F-128 – Física Geral I

Aula Exploratória – 09

Unicamp - IFGW

F128 – 2o Semestre de 2012

Centro de Massa e 2a Lei de Newton

$$\left.\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \\ y_{CM} &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \\ z_{CM} &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \cdots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \end{aligned}\right\} \boxed{\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}$$

$$\sum \vec{F}^{(ext)} = m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} + \cdots + m_N \frac{d^2\vec{r}_N}{dt^2} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}^{(ext)} = M\vec{a}_{CM}}$$

(esta é a 2ª lei de Newton para um sistema de partículas: o sistema responde à resultante das forças externas como se a massa total *M* estivesse toda concentrada no centro de massa)

Centro de massa de corpos contínuos uniformes

Se um corpo consiste de uma distribuição contínua de massa, podemos dividi-lo em porções infinitesimais de massa *dm* e a soma transforma-se numa integral:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \rightarrow \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{CM} \rightarrow \frac{1}{M}\int z\,dm$$

A massa infinitesimal *dm* pode pertencer a um fio, uma superfície ou um volume:

$$\lambda dl \qquad \sigma dA \qquad \rho dV$$

$$dm = \begin{cases} \lambda & : \text{densidade linear de massa} \\ \sigma & : \text{densidade superficial de massa} \\ \rho & : \text{densidade volumétrica de massa} \end{cases}$$

Se o corpo (volume) tiver densidade uniforme: $dm = \rho dV = \frac{M}{V} dV$:

$$x_{CM} = \frac{1}{V}\int x\,dV; \qquad y_{CM} = \frac{1}{V}\int y\,dV; \qquad z_{CM} = \frac{1}{V}\int z\,dV$$

Normalmente, não precisamos calcular estas integrais triplas!

Momento Linear

O momento linear (ou quantidade de movimento) de uma partícula é uma quantidade vetorial definida como: $\vec{p} = m\vec{v}$

A 2ª lei de Newton pode ser escrita como: $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

O momento linear de um sistema de N partículas é a soma vetorial dos momentos lineares individuais:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = m_1\vec{v}_1 + \cdots + m_N\vec{v}_N$$

Derivando em relação ao tempo a expressão do centro de massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

Derivando novamente e usando a 2a lei de Newton para um sistema de partículas:

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}^{(ext)} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Conservação de momento linear

Uma conseqüência imediata da 2ª lei de Newton para um sistema de partículas é a conservação do momento linear total do sistema na ausência de forças externas:

$$\sum \vec{F}^{(ext)} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \overrightarrow{cte}.$$

Assim como no caso da conservação da energia mecânica, essa lei pode ser muito útil para resolver problemas, sem ter que lidar com a dinâmica detalhada do sistema.

Note que a única condição para a conservação do momento linear total é a ausência de forças externas. Não há nenhuma restrição quanto à presença de forças dissipativas, desde que elas sejam internas. Por outro lado, forças internas não podem mudar o momento linear total do sistema!

Sistemas de massa variável

Um foguete com velocidade instantânea v e massa instantânea M ejeta produtos de exaustão com massa $-dM$ e velocidade U (note que aqui $dM<0$).

Depois de um tempo dt, o foguete tem massa $M+dM$ e velocidade $v+dv$.

Todas as velocidades são medidas no referencial inercial da Terra.

Antes Depois

Como o sistema (foguete + produtos de exaustão) é fechado e isolado, aplicamos a conservação do momento linear: $P_i = P_f$

Antes: $P_i = M\, v$

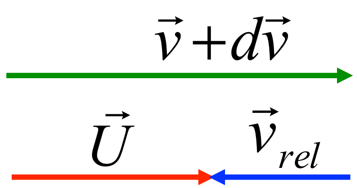
Depois: $P_f = (M + dM)(v + dv) + (-dM)\, U$

$$\Rightarrow M dv = (U - v - dv)\, dM \qquad (1)$$

Propulsão de foguetes

Introduzindo a velocidade $\vec{v}_{rel}$ dos produtos de exaustão em relação ao foguete (é essa quantidade que é controlada, pois está ligada ao processo de combustão):

$$\vec{v}_{rel} = \vec{U} - (\vec{v} + d\vec{v}) \xrightarrow[\text{em termos dos módulos}]{} U = -v_{rel} + (v + dv)$$



