, dt' = a\frac{t^4}{4} + b\frac{t^2}{2}$$

$$\theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \left[\omega(0) + a\frac{t'^4}{4} + b\frac{t'^2}{2} \right] dt' = \omega(0)t + a\frac{t^5}{20} + b\frac{t^3}{6}$$

Usando os valores numéricos:

$$\begin{cases} \omega(t) = 5 + 5\dfrac{t^4}{4} - 2t^2 & \text{(rad/s)} \\ \varphi(t) = 2 + 5t + \dfrac{t^5}{4} - 2\dfrac{t^3}{3} & \text{(rad)} \end{cases}$$

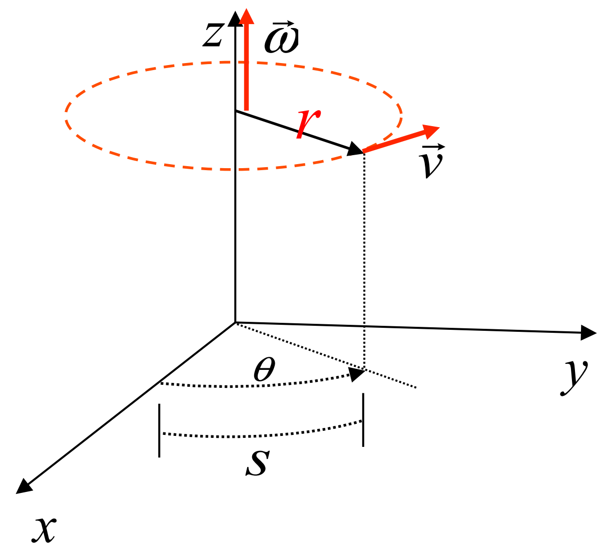
Relação com as variáveis lineares

- Posição:

$$s = r\theta$$

- Velocidade:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$



$\vec{v}$ é tangente à trajetória no ponto considerado

Vetorialmente: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Em módulo: $v = \omega r$
(pois $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ neste caso)

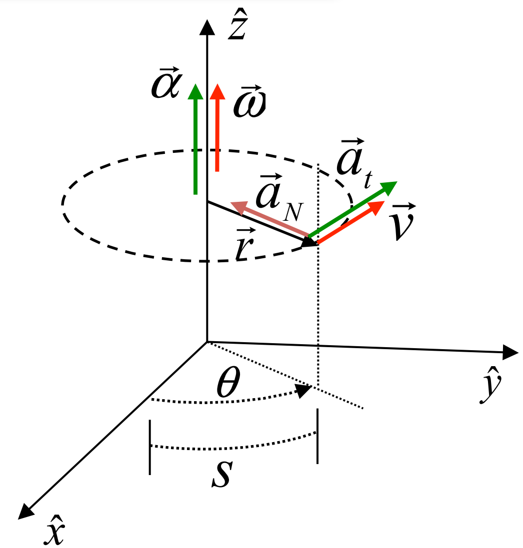
Relação com as variáveis lineares

Instituto de Física Gleb Wataghin

- Aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$$

$$= \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{a}_N}$$



$$\begin{cases} \vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r} = \alpha r\hat{v} & \text{(em módulo: } a_t = \alpha r\text{)} \\ \vec{a}_N = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2 r\hat{r} & \text{(em módulo: } a_N = \omega^2 r\text{)} \end{cases}$$

$\hat{v}$ é o vetor unitário tangente à trajetória;

$\hat{r}$ é o vetor unitário na direção que vai do eixo de rotação até a partícula (versor da direção radial)

Q1: Barata + carrosel

Uma barata está na borda de um carrossel em movimento. Se a velocidade angular do sistema carrossel + barata está diminuindo então a barata possui:

A. Somente aceleração angular
B. Somente aceleração centrípeta
C. aceleração angular e centrípeta;
D. Não possui nenhuma aceleração

[MC Types]

Exemplo 3

Velocidade e aceleração de um ponto na superfície da Terra a uma dada co-latitude: θ (aproximação de esfera perfeita).

$$R = 6,4\times10^{6}m \quad e \quad \omega = 7,2\times10^{-5} rad/s$$

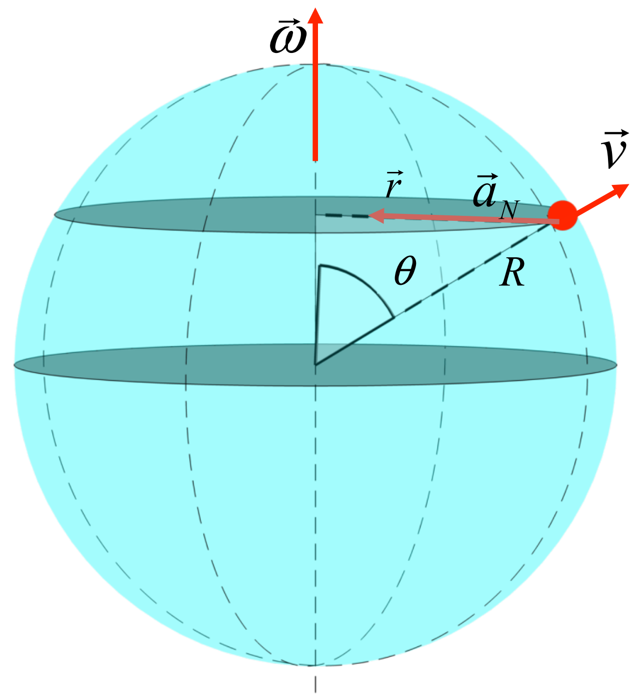
$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R} = \omega R\sin\theta\hat{v} = 470\sin\theta \text{ m/s } \hat{v}$$

Como a aceleração angular é nula:

$$\vec{a}_t = \alpha r\hat{v} = \vec{0}$$

A aceleração centrípeta é

$$\vec{a}_N = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2 r\hat{r} = -\omega^2 R\, sen\,\theta\,\hat{r} =$$
$$= -3,4\times10^{-2} sen\,\theta\, m/s^2\,\hat{r}$$



Nota: A 2ª lei de Newton, para ser correta quando escrita em um referencial acelerado (não inercial) com aceleração $\vec{a}_0$ precisa ser corrigida como:

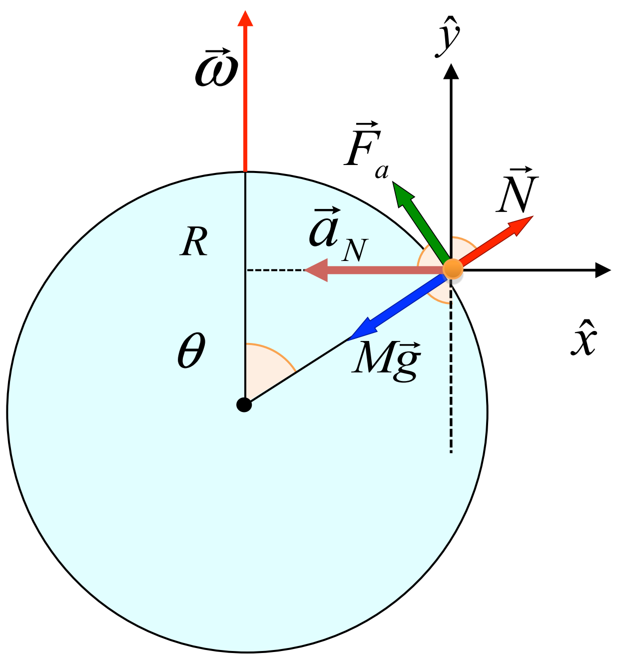
$$\vec{F}+\vec{F}_0 = m\vec{a} \text{ , onde}$$

$$\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$$

Peso aparente: corpo de massa M em equilíbrio

Num referencial inercial (portanto fora da Terra!) teremos que:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \quad \text{ou seja,} \quad M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_a = M\vec{a}_N$$



Esta igualdade vale para todos os instantes. Para encontrarmos o valor do peso aparente, N e da força de atrito, F_a , nossa estratégia será decompor todas estas forças nas direções paralela e normal à aceleração centrípeta (em um instante qualquer).

$$\hat{x}: \quad (N - Mg)\sin\theta - F_a \cos\theta = -Ma_N$$

$$\hat{y}: \quad (N - Mg)\cos\theta + F_a \sin\theta = 0$$

O que resulta em:

$$N = Mg - Ma_N \sin\theta = M\left(g - \omega^2 R \sin^2\theta\right)$$

$$N = M\left(g - 3{,}4\times 10^{-2}\sin^2\theta\right)$$

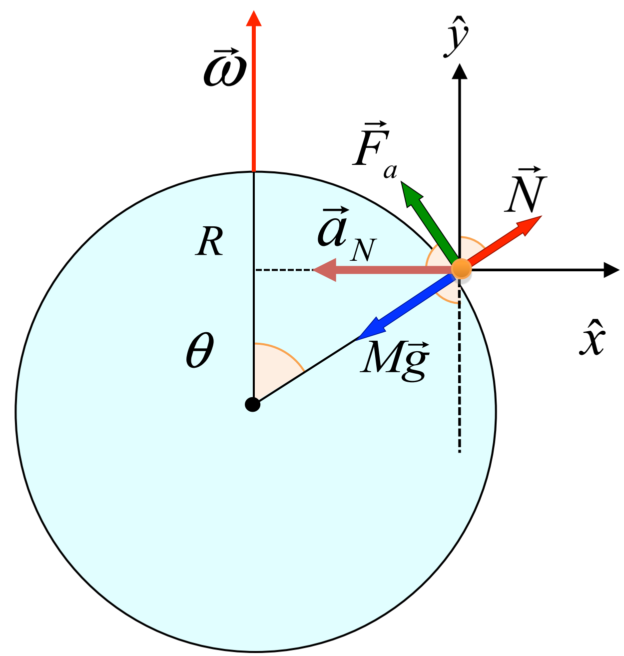
O peso aparente diminui à medida que nos aproximamos do Equador

Peso aparente: corpo de massa M em equilíbrio

Para a força de atrito teremos:

$$\hat{x}: \quad (N - Mg)\sin\theta - F_a\cos\theta = -Ma_N$$

$$\hat{y}: \quad (N - Mg)\cos\theta + F_a\sin\theta = 0$$



$$F_a = Ma_N\cos\theta = M\omega^2 R\cos\theta\sin\theta$$

A força de atrito estático que mantém um objeto parado na superfície da Terra é máxima a 45 graus e aponta para o norte no hemisfério norte e para o sul no hemisfério sul.

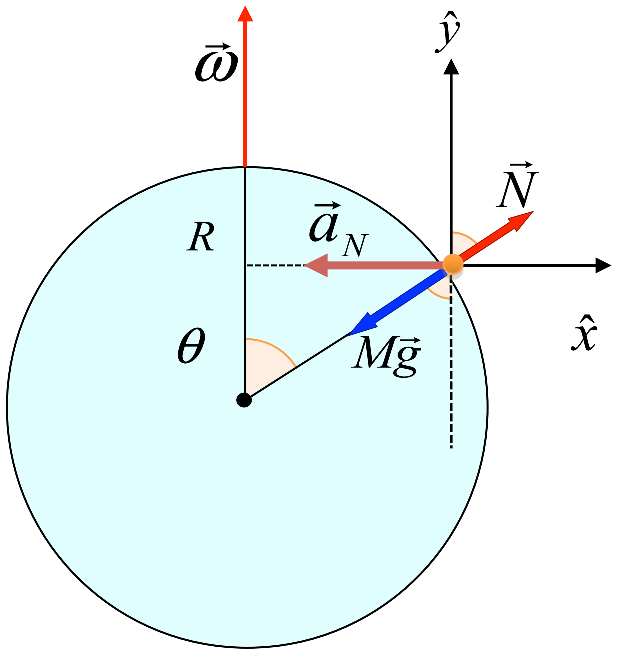
E se não houver a força de atrito? → Condição de não equilíbrio.

