F-128 – Física Geral I

Aula exploratória-10A

UNICAMP – IFGW
username@ifi.unicamp.br

Variáveis rotacionais

- Cada ponto do corpo rígido executa um movimento circular de raio r em torno do eixo.

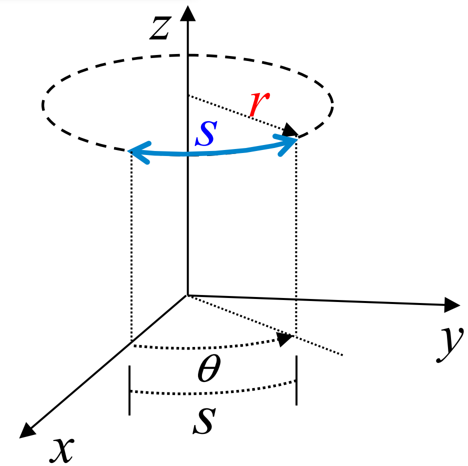


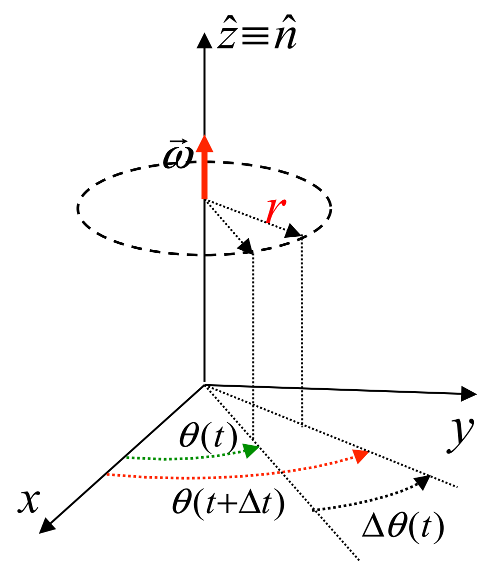
Figura: $s = r\theta \; (\theta \text{ em radianos})$

Deslocamento angular: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Velocidade angular (escalar) média: $\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Velocidade angular instantânea (vetor):

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{n} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n}$$



Deslocamento angular em torno de $\hat{n}$:

$$\theta(t_2) - \theta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)\, dt$$

Variáveis rotacionais

Aceleração angular

Variação da velocidade angular $\longrightarrow$ $\Delta\vec{\omega}=\vec{\omega}(t+\Delta t)-\vec{\omega}(t)$

Aceleração angular média $\longrightarrow$ $\bar{\vec{\alpha}}=\dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$

Aceleração angular instantânea $\longrightarrow$ $\vec{\alpha}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}=\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

A aceleração angular instantânea é um vetor paralelo a $\vec{\omega}$ quando o eixo de rotação é fixo!

Velocidade angular em função de $\vec{\alpha}$ $\longrightarrow$ $\vec{\omega}(t_2)-\vec{\omega}(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{\alpha}(t)dt$

na direção fixa ($\hat{n}$): $\omega(t_2)-\omega(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\alpha(t)dt$

Cinemática angular

Em capítulo anterior já estudamos o movimento circular uniforme. Vamos estudar agora o

Movimento circular <u>uniformemente acelerado</u>

Dadas as condições iniciais:

$$t_1 = 0 \text{ e } t_2 = t \rightarrow \theta(0) = \theta_0 \text{ e } \omega(0) = \omega_0$$

Temos, para *a* constante:

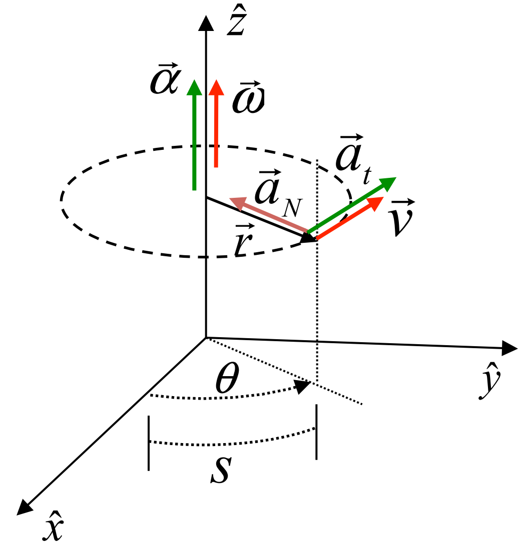
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t; \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Comparando com as variáveis do movimento linear:

$$\theta(t) \leftrightarrow x(t); \;\; \omega(t) \leftrightarrow v(t); \;\; \alpha(t) \leftrightarrow a(t)$$

Relação com as variáveis lineares



- Posição: $s = r\theta$

- Velocidade: $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad (\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r})$

- Aceleração:

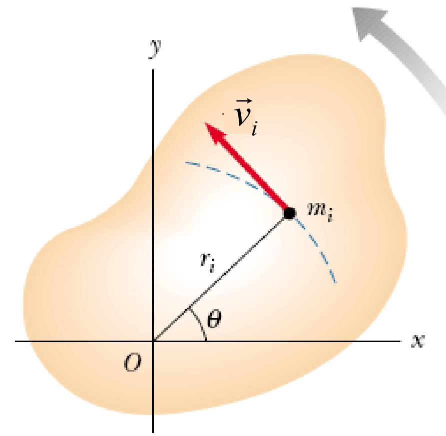
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{a}_N}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_t = \vec{\alpha}\times\vec{r} = \alpha r\hat{v} & \text{(em módulo: } a_t = \alpha r\text{)} \\ \vec{a}_N = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -\omega^2 r\hat{r} & \text{(em módulo: } a_N = \omega^2 r\text{)} \end{cases}$$

Energia Cinética de Rotação

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2\right) \omega^2$$



Momento de inércia *I:* $I = \sum m_i r_i^2$

ou: $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ (energia cinética de rotação)

Distribuição contínua de massa: $I = \int r^2 \, dm$,

$$dm = \begin{cases} \lambda dl : \text{em um fio} \\ \sigma ds : \text{em uma superfície} \\ \rho dV : \text{em um volume} \end{cases}$$

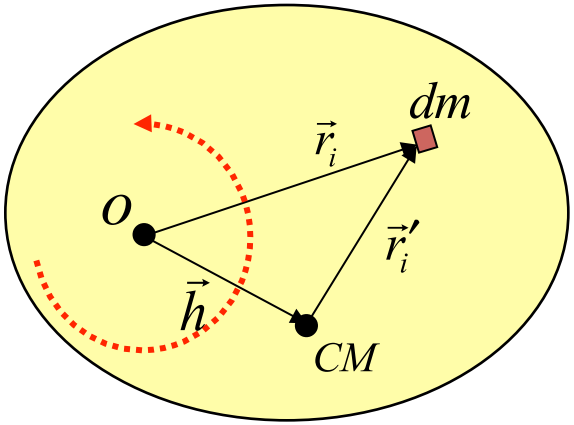
Teorema dos eixos paralelos

Se conhecermos o momento de inércia I_{CM} de um corpo em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa, podemos facilmente determinar I_O do corpo em relação a um eixo paralelo que passa por O.