(é claro que a velocidade relativa $\vec{v}_{rel}$ aponta na direção de x negativo, daí o sinal)

Então, reescrevendo (1):

$$\boxed{M dv = dM\ v_{rel}}$$ **(Equação fundamental da propulsão de foguetes)**

Compare com o resultado anterior do canhão ($V_0 = dv$; $m = dM$):

$$V_0 = \frac{m}{m+M} v_{rel} \xrightarrow[M \gg m]{} M V_0 = m v_{rel}$$

Exercício 01

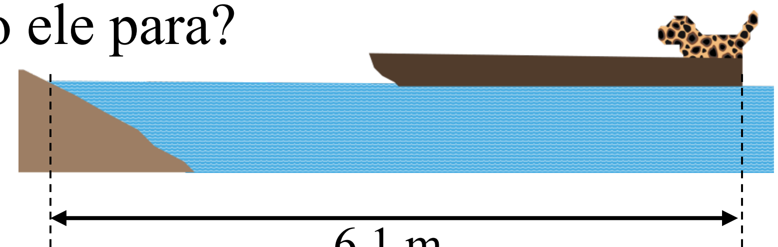
Uma barra com secção ortogonal de área uniforme A e comprimento L é feita de modo que a densidade $\rho(x)$ ao longo da mesma varia linearmente do valor ρ_1 na extremidade esquerda ao valor ρ_2 na extremidade direita. Determine a posição do seu centro de massa.

A massa total da barra é dada por: $A\dfrac{L}{2}(\rho_1+\rho_2)$

Portanto o x_{CM} será: $\dfrac{L}{3}\left(\dfrac{\rho_1+2\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\right)$

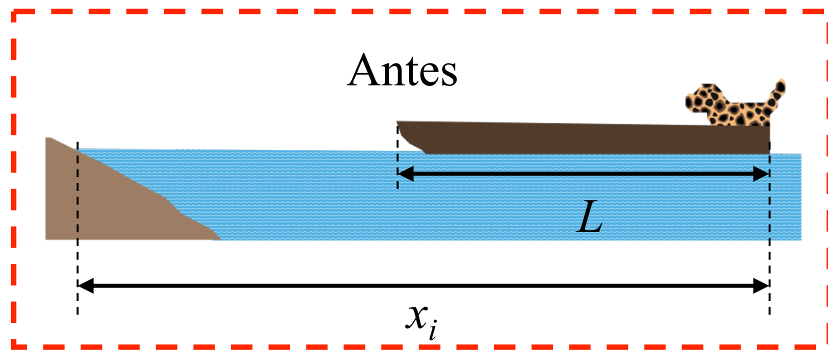
Exercício 02

Um cachorro de 4,5 kg está em pé sobre um barco de 18 kg e se encontra a 6,10 m da margem. Ele anda 2,4 m no barco em direção à margem, e então para. O atrito entre o barco e a água é desprezível. A que distância da margem está o cachorro quando ele para?



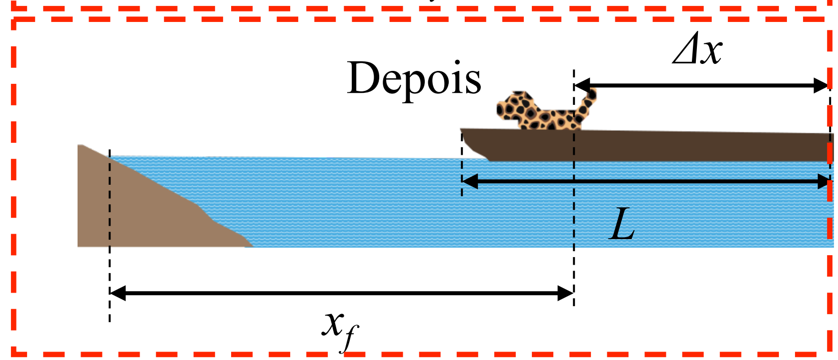
O CM do sistema cachorro/barco permanece inalterado ($F_{ext}= 0$) assim:

$$x_{CM} = \frac{m_c x_i + m_b(x_i - L/2)}{m_c + m_b} = \frac{m_c x_f + m_b(x_f + \Delta x - L/2)}{m_c + m_b}$$