Condição de não equilíbrio: Achatamento

Se não houver força de atrito, teremos de modificar as equações anteriores para:

$$\hat{x}: \quad (N - Mg)\sin\theta = -Ma_N$$

$$\hat{y}: \quad (N - Mg)\cos\theta = Ma_y$$



Ou seja, naturalmente aparecerá uma aceleração na direção y (força resultante não nula nesta direção!), tal que:

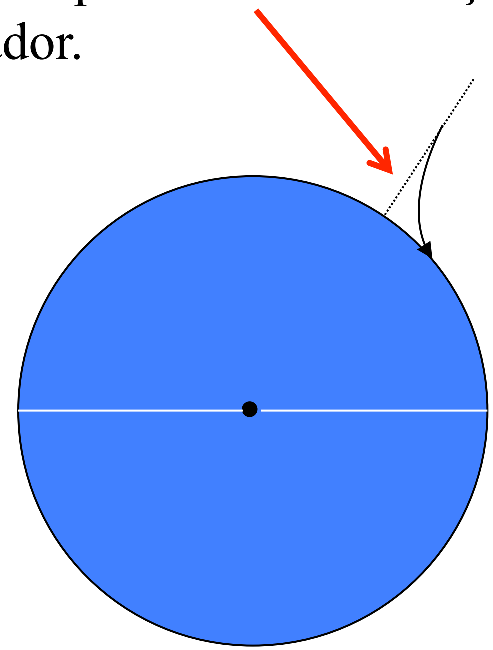
$$a_y = -\frac{a_N}{\sin\theta}\cos\theta = -\omega^2 R\cos\theta$$

Esta aceleração sempre aponta para o equador, não importando se estamos no hemisfério norte ou hemisfério sul.

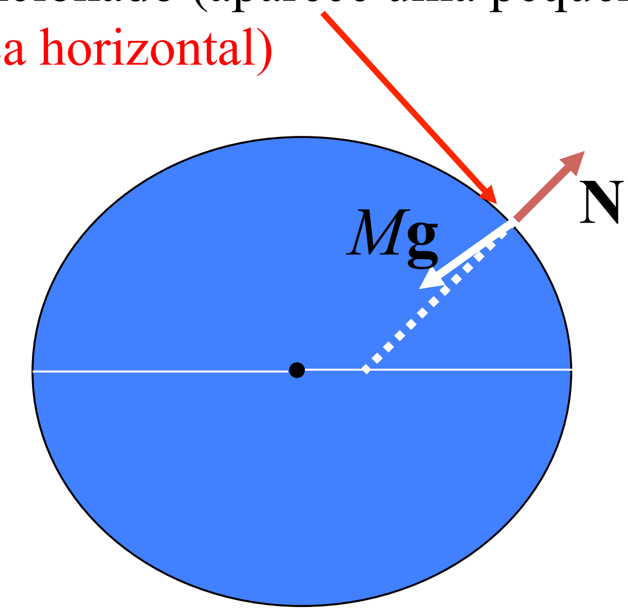
Achatamento do pólos

Assim, qualquer corpo sobre o qual não atua nenhuma força horizontal (com respeito à superfície da Terra) se desloca na direção do Equador (sul no hemisfério norte e norte no hemisfério sul)!

→ desvio diminuto de latitude dos corpos em queda livre na direção do Equador.



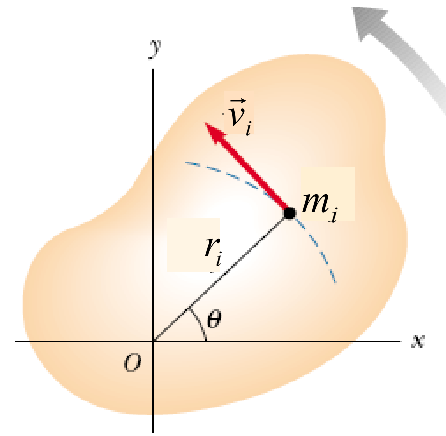
→ achatamento dos pólos ocorre pelo mesmo efeito e reduz o desvio mencionado (aparece uma pequena força horizontal)



Energia cinética de rotação

A energia cinética de um corpo em rotação é a soma:

$$K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \ldots\frac{1}{2}m_n v_n^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



No corpo em rotação, todos os pontos, exceto os radiais, têm mesma velocidade angular ω.

Então:

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2$$

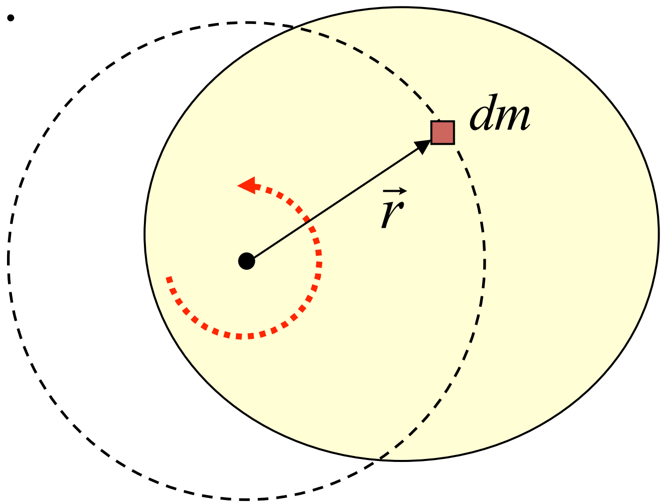
A grandeza entre parênteses é definida como o momento de inércia I do corpo em relação ao eixo de rotação. Isto é:

$I = \sum m_i r_i^2$ ou seja: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ (energia cinética de rotação)

Cálculo do momento de inércia

No caso de partículas puntiformes, vimos:

$$I = \sum m_i r_i^2$$



No caso de uma distribuição contínua de massa:

$$I = \int r^2\, dm \,,$$

onde *dm* é uma massa infinitesimal, que pode ser a de um fio, a de uma superfície ou a de um volume:

$$dm = \begin{cases} \lambda\, dl : \text{ em um fio} \\ \sigma\, dA : \text{ em uma superfície} \\ \rho\, dV : \text{ em um volume} \end{cases}$$

λ : densidade linear de massa
σ : densidade superficial de massa
ρ : densidade volumétrica de massa

