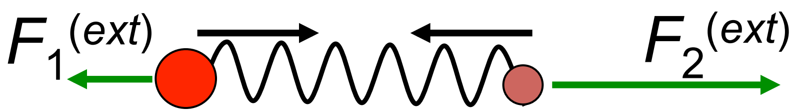
Física Geral I - F -128

Aula 9
Sistemas de partículas

$2^{\underline{0}}$ semestre, 2012

Sistema de 2 partículas: centro de massa

- Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 em uma dimensão:



$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_{12} + F_1^{(ext)} \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{21} + F_2^{(ext)} \end{cases}$$

Aqui, distinguimos forças internas (F_{12} e F_{21}) de forças externas ($F_1^{(ext)}$ e $F_2^{(ext)}$).

Somando-se as equações termo a termo:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_{12} + F_{21} + F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)}$$

$$\Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} = \sum F^{(ext)} \qquad \text{(pois } F_{12} = -F_{21}\text{)}$$

$\sum F^{(ext)}$ é a força externa resultante. As forças internas se cancelam.

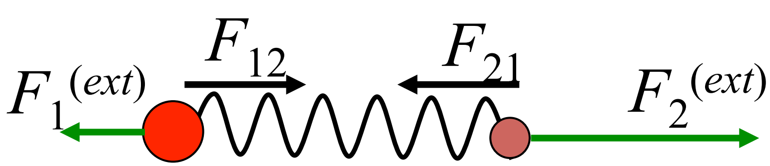
Sistema de 2 partículas: centro de massa

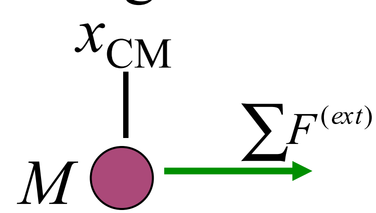
$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=\sum F^{(ext)} \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2(m_1x_1+m_2x_2)}{dt^2}=\sum F^{(ext)}$$

Definimos: $$\boxed{x_{CM}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}}$$ Então: $$\sum F^{(ext)}=M\frac{d^2x_{CM}}{dt^2}=Ma_{CM}$$

onde $M=m_1+m_2$ é a massa total do sistema.

O sistema se comporta como se toda massa estivesse concentrada no ponto x_{CM} (centro de massa) e a força externa agisse sobre ele..





$$\boxed{\sum F^{(ext)}=M\frac{d^2x_{CM}}{dt^2}}$$ (2ª Lei de Newton para um sistema de 2 partículas)

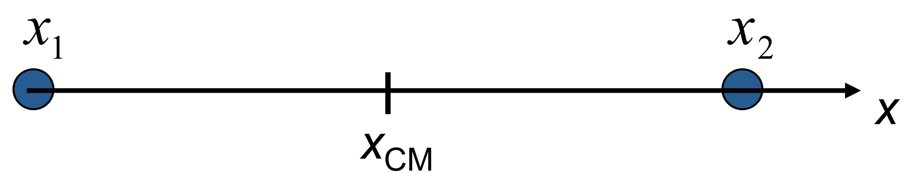
Em particular, se $$\sum F^{(ext)}=0\Rightarrow\frac{dx_{CM}}{dt}=v_{CM}=cte.$$

Cálculo do centro de massa

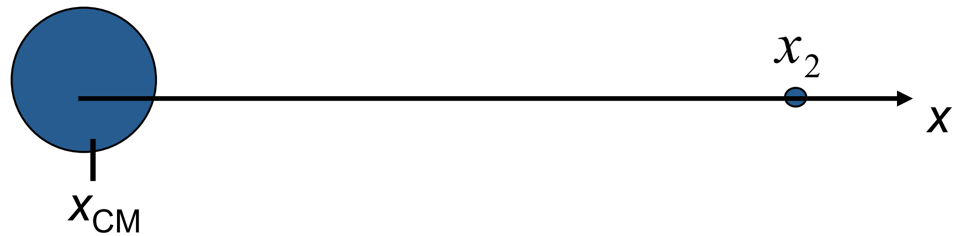
$$\boxed{x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$$

Exemplos:

(a) $m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

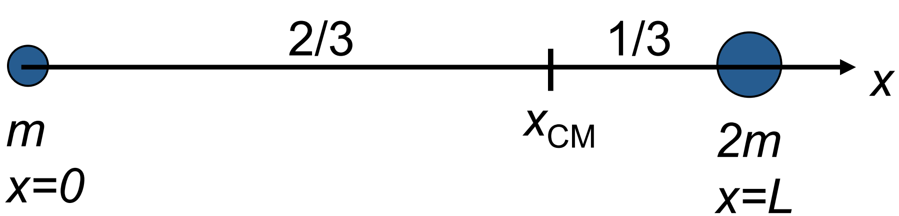


(b) $m_1 >> m_2 \Rightarrow x_{CM} \approx x_1$



(c) Em geral, o centro de massa é um ponto intermediário entre x_1 e x_2:

$$\boldsymbol{x_1 < x_{CM} < x_2}$$



$$x_{CM} = \frac{m \times 0 + 2m \times L}{3m} = \frac{2}{3} L$$

Q1: CM sistema Terra-Sol

A quantos quilômetros do centro do Sol encontra-se o CM do sistema Terra-Sol?

Dados: $M_{Sol}=2\times10^{30}$ kg, $M_{Terra}= 6\times10^{24}$ kg, $d=1.5\text{x}10^{8}$km

- 450
- 0

Generalização para N partículas:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = \cancel{F}_{12} + \cancel{F}_{13} + \cdots + F_1^{(ext)} \\ m_2 \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = \cancel{F}_{21} + \cancel{F}_{23} + \cdots + F_2^{(ext)} \\ \quad\vdots \\ m_N \dfrac{d^2 x_N}{dt^2} = \cancel{F}_{N1} + \cancel{F}_{N2} + \cdots + F_N^{(ext)} \end{cases}$$

Somando-se as equações, as forças internas se cancelam aos pares:

$$\Rightarrow m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \cdots + m_N \frac{d^2 x_N}{dt^2} = F_1^{(ext)} + F_2^{(ext)} + \cdots + F_N^{(ext)} = \sum F^{(ext)}$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i x_i}$$

$$\sum F^{(ext)} = \frac{d^2 \left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N \right)}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum F^{(ext)} = M \frac{d^2 x_{CM}}{dt^2}}$$

Generalização para 3 dimensões:

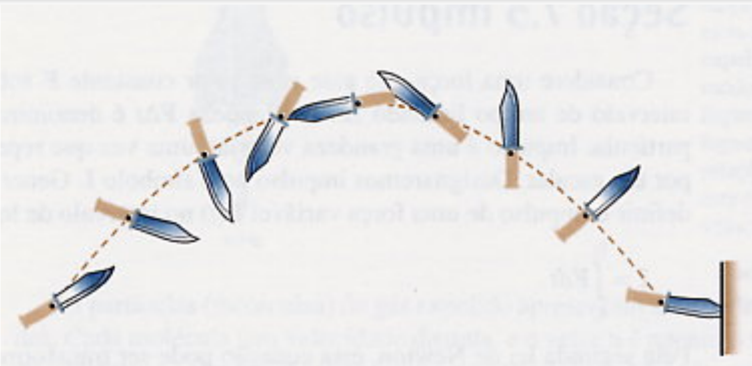
$$\left.\begin{aligned}
x_{CM} &= \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_Nx_N}{m_1+m_2+\cdots+m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\
y_{CM} &= \frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_Ny_N}{m_1+m_2+\cdots+m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\
z_{CM} &= \frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_Nz_N}{m_1+m_2+\cdots+m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}$$

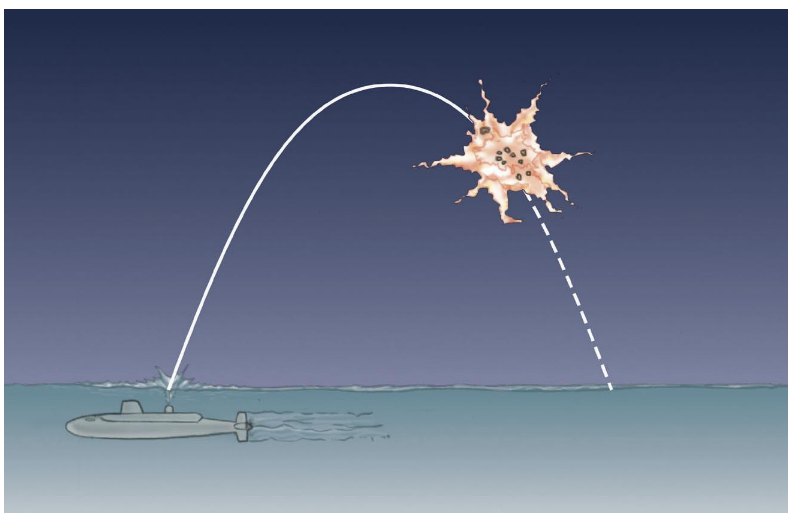
$$\sum \vec{F}^{(ext)} = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} + \cdots + m_N\frac{d^2\vec{r}_N}{dt^2} = M\vec{a}_{CM}$$

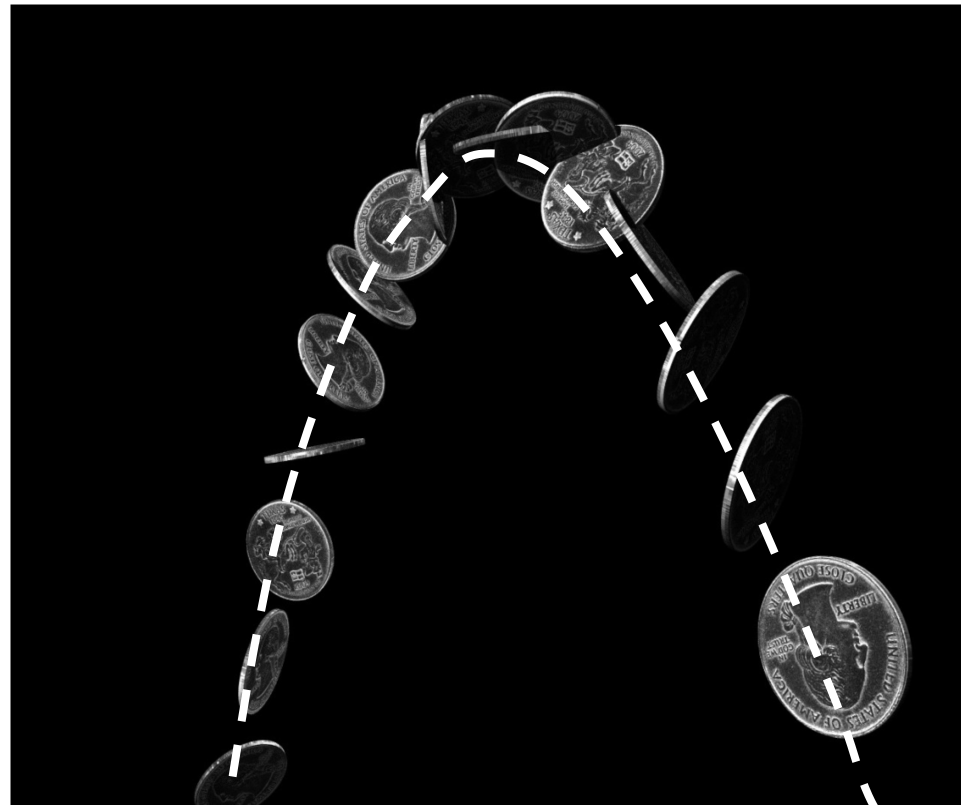
$$\boxed{\sum \vec{F}^{(ext)} = M\vec{a}_{CM}}$$

(esta é a 2ª lei de Newton para um sistema de partículas: o sistema responde à resultante das forças externas como se a massa total *M* estivesse toda concentrada no centro de massa)

2a Lei de Newton para um sistema de partículas:

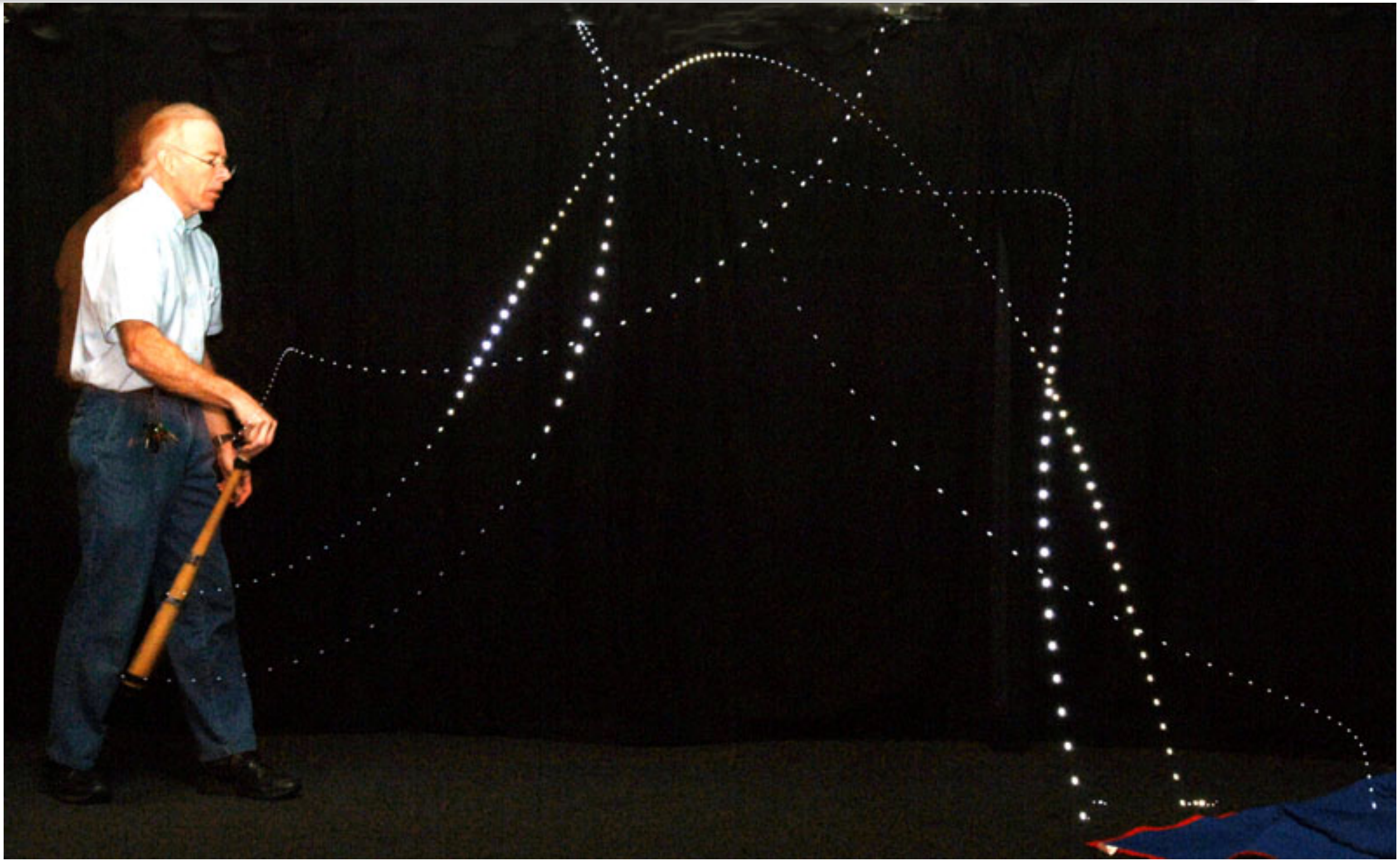






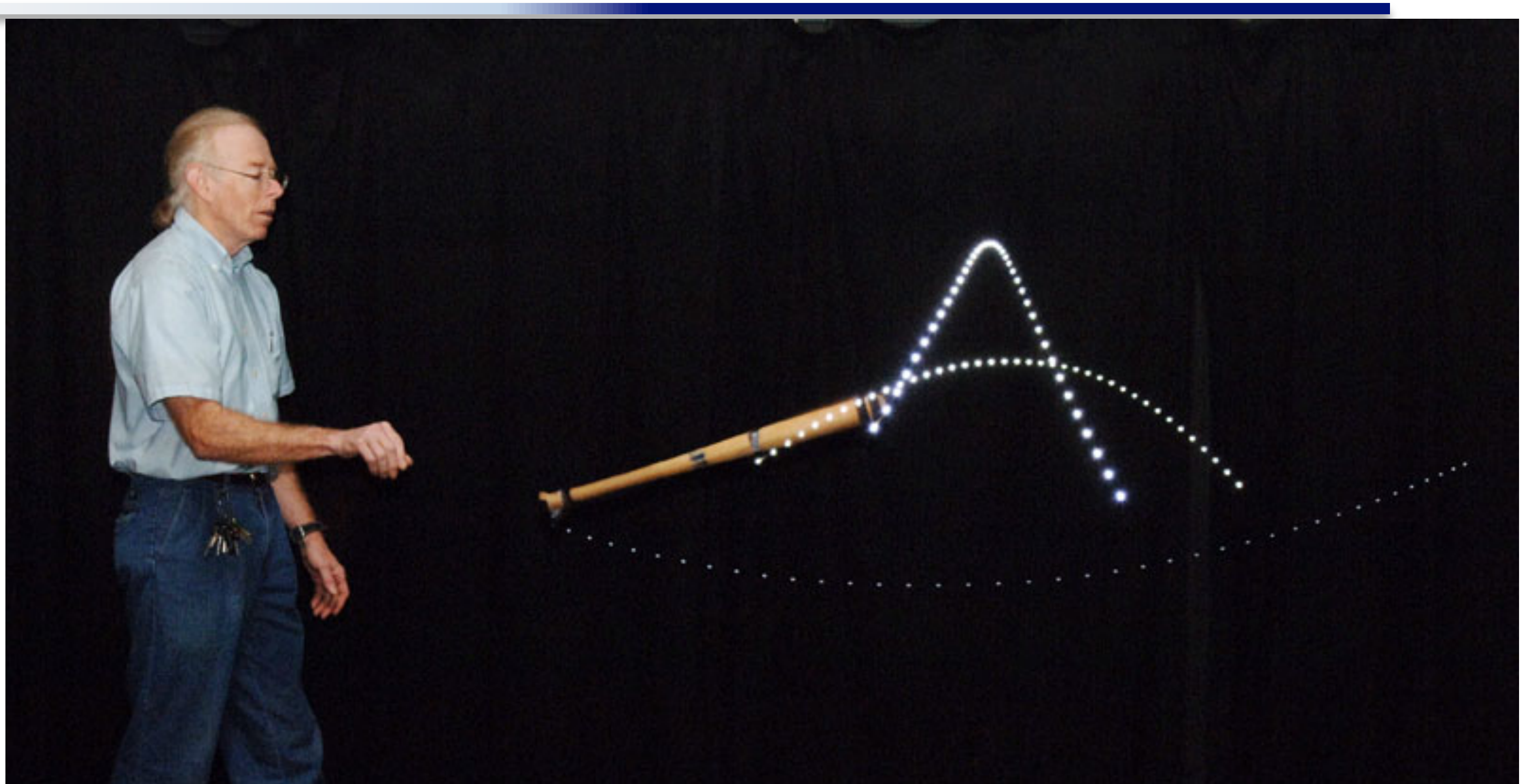
O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o *centro de massa descreve uma parábola*, como uma partícula.