Resolvendo para x_f

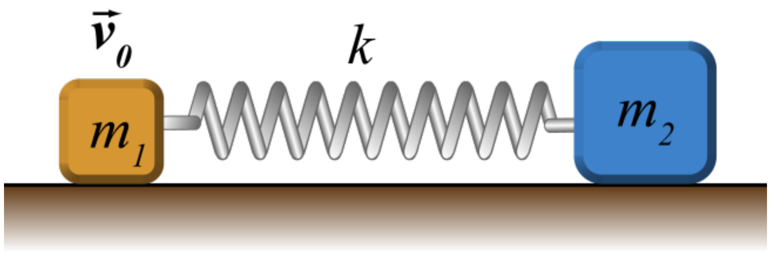
$$x_f = x_i - \frac{m_b \Delta x}{m_c + m_b} = 4{,}18 \text{ m}$$



Exercício 03

No sistema representado na figura abaixo, os atritos são desprezíveis. Em t=0 (sistema em repouso) comunica-se ao carrinho de massa m_1 uma velocidade instantânea v_0 = 2,0 m/s para a direita. Qual será a compressão máxima da mola, no decorrer do movimento posterior do sistema? No instante de compressão máxima, qual é a velocidade de cada bloco? Que fração da energia cinética inicial foi usada apara comprimir a mola?

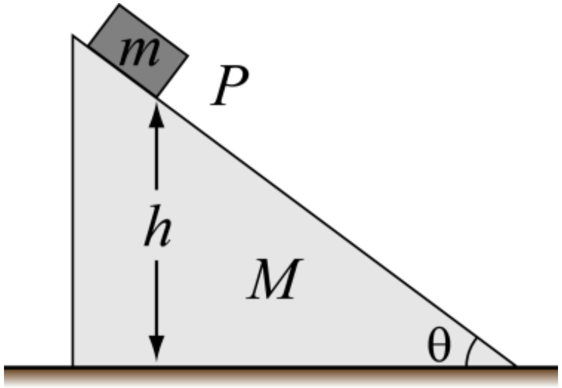
Dados: $m_1 = 0{,}2$ kg; $m_2 = 0{,}3$ kg; $k = 50$ N/m.



http://www.youtube.com/watch?v=amfw2nABke4

Exercício 04 - Extra

Um bloco de massa m está em repouso sobre uma cunha de massa M que, por sua vez, está sobre uma mesa horizontal, conforme figura abaixo. Todas as superfícies são lisas (sem atrito). O sistema parte do repouso, estando o ponto P do bloco à distância h acima da mesa. Qual a velocidade da cunha no instante em que o ponto P tocar a mesa?



Exercício 05 - Extra

Um barco a motor de massa igual a 100 kg está se movendo sobre a superfície de um lago com velocidade constante igual a 36 km/h. Repentinamente, sofre uma avaria que cause um pequeno buraco na parte da frente de seu casco e a água começa a entrar no barco a uma taxa de 12 litros/min. Determine a potência extra solicitada ao motor para que o barco continue com a mesma velocidade

Solução: Se a velocidade estava constante, então a força exercida inicialmente pelo motor se igualava em módulo às forças de atrito:

Antes: $F_m + f_{at} = 0 \rightarrow$ aceleração = 0 $\rightarrow$ v = constante = 36 km/h =10 m/s.

Após a avaria, haverá uma força **F** exercida pela variação de massa e o motor deverá realizar uma força extra D**F** igual e contrária a **F**. Portanto:

$$\Delta F = -F = -u\frac{dm}{dt}$$

A velocidade da água em relação ao barco é u = -v; assim

$$\Delta F = v\frac{dm}{dt} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}\frac{12\text{kg}}{60\text{s}} = 2{,}0\text{N}$$

Assim a potência será:

$$P = v\Delta F = \frac{10\text{m}}{\text{s}} \times 2{,}0\text{N=20W}$$