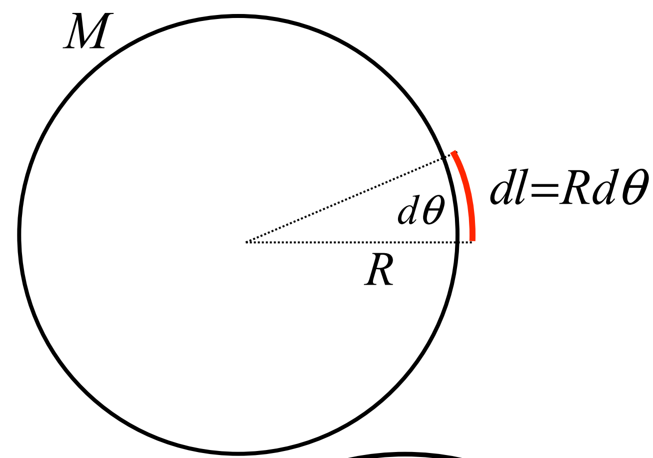
Cálculo do momento de inércia

Exemplos:

a) Anel de raio R e massa M uniformemente distribuída

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R} \Rightarrow dm = \frac{M}{2\pi R} R\,d\theta$$

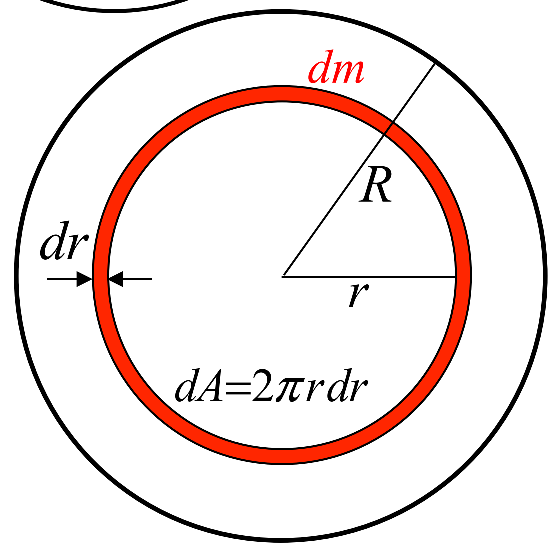
$$I = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\theta = MR^2$$



b) Disco de raio R e massa M (idem)

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \Rightarrow dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r\,dr$$

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{2M}{R^2} r\,dr = \frac{2M}{R^2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{1}{2} MR^2$$



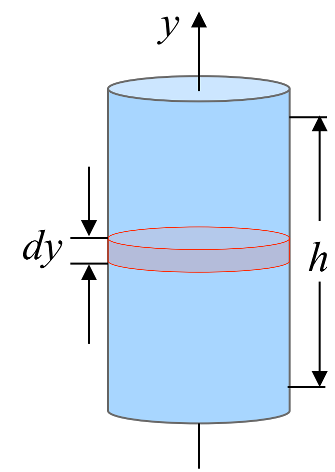
Cálculo do momento de inércia

c) Cilindro de raio R e massa m (idem)

Considerando o cilindro como superposição de discos de altura dy:

$$dI = \frac{1}{2} dm R^2$$

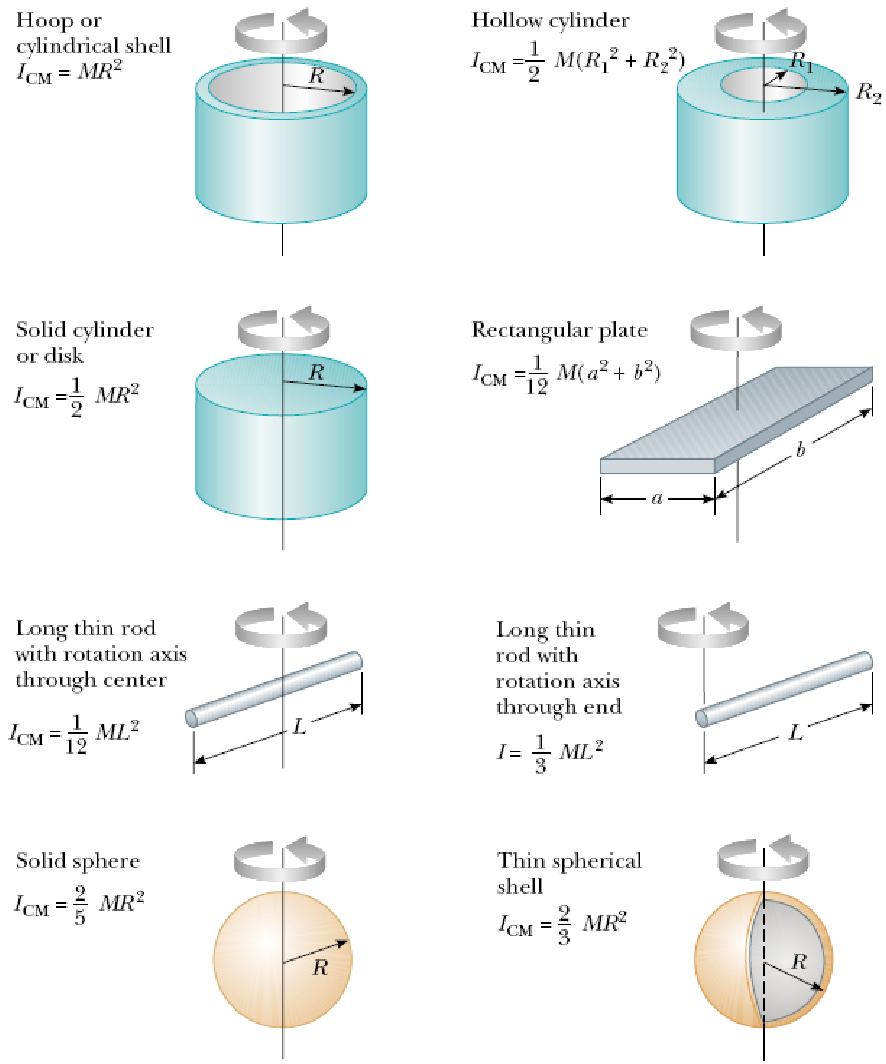
Mas $$dm = \rho dV = \frac{m}{\pi R^2 h} \pi R^2 dy$$



$$I = \frac{1}{2}\int R^2 dm = \frac{1}{2}\int_0^h R^2 \frac{m}{h} dy = \frac{1}{2} m R^2$$