2ª Lei de Newton para um sistema de partículas:



O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o *centro de massa (meio do taco) descreve uma parábola*, como uma partícula.

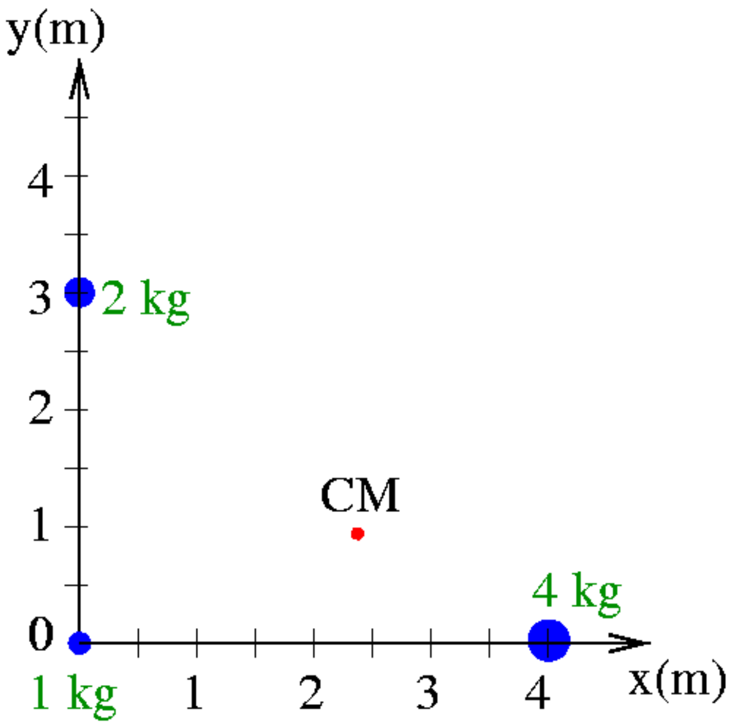
2ª Lei de Newton para um sistema de partículas:



O movimento dos sistemas acima é muito complicado, mas o *centro de massa (meio do taco) descreve uma parábola*, como uma partícula.

Exemplo: sistema de 3 partículas

Calcule a posição do centro de massa do sistema abaixo.



$$m_1 = 1\,\text{kg} \quad x_1 = 0\,\text{m} \quad y_1 = 0\,\text{m}$$

$$m_2 = 2\,\text{kg} \quad x_2 = 0\,\text{m} \quad y_2 = 3\,\text{m}$$

$$m_3 = 4\,\text{kg} \quad x_3 = 4\,\text{m} \quad y_3 = 0\,\text{m}$$

$$\mathrm{x_{CM}} = \frac{0\times1+0\times2+4\times4}{1+2+4}\,\text{m} = 2{,}3\,\text{m}$$

$$\mathrm{y_{CM}} = \frac{0\times1+3\times2+0\times4}{1+2+4}\,\text{m} = 0{,}9\,\text{m}$$

Centro de massa de corpos contínuos uniformes

Se um corpo consiste de uma distribuição contínua de massa, podemos dividi-lo em porções infinitesimais de massa *dm* e a soma transforma-se numa integral:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \rightarrow \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int z\,dm$$

A massa infinitesimal *dm* pode pertencer a um fio, uma superfície ou um volume:

$$dm = \begin{cases} \lambda\,dl & \lambda \text{ : densidade linear de massa} \\ \sigma\,dA & \sigma \text{ : densidade superficial de massa} \\ \rho\,dV & \rho \text{ : densidade volumétrica de massa} \end{cases}$$

Se o corpo (volume) tiver densidade uniforme: $dm = \rho\,dV = \frac{M}{V}dV$:

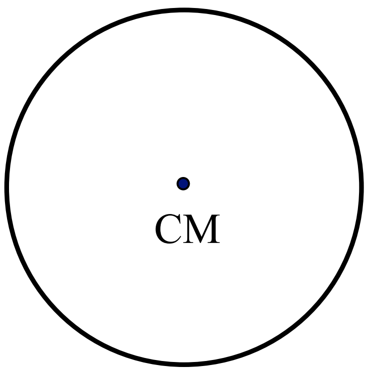
$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int x\,dV; \qquad y_{CM} = \frac{1}{V}\int y\,dV; \qquad z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

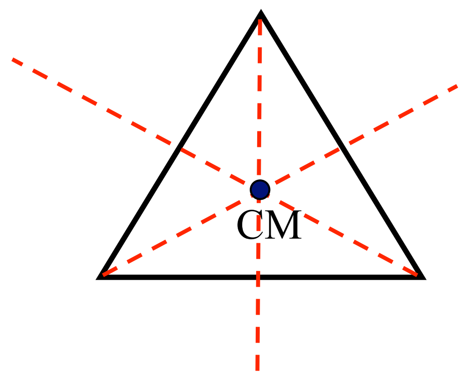
Normalmente, não precisamos calcular estas integrais triplas!

Centro de massa e simetrias

Se um corpo possui um ponto, uma linha ou um plano de simetria, o CM
situa-se nesse ponto, linha ou plano.

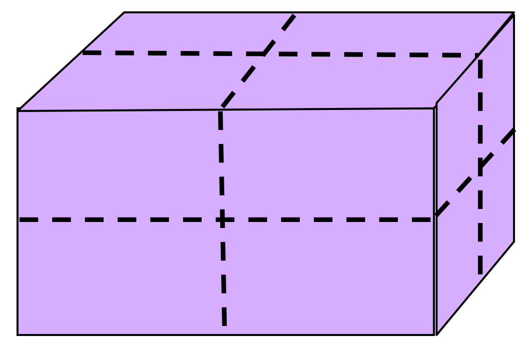
Centro de simetria





Linhas de simetria

Planos de simetria



- Note que para que um ponto, linha ou plano seja de simetria, é preciso que, para cada elemento de massa, exista um outro elemento igual na posição simétrica em relação ao ponto, linha ou plano. (confira isso para os elementos de simetria das figuras desta página)

Posição do Centro de Massa

Nota: o centro de massa de um corpo não é necessariamente um ponto do corpo!

Exemplos: donut, ferradura, corpo humano.