De fato:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{h} \quad \Rightarrow r_i^2 = (\vec{r}_i' + \vec{h}) \cdot (\vec{r}_i' + \vec{h})$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i r_i'^2 + \sum_i m_i h^2 + 2\vec{h} \cdot \sum_i m_i \vec{r}_i'$$



Mas:

$$\vec{h} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{h}) = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$

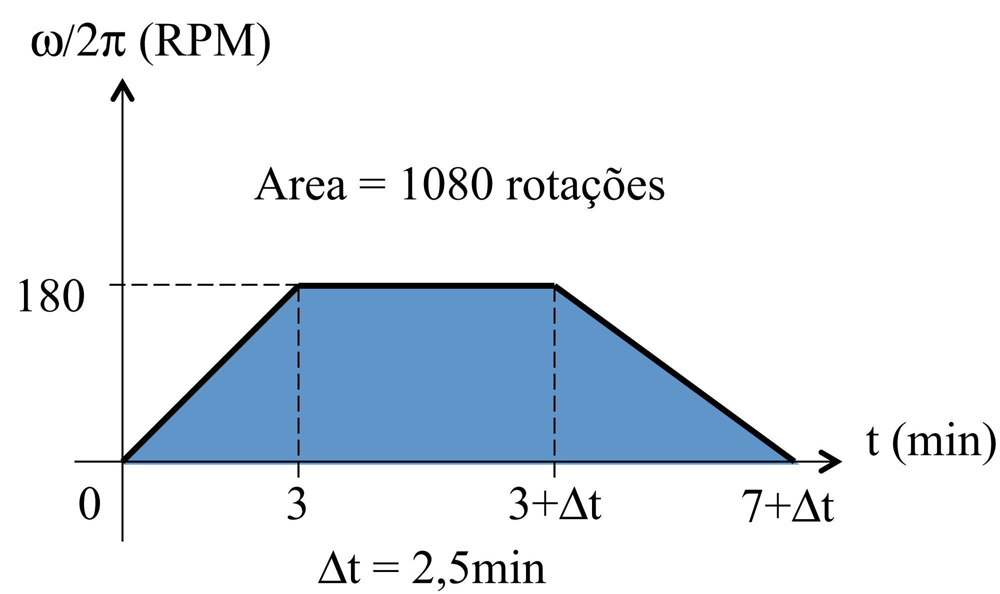
Então:

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 = I_{CM} + Mh^2$$ (teorema dos eixos paralelos)

Exercício 01

Uma roda, partindo do repouso, é acelerada de tal forma que sua velocidade angular aumenta uniformemente para 180 rpm em 3 min. Depois de girar com esta velocidade por algum tempo, a roda é freada com desaceleração uniforme, levando 4 min para parar. O número total de rotações é 1080. Quanto tempo, ao todo, a roda ficou girando?

Resp: 9,5 min



Exercício 02

Um astronauta está sendo testado em uma centrífuga. A centrífuga tem um raio de 10 m e, a partir do repouso, gira de acordo com a equação $\theta(t) = 0{,}3t^2$, onde t está em segundos e θ em radianos.

Quando $t = 5{,}0$ s, quais são os módulos:

a) da velocidade angular;

b) da velocidade linear;

c) da aceleração tangencial;

d) da aceleração radial do astronauta?

Resp:

a) 3,0 rad/s

b) 30 m/s

c) 6,0 m/s^2

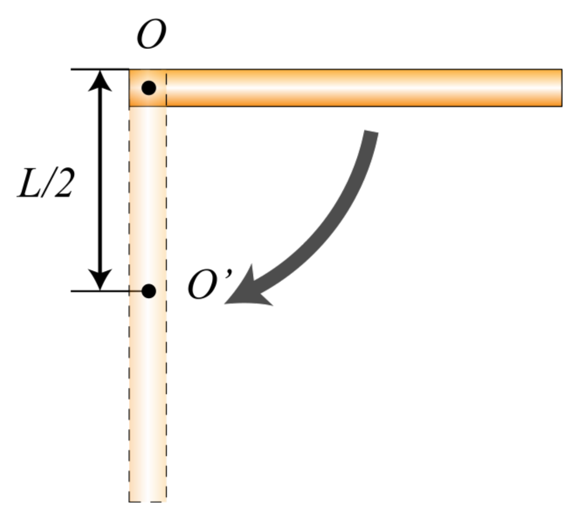
d) 90 m/s^2

Exercício 03

Uma barra uniforme de comprimento *L* e massa *M* pode girar livremente através de um pino que está localizado em uma de suas extremidades, como mostrado na figura abaixo. A barra está inicialmente na posição horizontal quando é solta.

a) qual é a sua velocidade angular quando ela atingir a sua posição mais baixa?

b) determine a velocidade linear no centro de massa e a velocidade linear do ponto mais baixo da barra quando ela se encontra na posição vertical. Despreze todos os atritos.