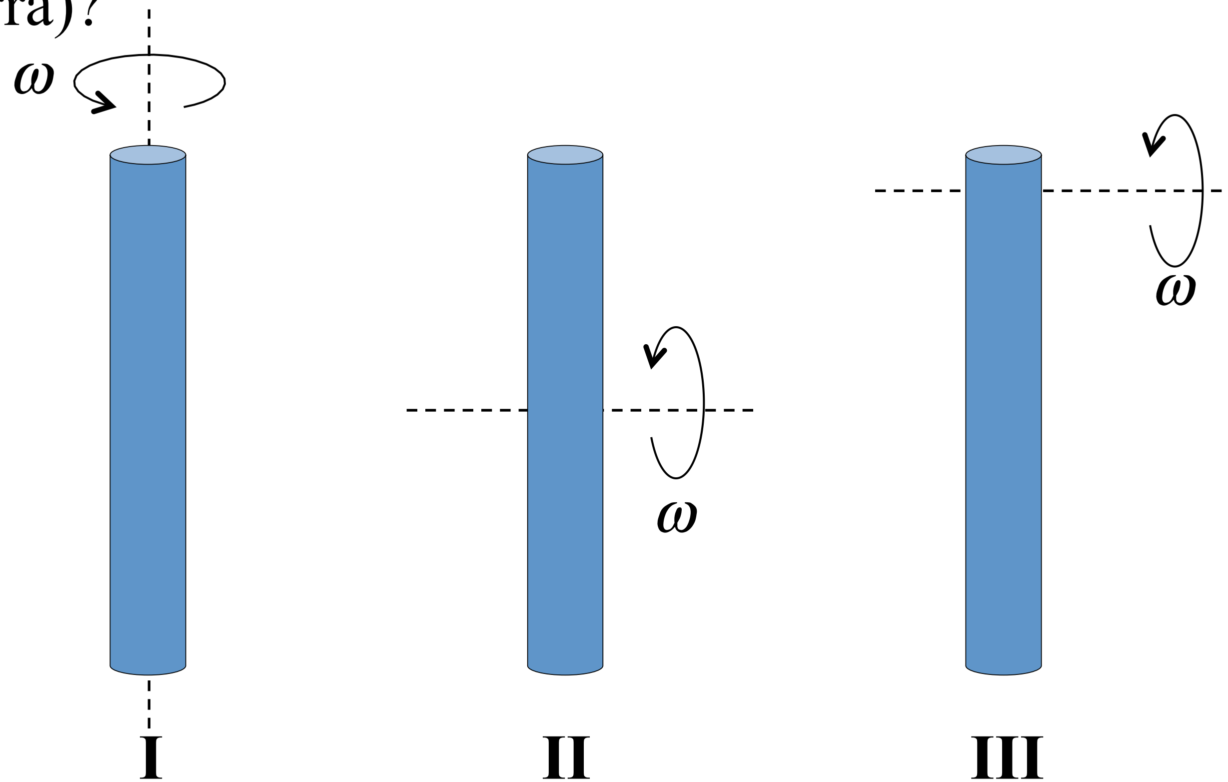
Ou seja, o momento de inércia de um cilindro não depende de sua altura.

Alguns momentos de inércia



Q2: Energia cinética

Três cilindros idênticos rodam com velocidade angular w ao redor dos eixos assinalados abaixo. Em quais dos casos a energia cinética é de rotação é maior (considere que o diâmetro é muito menor que o comprimento da barra)?



- A. I
- B. II
- C. III

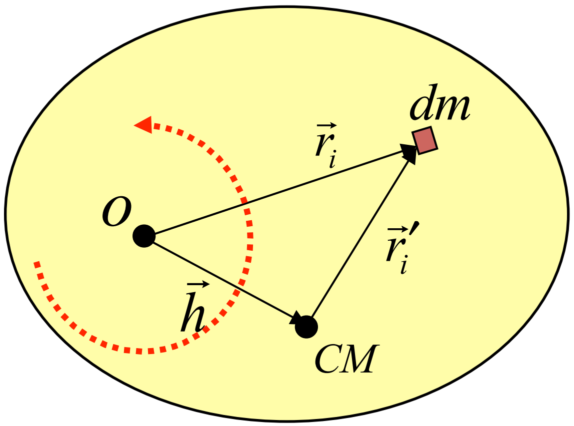
[MC Types]

Teorema dos eixos paralelos

Se conhecermos o momento de inércia I_{CM} de um corpo em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa, podemos facilmente determinar I_O do corpo em relação a um eixo paralelo que passa por O. De fato:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{h} \quad \Rightarrow r_i^2 = (\vec{r}_i' + \vec{h}) \cdot (\vec{r}_i' + \vec{h})$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i r_i'^2 + \sum_i m_i h^2 + 2\vec{h} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i'$$



Mas:

$$\vec{h} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{h}) = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$

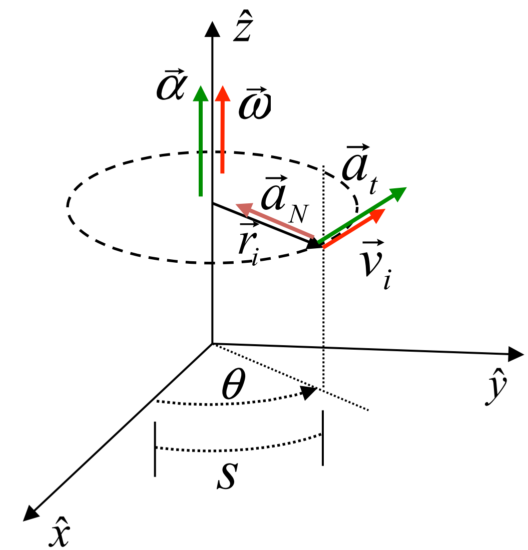
Então:

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 = I_{CM} + Mh^2 \quad \text{(teorema dos eixos paralelos)}$$

Torque e 2ª Lei de Newton da rotação

Vamos obter a relação entre as forças que atuam sobre um corpo em rotação (*com eixo fixo*) e sua aceleração angular. Notamos que apenas as forças que têm uma componente ortogonal tanto ao eixo quanto à direção radial podem colocar um corpo em rotação.