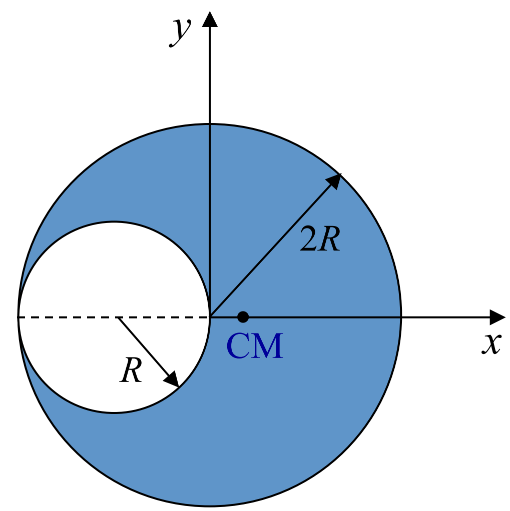
CM de um atleta de salto em altura pode passar abaixo do sarrafo!

Exercício

Um disco metálico de raio $2R$ tem um orifício de raio R, como mostra a figura. Localize as coordenadas do centro de massa do disco, sabendo-se que sua massa está uniformemente distribuída com densidade superficial σ.

O disco com orifício pode ser pensado como uma superposição de dois discos: um com massa

$M = \sigma\pi(2R)^2$ e outro com massa $m = -\sigma\pi R^2$



Então, tomando como origem o centro do disco de raio $2R$:

$$x_{CM} = \frac{M.0 + m(-R)}{M+m} = \frac{\sigma\pi R^3}{\sigma\pi(2R)^2 - \sigma\pi R^2} = \frac{R}{3}$$

Obviamente, por simetria, $y_{CM} = 0$.

Momento linear

O momento linear (ou quantidade de movimento) de uma partícula é uma quantidade vetorial definida como: $\vec{p}=m\vec{v}$

A 2ª lei de Newton pode ser escrita como: $\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt}$

O momento linear de um sistema de N partículas é a soma vetorial dos momentos lineares individuais:

$$\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N=m_1\vec{v}_1+\cdots+m_N\vec{v}_N$$

Derivando em relação ao tempo a expressão do centro de massa:

$$\vec{r}_{CM}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i=\vec{P}=M\vec{v}_{CM}$$

Derivando novamente e usando a 2a lei de Newton para um sistema de partículas:

$$\boxed{M\vec{a}_{CM}=\sum\vec{F}^{(ext)}=\frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Conservação de momento linear

Uma conseqüência imediata da 2ª lei de Newton para um sistema de partículas é a conservação do momento linear total do sistema na ausência de forças externas:

$$\sum \vec{F}^{(ext)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \overrightarrow{cte}.$$

Assim como no caso da conservação da energia mecânica, essa lei pode ser muito útil para resolver problemas, sem ter que lidar com a dinâmica detalhada do sistema.

Note que a única condição para a conservação do momento linear total é a ausência de forças externas. Não há nenhuma restrição quanto à presença de forças dissipativas, desde que elas sejam internas. Por outro lado, forças internas não podem mudar o momento linear total do sistema!

Q2: Barco a ventilador

Um físico tenta impulsionar um barco a vela ligando um ventilador a pilha direcionado à vela do barco (o físico está dentro do barco). Assinale a alternativa correta

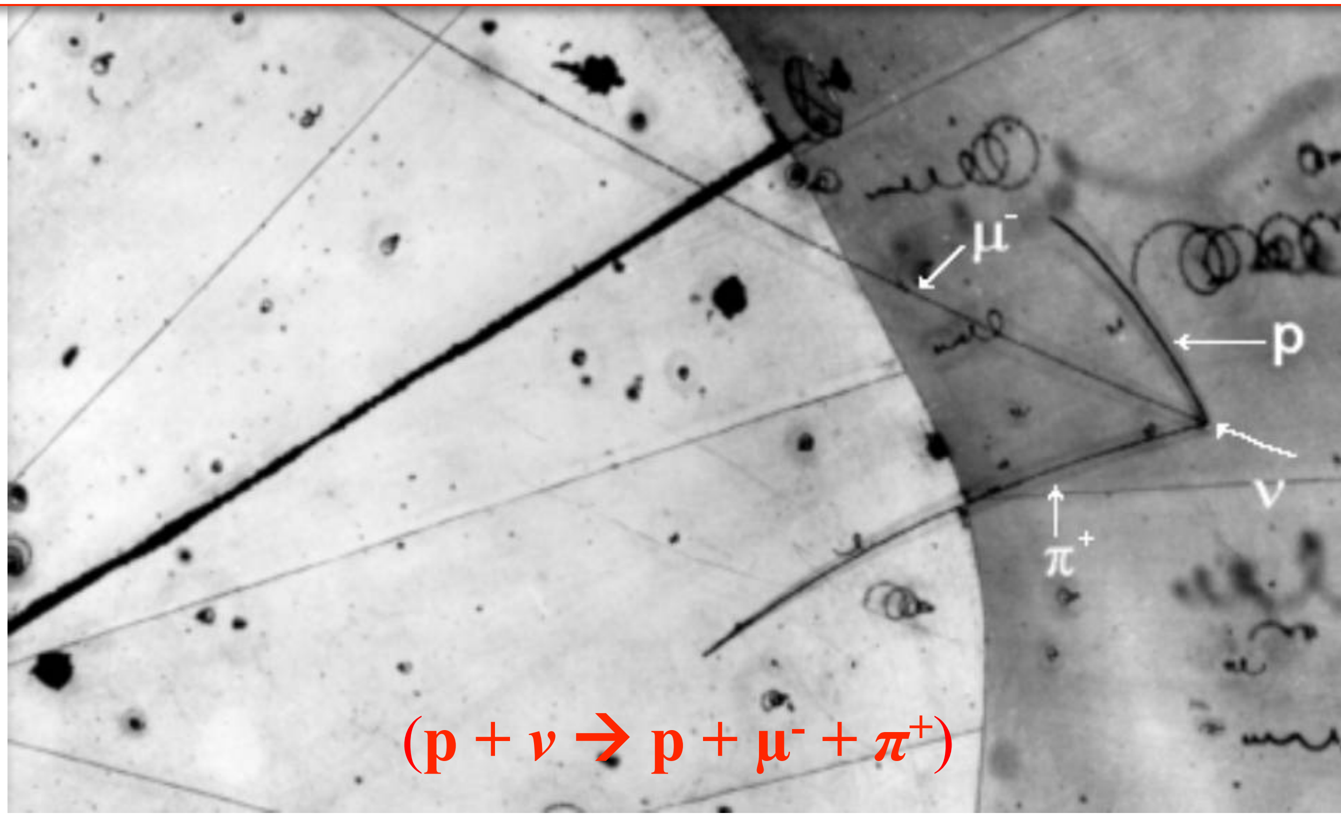
A. O sistema não funcionará, pois todas as forças são internas, e portanto $a_{CM}=0$.