Resp:

a) $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{L}}$

b) $v = \sqrt{\dfrac{3gL}{4}}$

$v = \sqrt{3gL}$

Exercício 04

Duas partículas, cada uma com massa m, são ligadas uma à outra e ao eixo de rotação por duas barras leves, cada uma de comprimento L e massa M, como mostrado na figura. O sistema gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular ω. Obtenha as expressões algébricas para:

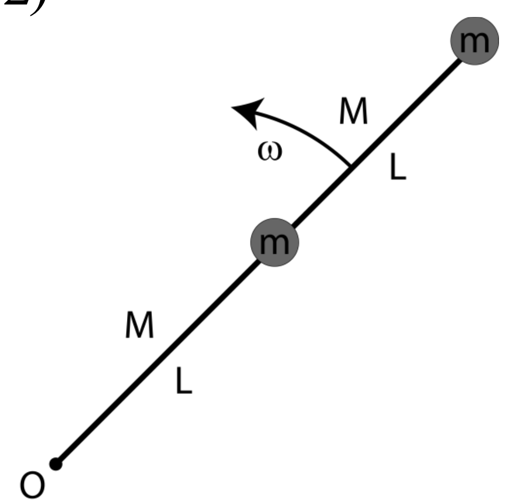
a) o momento de inércia do sistema em relação a O e

b) a energia cinética de rotação em torno de O.

(Observação: Use para a barra $I_{CM} = ML^2/12$)

$$I_T = 5mL^2 + \frac{ML^2}{3} + \frac{28ML^2}{12} = L^2\left(5m + \frac{8M}{3}\right)$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(5m + \frac{8}{3}M\right)L^2\omega^2$$

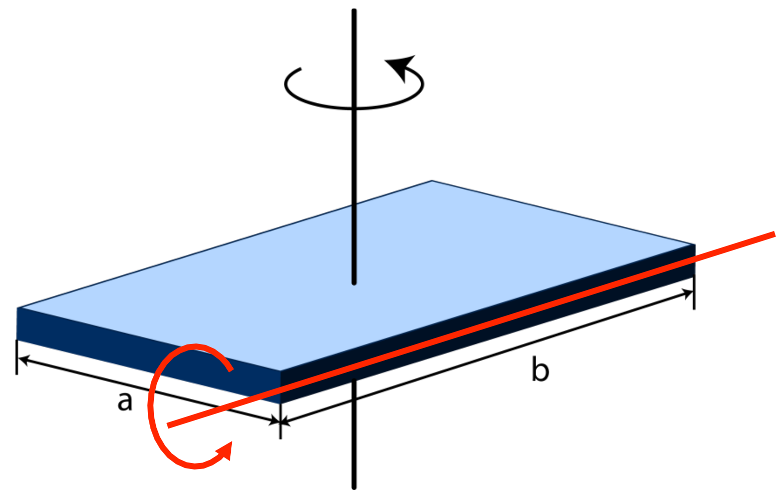


Exercício 05 (Extra)

Calcule o momento de inércia de uma placa fina homogênea retangular de lados *a* e *b* em torno de:

a)um eixo perpendicular passando pelo centro da placa.

b)um eixo paralelo ao lado de tamanho *b* da placa



Resp: a) $I = \frac{1}{12} M\,(a^2 + b^2)$

b) $I = \frac{1}{3} M\,a^2$