Decompomos a força $\vec{F}_i$ que atua sobre uma partícula de massa m_i do corpo rígido nas direções tangencial $\vec{F}_{(\|)i}$ e radial $\vec{F}_{(\perp)i}$:



$$\vec{F}_i = F_{(\|)i}\,\hat{v}_i + F_{(\perp)i}\,\hat{r}_i$$

Segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = m_i \alpha\, r_i \hat{v}_i - m_i \omega^2 r_i\, \hat{r}_i$$

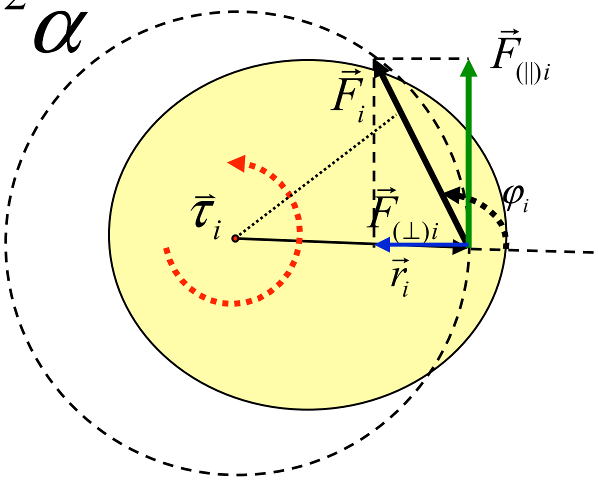
$$F_{(\|)i} = m_i \alpha\, r_i = m_i a_t$$ ⟹ Provoca a aceleração angular

$$F_{(\perp)i} = -m_i \omega^2 r_i = m_i a_N$$ ⟹ Não altera a velocidade angular (é uma força centrípeta).

Torque e 2ª Lei de Newton da rotação

No plano perpendicular ao eixo de rotação:

$$F_{(\|)i} = F_i \, sen\varphi_i = m_i r_i \alpha \Rightarrow r_i F_i \, sen\varphi_i = m_i r_i^2 \alpha$$



Vetorialmente: $\vec{r}_i \times \vec{F}_i = m_i r_i^2 \vec{\alpha} \equiv \vec{\tau}_i$

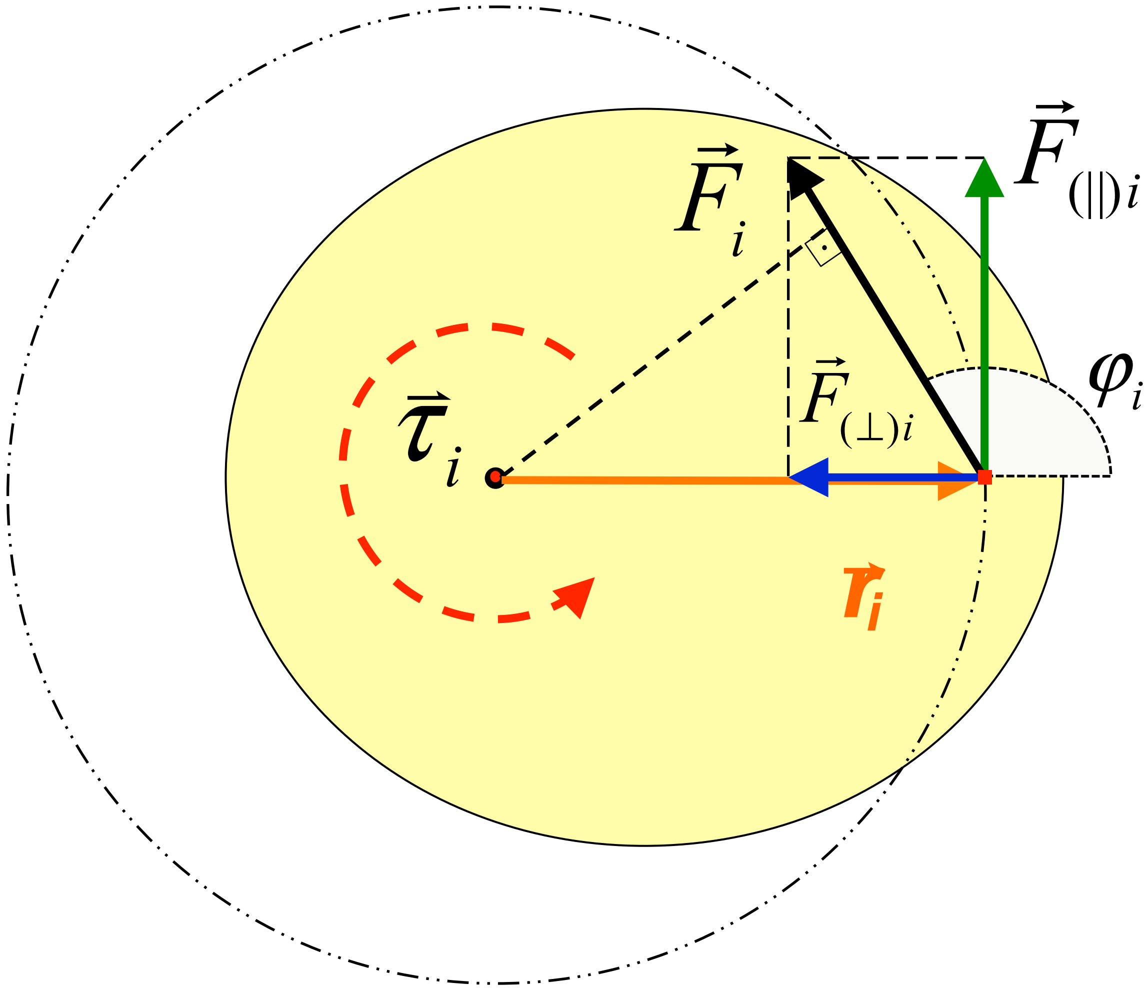
<u>Definição</u>: $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ é o torque da força externa $\vec{F}_i$ sobre a *i-ésima* partícula do corpo rígido (é um vetor saindo do plano do desenho)

No caso em que várias forças agem sobre a partícula, o torque total é:

$$\vec{\tau}_{res} = \sum_i \vec{\tau}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\vec{\alpha} \equiv I\vec{\alpha}$$