B. O sistema funcionará (porém com baixa eficiência) devido ao consumo de energia química do ventilador, que por conservação de energia se converte em energia cinética do barco.

[Default]
[MC Any]
[MC All]

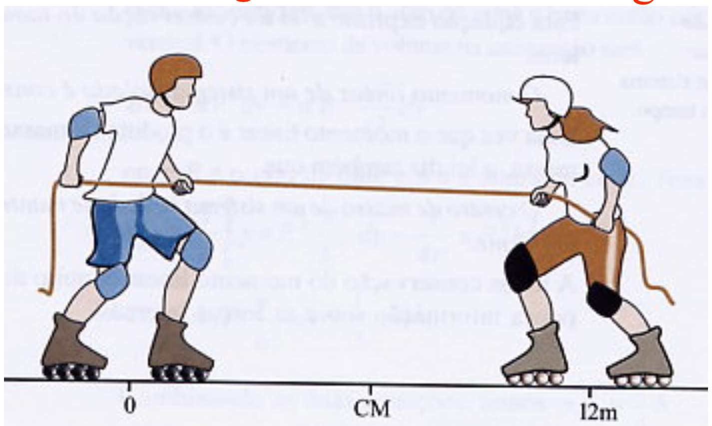
Física Nuclear

Nesta figura, um neutrino (ν) colide com um próton (p) estacionário. O neutrino se transforma num múon (μ-) e há a criação de um píon (π+). O neutrino, por ser neutro, não deixa rastro na câmara de bolhas. Observe que não haveria conservação de momento linear, se não houvesse uma partícula neutra colidindo pela direita.



Exemplo: v_{CM} = constante

m = 80 kg m = 60 kg



Dois patinadores no gelo (sem atrito com o chão) encontram-se inicialmente a uma distância de 12 m. Eles puxam as extremidades de uma corda até se encontrarem. Em que ponto eles se encontram? O resultado depende das forças exercidas por eles?

Só há forças internas ao sistema ⇨ o centro de massa tem velocidade constante.

$$x_{CM} = \frac{0 \times 80 + 12 \times 60}{80 + 60}\,\mathrm{m} = 5{,}1\,\mathrm{m} \Rightarrow$$

Os patinadores se encontrarão a 5,1 m da posição inicial do patinador da esquerda. **Não importam as forças exercidas por eles (internas).**

Momento de um sistema de partículas no R_{CM}

Se v_{CM}= constante, um referencial amarrado ao centro de massa (CM) é um referencial inercial, chamado referencial do centro de massa (R_{CM}). Ele tem interesse físico, pois dado um sistema de partículas, ele está naturalmente definido, não dependendo da escolha que se faça para o referencial.

Vimos: $$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

Como $\vec{v}_{CM} = 0$ no R_{CM} $\quad \Rightarrow \quad$ $\vec{P} = 0$ no R_{CM}.

Ou seja, no R_{CM} o momento total de um sistema de partículas é nulo, quer o sistema seja isolado ou não.

Vantagem: o R_{CM} é o referencial de menor energia cinética do sistema. De fato, para um sistema de duas partículas:

$$v_1 = V_1 + v_{CM} \quad ; \quad v_2 = V_2 + v_{CM} \; ,$$

onde V_1 e V_2 são as velocidades das partículas 1 e 2 em relação ao CM.

Momento de um sistema de partículas no R_{CM}

É claro que:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0$$

Então, considerando a energia cinética:

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2 =$$

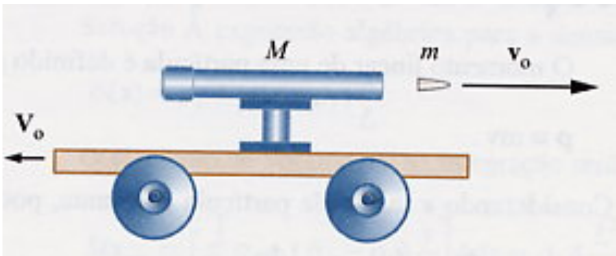
$$= \frac{1}{2} m_1 (V_1 + v_{CM})^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2 + v_{CM})^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m_1 V_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2{}^2}_{(K)_{RCM}} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}{}^2}_{K_{CM}} + \underbrace{(m_1 V_1 + m_2 V_2) v_{CM}}_{=0}$$

O primeiro termo é a energia cinética do sistema no referencial do CM e o segundo é a energia associada ao movimento do CM. No referencial do CM, esta parcela é nula.

Exemplo

Um canhão de massa $M = 100$ kg dispara uma bala de massa $m = 1{,}0$ kg com velocidade de 300 m/s em relação ao canhão. Imediatamente após o disparo, quais são a velocidade da bala e do recuo do canhão?

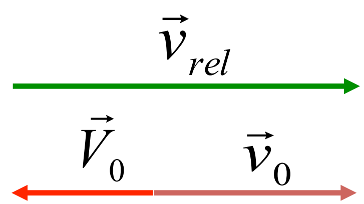


- Tanto inicialmente como imediatamente após a explosão, o momento linear total do sistema é nulo, pois as forças que atuam durante a explosão são todas forças internas.

Os módulos das velocidades estão assim relacionados:

$$\begin{cases} MV_0 = mv_0 \\ v_{rel} = v_0 + V_0 \end{cases}$$

- Note que $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_0 - \vec{V}_0$



Resolvendo o sistema de equações, encontramos:

$$\begin{cases} V_0 = \dfrac{m}{m+M} v_{rel} = 2{,}97 \text{ m/s} \\ v_0 = v_{rel} - V_0 \cong 297 \text{ m/s} \end{cases}$$

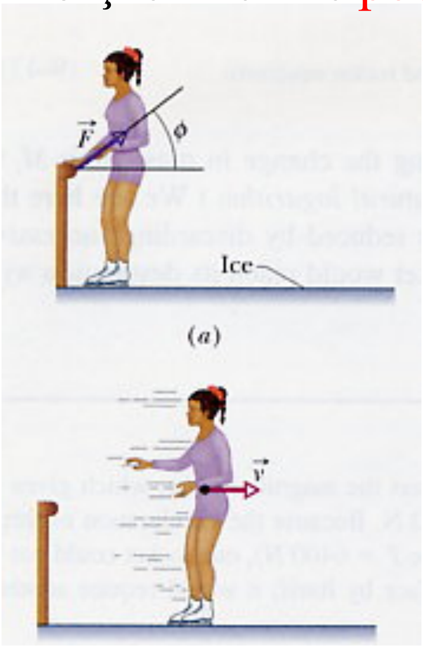
O movimento de recuo do canhão sugere um método de propulsão!

Trabalho das forças externas e internas

Vimos que as forças internas não contribuem para a variação do momento total de um sistema de partículas. E contribuem para a energia?

Para a partícula i : $(\Delta K)_i = \int \vec{F}^{\,ext} \cdot d\vec{s}_i + \int \vec{f}^{\,\mathrm{int}} \cdot d\vec{s}_i$

Para o sistema todo, a variação da energia cinética é a soma do trabalho total das forças externas e do trabalho total das forças internas. O trabalho total das forças internas pode não ser nulo. Exemplos:

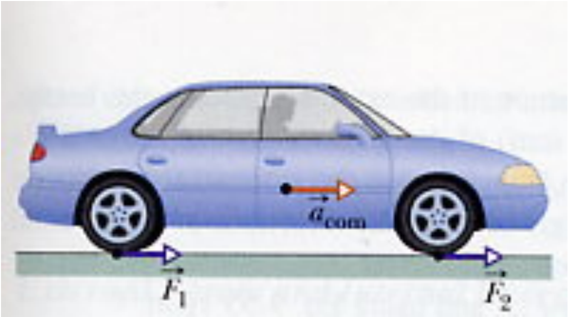


a) Patinadora

Considere a situação ao lado, em que uma patinadora empurra um corrimão (com uma força $\vec{F}$) e adquire energia cinética no processo. Nessa situação, a força $\vec{F}$ acelera o CM da patinadora, mas não realiza trabalho. A patinadora gasta energia (muscular), que se transforma em energia cinética. Há apenas transferência de energia entre partes internas do sistema.

Trabalho das forças externas e internas

b) Propulsão de um carro: a força externa $\vec{F}$ que acelera o CM do carro é a soma das quatro forças de atrito estático (só duas mostradas). Porém, ela não transfere energia cinética para o carro, pois não realiza trabalho; o aumento da energia cinética se deve à transferência de energia interna armazenada no combustível.



Durante a freada de um carro sem derrapar, o atrito com o solo é também estático, portanto não realiza trabalho. É o trabalho do atrito interno (rodas-freio) que "dissipa" a energia cinética do veículo. No entanto:

$$\vec{F}_{atr} = M\,\vec{a}_{CM}$$

Q3: Forças Internas

Qual a única alternativa verdadeira, na ausência de forças externas:

A. Forças internas podem mudar a energia cinética do sistema, mesmo sem realizar trabalho. Momento linear é sempre conservado.

B. Forças internas podem mudar a energia cinética do sistema, mas neste caso o momento linear não se conserva, pois trabalho foi realizado.

C. Forças internas nunca mudam a energia cinética do sistema. O momento linear é sempre conservado.

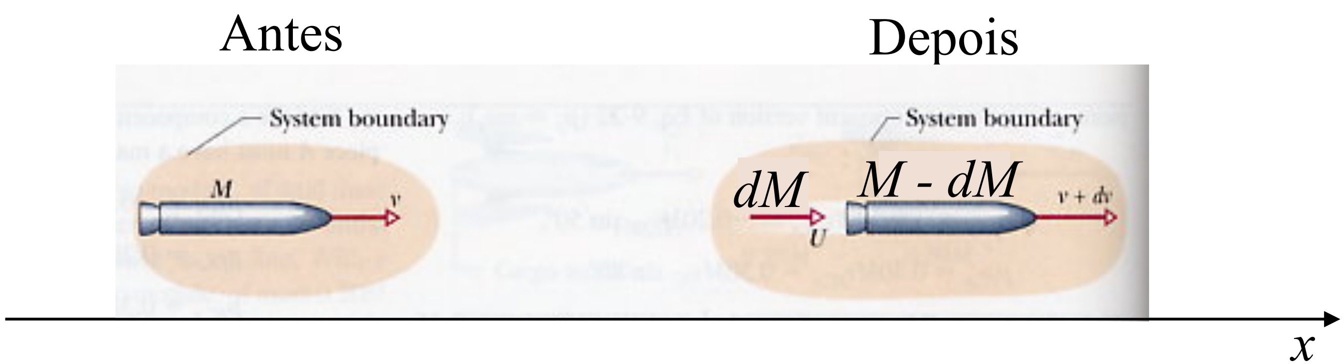
[Default]
[MC Any]
[MC All]

Sistemas de massa variável (propulsão de foguetes, etc)

Um foguete com velocidade instantânea v e massa instantânea M ejeta produtos de exaustão com massa dM e velocidade U.

Depois de um tempo dt, o foguete tem massa $M-dM$ e velocidade $v+dv$.

Todas as velocidades são medidas no referencial inercial da Terra.



Como o sistema (foguete + produtos de exaustão) é fechado e isolado, aplicamos a conservação do momento linear: $P_i = P_f$

Antes: $P_i = M v$

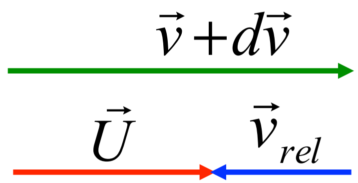
Depois: $P_f = (M - dM)(v + dv) + dM\, U$

$$\Rightarrow M dv = (v + dv - U)\, dM \qquad (1)$$

Propulsão de foguetes

Introduzindo a velocidade $\vec{v}_{rel}$ dos produtos de exaustão em relação ao foguete (é essa quantidade que é controlada, pois está ligada ao processo de combustão):

$$\vec{v}_{rel} = \vec{U} - (\vec{v} + d\vec{v}) \xrightarrow[\text{em termos dos módulos}]{} U = -v_{rel} + (v + dv)$$



(é claro que a velocidade relativa $\vec{v}_{rel}$ aponta na direção de x negativo, daí o sinal)

Então, reescrevendo (1):

$$\boxed{M dv = dM \; v_{rel}}$$ **(Equação fundamental da propulsão de foguetes)**

Compare com o resultado anterior do canhão ($V_0 = dv$; $m = dM$):

$$V_0 = \frac{m}{m+M} v_{rel} \xrightarrow[M>>m]{} MV_0 = mv_{rel}$$

Propulsão de foguetes

$$Mdv = dM \quad v_{rel} \Rightarrow M\frac{dv}{dt} = v_{rel}\frac{dM}{dt} = R\,v_{rel}\,,$$

onde $\dfrac{dM}{dt} = R$ é a taxa de consumo de massa de combustível

Reescrevendo: $Rv_{\mathrm{rel}} = Ma$, donde se nota que o empuxo Rv_{rel} tem o mesmo efeito de uma força resultante!