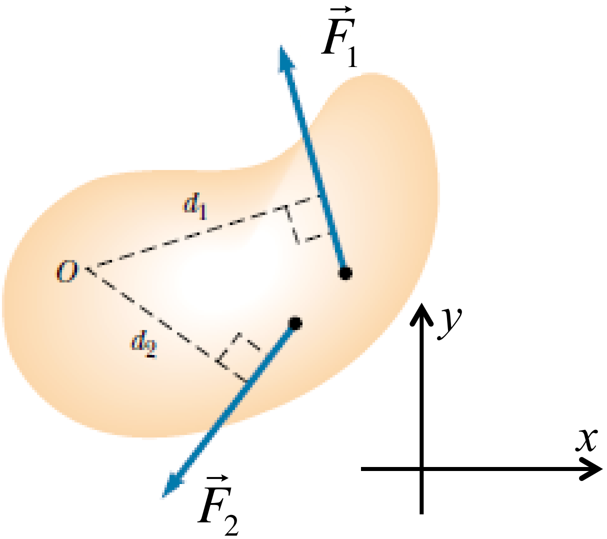
Finalmente: $$\boxed{\vec{\tau}_{res} = I\vec{\alpha}}$$ (2.ª lei de Newton da rotação)

Torque e 2ª Lei de Newton da rotação



Q3: Direção do torque

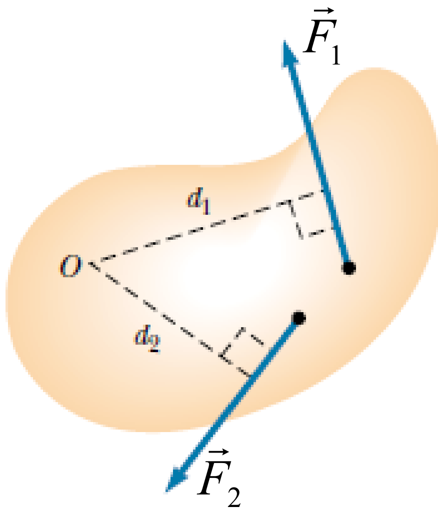
O módulo do torque produzido pelas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são:

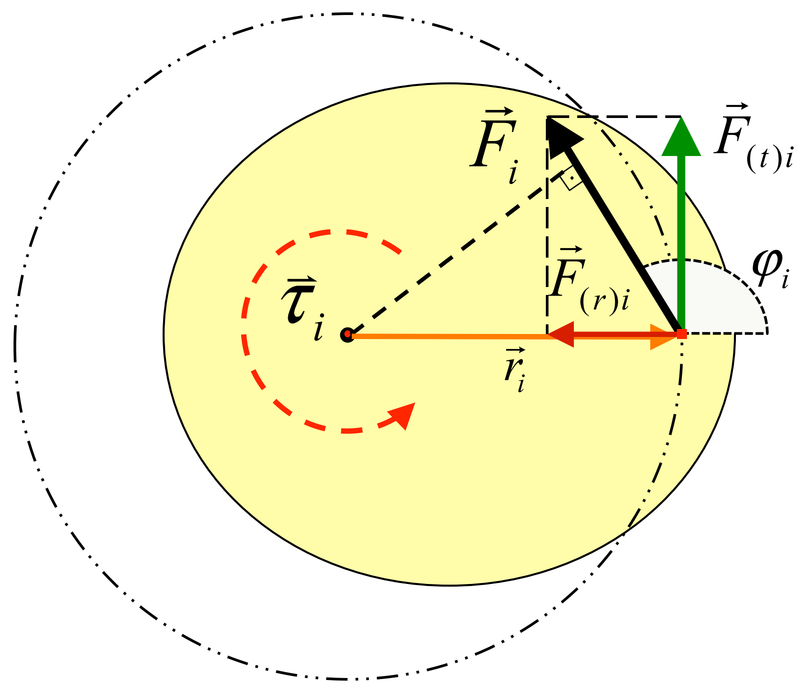


- A. Positivo em ambos os casos
- B. Positivo para $\vec{F}_1$ e negativo para $\vec{F}_2$
- C. Negativo para $\vec{F}_1$ e positivo para $\vec{F}_2$
- D. Negativo em ambos os casos

[MC Types]

Torque e 2ª Lei de Newton da rotação

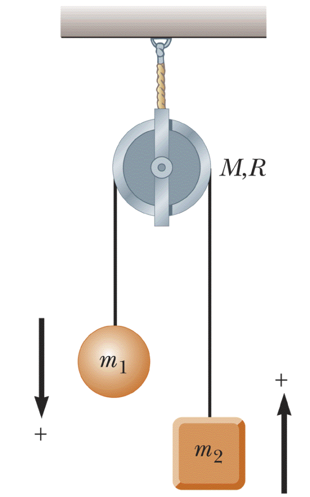




A força $\vec{F}_1$ tende a rodar o objeto no sentido anti-horário e $\vec{F}_2$ tende a rodá-lo no sentido horário. (2 sinais associados ao torque).

Exemplo 4

Máquina de Atwood com uma polia com massa



Massa m_1 ⟹ $\sum F_y = m_1 g - T_1 = m_1 a \quad (1)$

Massa m_2 ⟹ $\sum F_y = T_2 - m_2 g = m_2 a \quad (2)$

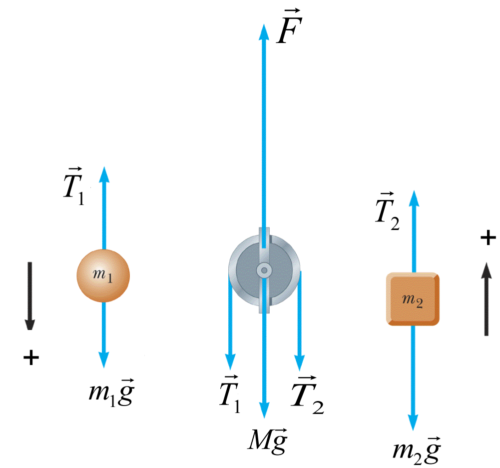
Polia

$$\sum \tau = T_1 R - T_2 R = I\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} M R a \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M a \quad (3)$$

Então, resolvendo (1), (2) e (3):