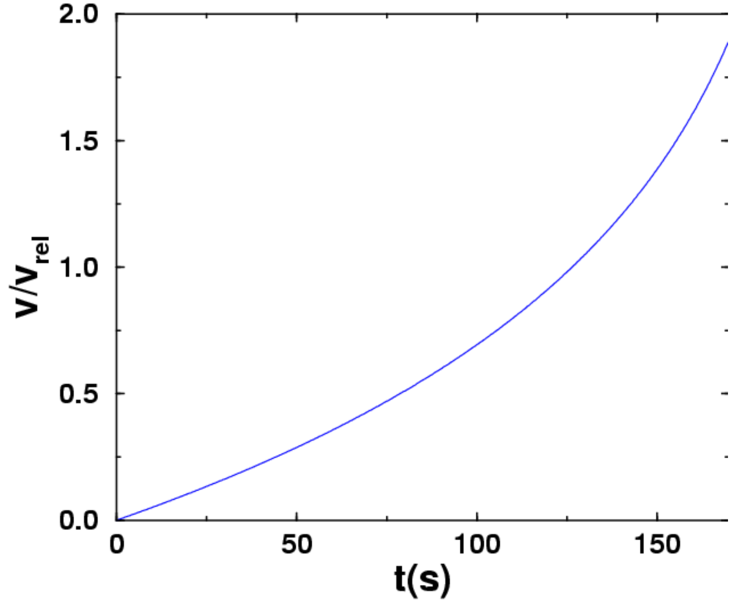
Entretanto, mesmo que Rv_{rel} seja constante o movimento do foguete não é uniformemente acelerado, pois a massa é variável:

$$dv = v_{rel}\frac{dM}{M} \Rightarrow \int_{v_i}^{v_f} dv = v_{rel}\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M} \Rightarrow \boxed{v_f - v_i = \Delta v = v_{rel}\ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)}$$

onde corrigiu-se o sinal de dM para considerarmos a variação de massa do foguete, e não do combustível ejetado.

Propulsão de foguetes:

$$M(t) = M_i + Rt \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = v_0 + v_{rel} \ln\left(\frac{M_i + Rt}{M_i}\right)}$$



A curva *v*(*t*) não é linear por causa da perda de massa.

Para alguns combustíveis:

- Querosene e oxigênio líquido (programa Apolo): v_{rel} » 10.000 km/h
- Hidrogênio líquido e oxigênio líquido (ônibus espacial): v_{rel} » 11.500 km/h
- Valores no vácuo: 10-20% maiores
- Considerações de estabilidade limitam M_i/M_f »10 Þ Dv » 2,3 v_{rel} <30.000 km/h
- Mas, v_{escape} » 40.000 km/h !!!!!!! Þ O que fazer??

Foguetes multi-estágios:

- Ao final de um estágio de aceleração, descarta-se a carcaça do estágio anterior (tanques de combustíveis, motores...)

Por que isso é vantajoso?

$$\text{Primeiro estágio}: M_0 \rightarrow M_1 \Rightarrow \Delta v_1 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\right)$$

$$\text{Segundo estágio}: \text{descarte de massa } \delta$$

$$M_1 - \delta \rightarrow M_2 - \delta \Rightarrow \Delta v_2 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_1 - \delta}{M_2 - \delta}\right)$$

Aceleração total com descarte da carcaça:

$$\Delta v_{desc} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\frac{M_1 - \delta}{M_2 - \delta}\right)$$

Foguetes multi-estágios

Aceleração total com descarte da carcaça:

$$\Delta v_{desc} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\frac{M_1-\delta}{M_2-\delta}\right)$$

Aceleração total sem descarte da carcaça:

$$\Delta v_{sem} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_1}\frac{M_1}{M_2}\right) = v_{rel} \ln\left(\frac{M_0}{M_2}\right)$$

Comparando:
(mostre isso!)

$$\frac{M_1}{M_2} > 1 \Rightarrow \frac{M_1-\delta}{M_2-\delta} > \frac{M_1}{M_2} \qquad \boxed{\Rightarrow \Delta v_{desc} > \Delta v_{sem}}$$

- Quanto maior a carcaça d descartada maior o ganho no descarte!

Dados do sistema Saturno V-Apolo (viagens à Lua)

δ $M_{total}=2{,}734 \times 10^6$ kg

Componente	Massa, Kg (vazio)	Massa de combustível (Kg)	Massa total (Kg)	Tempo de ignição (s)	Empuxo (Kgf)	Função
1º estágio	140.000	2.000.000 (querosene + O_2 líquido)	2.140.000	140	3.400.000	De 0 até 8.000 Km/h a 65 Km de altitude
2º estágio vácuo	36.000	420.000 (H_2 líquido + O_2 líquido)	456.000	370	450.000	De 8.000 a 24.000 Km/h a 180 Km de altitude
3º estágio vácuo	10.000	105.000 (H_2 líquido + O_2 líquido)	115.000	475	90.000	Injeção em órbita lunar a 40.000 Km/h.
Apolo (módulo lunar, módulo de comando e módulo de serviço)	12.000	11.000 (combustíveis líquidos e sólidos)	23.000		10.000	Missões lunares; retorno à Terra

$$\Delta v_1 = \ln\left(\frac{2.734.000}{734.000}\right) 9.720\,\text{km/h} \approx 12.800\,\text{km/h}$$

$$E_1 \approx 3{,}9\times 10^6 \text{ kgf}$$

$$\Delta v_2 = 1{,}2\times\ln\left(\frac{594.000}{174.000}\right) 11.520\,\text{km/h} \approx 17.000\,\text{km/h}$$

$$E_2 \approx 4{,}4\times 10^5 \text{ kgf}$$

$$\Delta v_3 = 1{,}2\times\ln\left(\frac{138.000}{33.000}\right) 11.520\,\text{km/h} \approx 20.000\,\text{km/h}$$

$$E_3 \approx 86{,}4\times 10^3 \text{ kgf}$$

$$\text{Empuxo} = \frac{M_{comb}}{t_{ign}} v_{rel}$$

$$\Delta v = v_{rel} \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

- Quer. e O_2 $v_{rel} \gg 9.720$ km/h
- H_2 e O_2: $v_{rel} \gg 11.520$ km/h
- Vácuo: 10-20% maiores