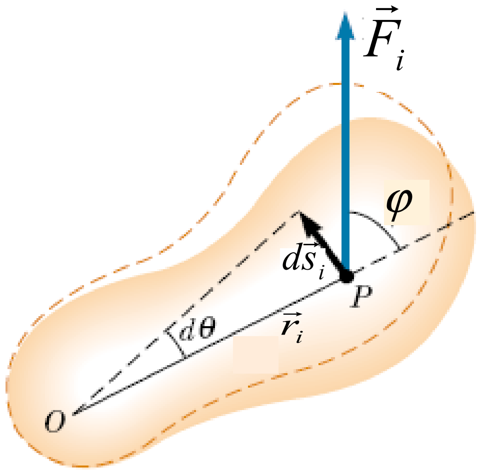
$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M} \right) g$$



O trabalho no deslocamento angular

Seja uma força externa $\vec{F}_i$ aplicada a uma partícula no ponto P. O trabalho infinitesimal num deslocamento $ds_i = r_i d\theta$ é:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = (F_i sen\varphi)\, r_i d\theta = \tau_i\, d\theta$$



($F_i sen\varphi$ é a componente tangencial de $\vec{F}_i$; a componente radial não trabalha). Então:

$$W = \sum_i \int \tau_i d\theta = \int \tau d\theta$$

Como $\tau = I\alpha$:

$$W = \int I\alpha d\theta = \int I \frac{d\omega}{dt} \omega dt$$

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\, \omega_f^{\ 2} - \frac{1}{2} I\, \omega_i^{\ 2} = \Delta K$$

(teorema do trabalho-energia cinética na rotação)

Potência no deslocamento angular

Usando a definição do momento de inércia:

$$W = \frac{1}{2} I \omega_f^{\ 2} - \frac{1}{2} I \omega_i^{\ 2} = \sum_k \frac{1}{2} m_k \rho_k^2 \omega_{kf}^{\ 2} - \sum_k \frac{1}{2} m_k \rho_k^2 \omega_{ki}^{\ 2}$$

$$= \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{kf}^{\ 2} - \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{ki}^{\ 2} = \Delta K$$

que é o teorema do trabalho-energia em sua forma usual.

Potência: é a taxa com que se realiza trabalho:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \tau \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$

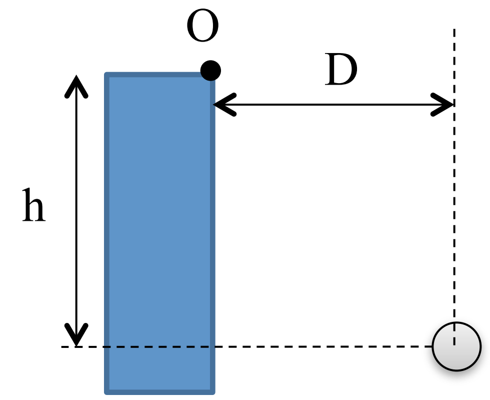
Compare com $\quad P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

Equações do movimento linear e rotacional

Movimento linear		Movimento de rotação (eixo fixo)	
velocidade linear	$v = \frac{dx}{dt}$	velocidade angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
aceleração linear	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	aceleração angular	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
força resultante	$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$	torque resultante	$\sum_i \vec{\tau}_i = I\vec{\alpha}$
a = constante	$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{cases}$	α = constante	$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$
trabalho	$W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$	trabalho	$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\,d\theta$
energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
potência	$P = Fv$	potência	$P = \tau\omega$
massa	m	Momento de inércia	I

Q4: Torque

Uma pedra cai do alto de um edifífico conforme mostra a figura. Qual o torque nesta pedra em relação ao ponto O?



A. Zero, pois torque só existe no movimento circular.

B. Zero, pois o angulo entre o deslocamento e o ponto O é zero.

C. mgh

D. mgD

[MC Types]

Exemplo 5

- Trabalho em uma máquina de Atwood

Se os corpos partem do repouso ($v_i = 0$):

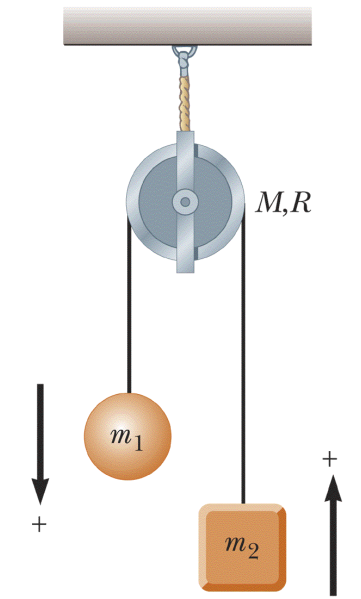
$$v_f = v_i + at = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} \right) g\,t$$

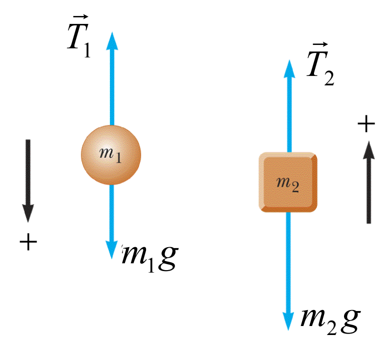
Velocidade angular:

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} \right) gt$$

$$K_{sistema} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^{\;2} + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^{\;2} + \frac{1}{2} I \omega_f^{\;2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2 + M/2} \right) g^2 t^2$$





Esta variação da energia cinética é igual ao trabalho das forças peso no sistema (verificar).

Exemplo 6

Um fio está enrolado num disco de raio *R* e massa *m*, e sua extremidade está amarrada numa haste. O disco, inicialmente em repouso, é liberado e inicia um movimento de translação e rotação enquanto o fio vai se desenrolando dele.

a) calcule a aceleração do centro de massa;

b) calcule o valor da tensão no fio;

c) utilizando conservação de energia, determine a velocidade do centro de massa em função de *h*.

a) $$mg - T = ma_{CM} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} TR = I\alpha = \dfrac{1}{2}mR^2\dfrac{a_{CM}}{R} \Rightarrow T = \dfrac{1}{2}m\,a_{CM} \quad (2) \end{array}\right\} a_{CM} = \frac{2}{3}g$$

b) $$T = \frac{mg}{3}$$

c) $$mgh = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{3}{4}mv_{CM}^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$